

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.353-362

УДК 517.9

Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина© Н. Д. Кузьмичев¹, А. А. Шушпанов², М. А. Васютин³

Аннотация. В работе представлены результаты математического моделирования и расчета магнитных свойств жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина для цилиндрически симметричных тел, например, цилиндров и эллипсоидов в осевом изменяющемся внешнем магнитном поле. С помощью уравнений электродинамики и уравнения Пуассона для векторного потенциала выводится уравнение Фредгольма 1-го рода для плотности экранирующего сверхтока. Введением явного вида зависимости вольт-амперной характеристики и закона электромагнитной индукции уравнение для плотности сверхтока сводится к интегральному уравнению 2-го рода, которое численно решается в матричном виде на неравномерной сетке с уплотнением к краям образца. На основе вышеуказанных результатов получено распределение плотности экранирующего сверхтока в эллипсоиде вращения, собственное магнитное поле сверхтока и петли гистерезиса намагниченности образца для возрастающего и убывающего внешнего поля.

Ключевые слова: Жёсткие сверхпроводники второго рода, критическое состояние, модель Бина, интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода, магнитные свойства, эллипсоид вращения.

1. Введение

Для сверхпроводников второго рода при получении таких основных характеристик как критическая плотность тока или критическая напряженность магнитного поля пользуются обычно бесконтактными измерениями. Применяются образцы в виде дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел. Однако вычисление полной трехмерной реакции сверхпроводника на магнитное поле является сложной задачей, поскольку в общем виде неясно, какие уравнения следует записывать, если мы не можем определить направления токов в произвольном случае. Существуют упрощенные тривиальные задачи для подобного расчета магнитных свойств – это длинные тонкие стержни, где токи текут вдоль них и диски в осевом поле, где токи текут по соосным

¹Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П.Огарёва» (430005, Россия, г.Саранск, ул.Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

²Шушпанов Алексей Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П.Огарёва» (430005, Россия, г.Саранск, ул. Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

³Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П.Огарёва» (430005, Россия, г.Саранск, ул. Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

окружностям. В этих двух случаях можно упростить задачу до двумерной или одномерной, где плотность тока \mathbf{J} , векторный потенциал \mathbf{A} и электрическое поле \mathbf{E} параллельны друг другу и имеют только z и ϕ компоненты или только одну ϕ компоненту [1–6]. Удобная модель для описания магнитных свойств СВР с сильным пиннингом (жестких сверхпроводников второго рода (ЖСВР)) в магнитных полях, превышающих первое критическое поле H_{c1} , была представлена Ч. Бином [7]. Она предполагает, что области сверхпроводника, куда не проникло магнитное поле, экранирующая плотность сверхпроводящего тока (сверхтока) равна нулю, а куда проникло — некоторому критическому значению J_c . Другими словами, последние области находятся в состоянии с экранирующим током, равным J_c , которое носит название «критическое состояние». Когда внешнее прикладываемое магнитное поле индукцией B меняется, граница области проникновения перестраивается. В общем случае критическая плотность тока J_c может локально зависеть от индукции магнитного поля $B(r)$, а в неоднородных материалах — также и от положения точки r . В модели Бина принимается $J_c = const$. Ориентация экранирующих сверхтоков зависит от магнитной истории сверхпроводника.

2. Теоретические основы

Целью данной работы является численное моделирование магнитных свойств ЖСВР с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси. Введем границы для величин: $-b \leq y \leq b$, $r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leq a(y)$.

Будем рассматривать материал с зависимостью $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$, что эквивалентно удельному сопротивлению $\rho = E/J$. Сопротивление образца может подчиняться линейным или нелинейным законам, в частности, хорошей аппроксимацией является степенная зависимость $E = E_c (J/J_c)^n$, с ненулевым критическим значением плотности тока J_c и показателем степени $n \geq 1$. Тогда условие $n = 1$ описывает омическую зависимость, а предел $n \rightarrow \infty$ — модель Бина. В общем случае они оба могут зависеть от индукции магнитного поля в конкретной точке: $J_c(B)$ и $n(B)$, или от частоты изменения поля, но мы ограничим вычисления изотропными средами, как и в работе [1].

Чтобы не рассчитывать конечное распределение поля в явном виде на бесконечном пространстве, найдем интегральное уравнение движения для плотности тока и численно решим его для получения конечного распределения. Для вывода основного уравнения воспользуемся уравнениями Максвелла о циркуляции тока и электромагнитной индукции:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{B}} &= -\nabla \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

определением векторного потенциала и калибровкой Лондона:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и материальными уравнениями $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ и $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$ (вольт-амперная характеристика).

Получим уравнение Пуассона для вектор-потенциала:

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\nabla^2 (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\text{пр}}), \quad (2.3)$$

из которых $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, если у нас нет внутри источников тока (на низких частотах ток смещения не будет оказывать сильного влияния). В силу цилиндрической симметрии имеем:

$$\mathbf{J} = J(r, y)\mathbf{n}_\phi, \quad \mathbf{E} = E(r, y)\mathbf{n}_\phi, \quad \mathbf{A} = A(y, r)\mathbf{n}_\phi.$$

Векторный потенциал прикладываемого поля индукцией $\mathbf{B}_{\text{пр}} = B_{\text{пр}}\mathbf{n}_y$ равен

$$A_{\text{пр}} = -\left(\frac{r}{2}\right) B_{\text{пр}},$$

следовательно:

$$\mu_0 J = \nabla^2 \left(A + \left(\frac{r}{2}\right) B_{\text{пр}} \right). \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) для векторного потенциала можно получить при помощи эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода:

$$A(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{r}}{2} B_{\text{пр}}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{r} = (r, y)$, $\mathbf{r}' = (r', y')$. Интегральное ядро имеет вид:

$$Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', y - y') + f(r, r', y + y'),$$

где

$$f(r, r', \eta) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}}. \quad (2.6)$$

Для получения уравнения на J продифференцируем по времени (2.5) и подставим (2.1) и (2.2):

$$E[J(\mathbf{r}, t)] = \mu_0 \int_S d^2r' Q_{\text{цил}} \dot{J}(\mathbf{r}', t) + \frac{r}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t).$$

Это уравнение можно решить численно относительно \dot{J} , для этого вынесем производную по времени от J из-под знака интеграла, используя обратное ядро $Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\dot{J}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right]. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) можно применять в рамках цилиндрической геометрии как для цилиндров конечной длины $2b$ и радиуса a , так и для тел с нелинейной функцией боковой границы $a(y)$.

3. Метод вычисления

В качестве нормировки положим $a = J_c = E_c = \mu_0 = 1$. При расчете распределения тока удобнее использовать неравномерную сетку с большей плотностью к краям образца для более точного расчета краевых эффектов. Тогда вектора \mathbf{r} и \mathbf{r}' будут являться

функциями (r_i, y_i) , где

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i) & y_i &= y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b, \\ u_i &= \frac{\pi/2 (i - 1/2)}{N_y}, & v_i &= \frac{\pi/2 (j - 1/2)}{N_r}, \\ i &= 1, \dots, N_y & j &= 1, \dots, N_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для расчета интегрального ядра в численной форме понадобятся «веса» ячеек:

$$w_j = w_r \cdot w_y, \quad w_r = \frac{\pi}{2} \cos u_i \cdot \frac{a(y_i)}{N_r}, \quad w_y = \frac{\pi}{2} \cos v_i \cdot \frac{b}{N_y}. \quad (3.2)$$

Для моделирования образцов с невертикальной боковой границей введем дополнительный нормировочный множитель для горизонтальных координат сетки и «весов» ячеек $a(y_i)$, получаемый из функции боковой границы $a(y)$.

Ядро уравнения сведем к матрице: $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow Q(r_i, r'_j) \cdot w_j = Q_{ij} \cdot w_j$. Эллиптический интеграл в функции f (2.6) сведем от аналитического решения к численному:

$$\begin{aligned} f(r, r', \eta) &= \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}} = \int_0^\pi g(\phi) d\phi = \\ &= \int_0^1 g[\phi(u)] \phi'(u) du \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[\phi(u_i)] \phi'(u_i) = \frac{1}{M} G \cdot \Phi', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_i &= g[\phi(u_i)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r' \cos \phi(u_i)}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi(u_i))^{0.5}}, \\ \Phi_{1i} &= \phi(u_i) = \pi - \pi \cos(\pi u_i). \end{aligned}$$

матрицы столбец и строка, функция выбора точек интегрирования:

$$u_i = \frac{i - 0.5}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Уравнение для производной плотности тока (2.7)

$$\begin{aligned} \dot{J}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{J}_i(t) = \frac{b}{N} \sum_j Q_{ij}^{-1} \left[J_j^n(t) - \frac{r_j}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t) \right] \end{aligned}$$

сведем к матричному:

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[\overbrace{J^T(t) \circ \dots \circ J^T(t)}^n - \frac{R}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t) \right], \\ J(t) &= J(t - dt) + \dot{J}(t) \cdot dt, \quad R_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N_r N_y, \end{aligned}$$

где J, R — матрицы строки для плотности тока и координаты r в каждой точке сетки.

Магнитный момент образца в момент времени t будет равен

$$m(t) = 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^b dy J(r, y, t) \rightarrow m(t) = (W \circ R \circ R) \cdot J(t),$$

$$W_i = w_j \cdot w_y.$$

Поле полного проникновения $H_{\text{п}}$ можно найти из условия заполнения сверхтоком объема образца. Для цилиндров конечной длины это поле можно выразить как [1–4]:

$$H_{\text{п}} = J_c b \cdot \ln \left[\frac{a}{b} + \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \right].$$

4. Результаты расчетов

Для расчетов были выбраны 4 образца цилиндрической формы с $b(y) = \text{const}$ и 4 эллиптических образца с $b(y) = a(1 - y^2/c)^{0.5}$, где c — коэффициент для создания различных отношений размеров. Размер сетки расчета выбирается исходя из соотношений сторон образца с сохранением её плотности в 20 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем $\dot{B}_{\text{пр}} = E_c/a = 1$. Степень в уравнении сопротивления образца возьмем достаточно большой, для соответствия модели Бина $n = 51$. Расчеты проводились в среде *MATLAB*, поскольку она хорошо оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор визуализации расчетов. Результаты моделирования для фронтов проникновения магнитного поля показаны на Рис. 4.1.

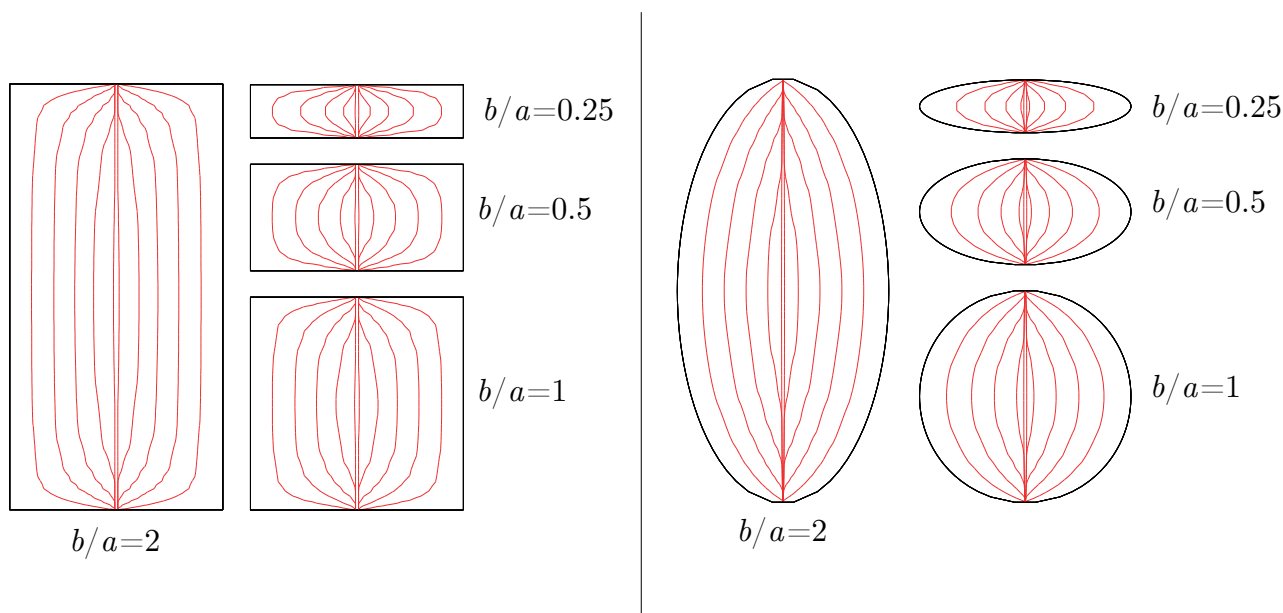


Рис. 4.1. Фронты проникновения магнитного поля и сверхтока для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) в отношении сторон $b/a = 2, 1, 0.5, 0.25$ в линейно возрастающем магнитном поле. Показаны линии для $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ при плотности тока $\pm J_c/2$

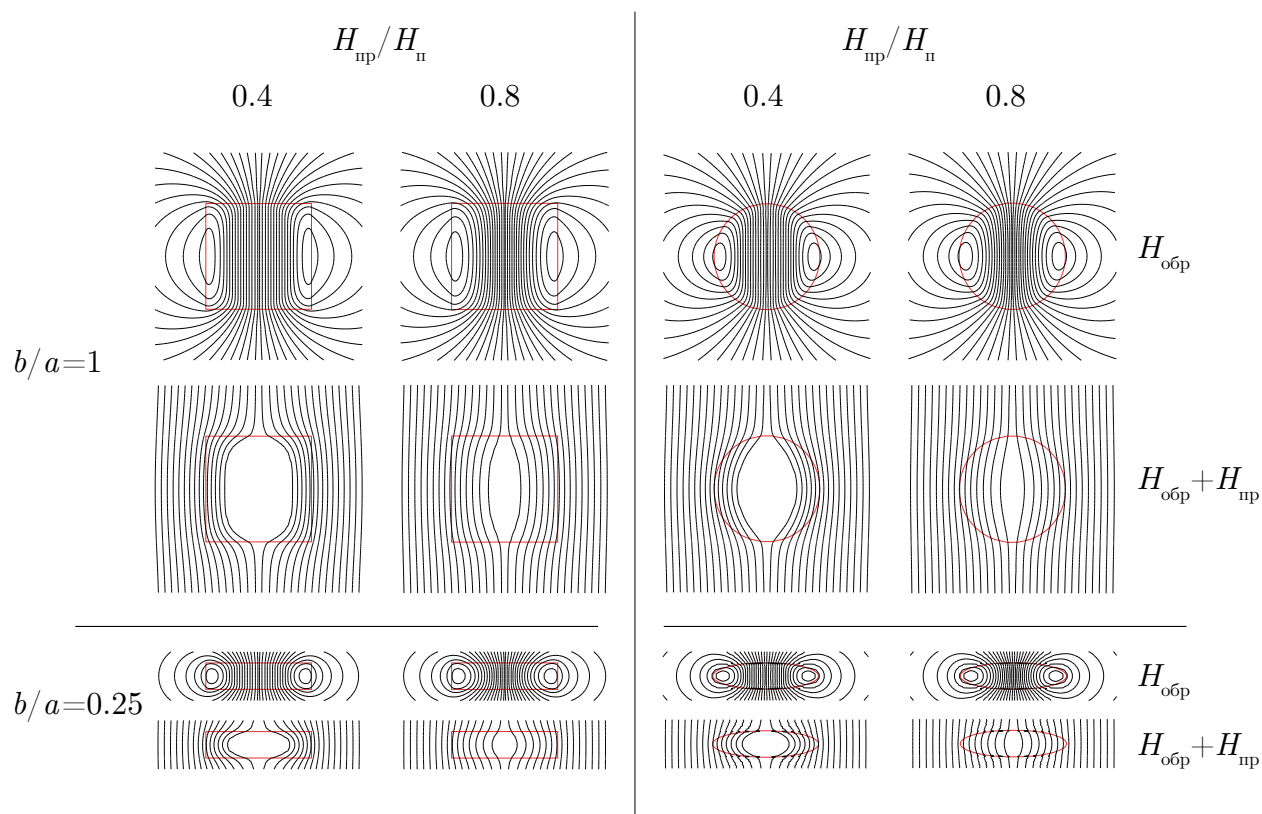


Рис. 4.2. Линии магнитного поля при проникновении магнитного поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением сторон $b/a = 1, 0.25$. Сверху – магнитное поле, создаваемое сверхтоком образца ($H_{обр}$), снизу – совместно с внешним. Картины даны для $H_{пр}/H_{н} = 0.4, 0.8$.

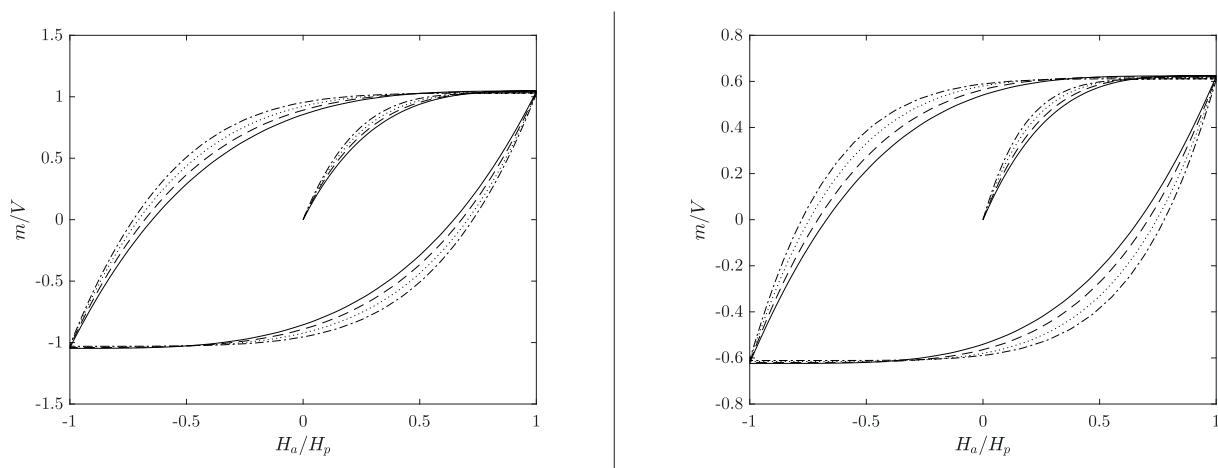


Рис. 4.3. Петли гистерезиса для намагниченности образца при линейном изменении внешнего поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением размеров $b/a = 2$ (сплошная линия), 1 (пунктирная линия), 0.5 (точечная линия), 0.25 (штрих-пунктирная линия)

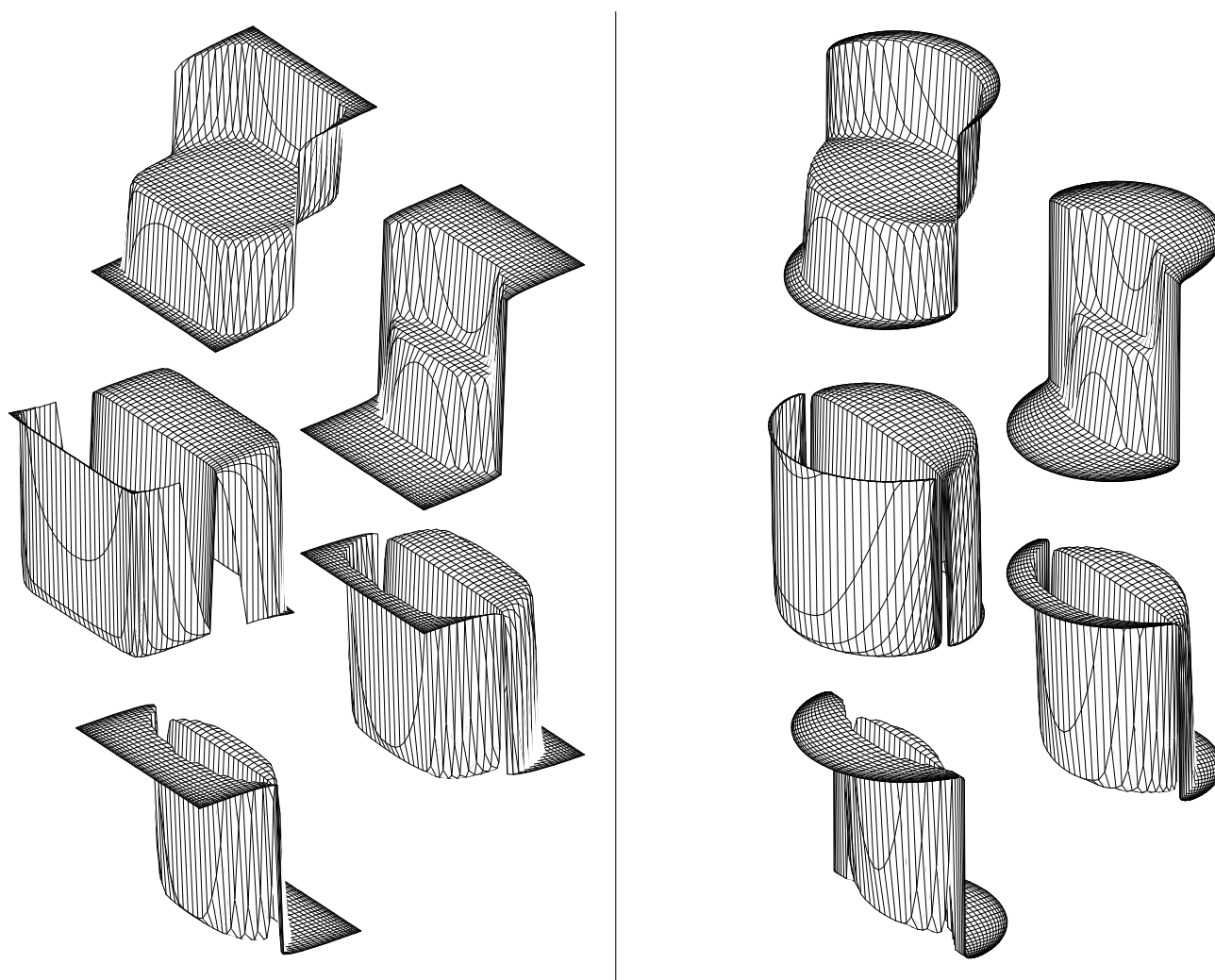


Рис. 4.4. Профили плотности тока J_c для цилиндра (слева) и эллипсоида (справа) с соотношением $b/a = 1$ при внешнем поле (сверху вниз) $H_{\text{пр}}/H_{\text{н}} = 0.2, 0.7, 0.8, 0.3, -0.2$.

5. Заключение

В работе на основании решения уравнения Пуассона для вектор-потенциала с использованием явной зависимости вольт-амперной характеристики $E(J)$ получено уравнение движения плотности сверхтока J в жестком сверхпроводнике второго рода. Полученное интегральное уравнение решается численно методом обратной матрицы в системе *MATLAB*. В результате найдено распределение плотности экранирующего сверхтока в жестких сверхпроводниках второго рода, имеющих форму цилиндров конечной длины и эллипсоидов вращения в осевом переменном магнитном поле в модели Бина. Разработанную программу можно применять для расчета любых образцов с цилиндрической симметрией, а также для различных сценариев изменения внешнего магнитного поля. Результаты работы имеют важное практическое и теоретическое значение для различных областей применения сверхпроводников, например, электротехники (мощные электродвигатели, экраны), магнитометрии (датчики магнитного поля), вычислительной техники (криотроны, джозефсоновские переходы), криоэлектроники и в других технических областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. H. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves”, *Phys. rev. B*, **58**:10 (1998), 6506–6522.
2. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование процесса намагничивания цилиндрического сверхпроводника в модели Бина”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, **21**:1 (2012), 139–148.
3. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:4 (2011), 25–34.
4. D. Frankel, “Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors”, *Appl. Phys.*, **50**:8 (1979), 5402–5407.
5. P. N. Mikheenko, Yu. E. Kuzovlev, “Inductance measurements of HTSC films with high critical currents”, *Physica C.*, **204** (1993), 229–236.
6. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneaure, “Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field”, *Physica C.*, **212**:1-2 (1993), 216–222.
7. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev.*, **8**:6 (1962), 250–253.
8. Ю. М. Ципенюк, *Физические основы сверхпроводимости*, МФТИ, М., 1996, 90 с.
9. В. Буккель, *Сверхпроводимость, основы и приложения*, Мир, М., 1975, 370 с.

Поступила 11.06.2019

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroids of hard second kind superconductors in the Bean model

© N. D. Kuzmichev¹, A. A. Shushpanov², M. A. Vasyutin³

Abstract. Authors have modelled magnetic field in hard II-type superconductor bodies with cylindric symmetry by means of Bean model. Using the equations of electrodynamics and the Poisson equation for the vector potential, the Fredholm equation of the first kind is derived for the screening supercurrent density. By introducing the explicit form of the current-voltage characteristic and the law of electromagnetic induction, the equation for the supercurrent density is reduced to an integral equation of the 2nd kind, which is solved numerically in matrix form on a non-uniform grid with compaction to the edges of the sample. Density distribution of the screened superconductive current, sample-self magnetic field and hysteresis loops of magnetization in the cases of cylinders and spheroids are obtained.

Key Words: hard II-type superconductors, critical state, Bean model, Fredholm integral equations of the 1st and 2nd kind, magnetic properties, spheroid

REFERENCES

1. E. H. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves”, *Phys. rev. B*, **58**:10 (1998) (In Eng.), 17 p.
2. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “Mathematical modeling of the magnetization process of a cylindrical superconductor in the Bean model”, *Proceedings of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physics and Mathematics*, **21**:1 (2012), 139-148 (In Russ.).
3. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “Mathematical modeling of the distribution of the screening current and the hysteresis of the magnetization of short cylinders of rigid superconductors of the 2nd kind in the Bean approximation”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:4 (2011), 25–34 (In Russ.).
4. D. Frankel, “Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors”, *Appl. Phys.*, **50**:8 (1979), 5402–4849.
5. P. N. Mikheenko, Yu. E. Kuzovlev, “Inductance measurements of HTSC films with high critical currents”, *Physica C.*, **204** (1993), 229–236.
6. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneaure, “Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field”, *Physica C: Superconductivity*, **212**:1-2 (1993), 216–222.

¹**Nikolay D. Kuzmichev**, Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

²**Aleksey A. Shushpanov**, Post-Graduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

³**Mihail A. Vasyutin**, Associate Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

7. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev.*, **8:6** (1962), 250–253.
8. U. M. Tsipenyuk, [*Physical basis of superconductivity*], MPhTI, Moscow, 1996 (In Russ.), 90 p.
9. V. Bukkel, [*Superconductivity, foundation and application*], Mir, Moscow, 1975 (In Russ.), 370 p.

Submitted 11.06.2019