DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.329-342

УДК 519.6:517.962

Об одном итерационном процессе для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения

© Ф. В. Лубышев[1], М. Э. Файрузов[2]

Аннотация. Рассматривается и исследуется итерационный процесс для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения. Подобная сеточная задача возникает при разностной аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями. Исследование итерационных процессов для состояний таких задач представляет самостоятельный интерес для теории и практики. В работе показано, что численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, разработанных в настоящей работе, а именно с помощью итераций на внутренней границе разрыва сеточного решения в сочетании с другими итерационными методами по нелинейностям в отдельности в каждой из сеточных подобластей. Заметим, что задачи для состояний управляемых процессов, описываемых уравнениями математической физики с разрывными коэффициентами и решениями, возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. Предложенный в работе итерационный процесс сводит решение исходной сеточной граничной задачи для состояния с разрывным решением к решению на каждой фиксированной итерации двух специальных граничных задач в двух сеточных подобластях. Доказана сходимость итерационного процесса в сеточных Соболевских нормах к единственному решению сеточной задачи при любом начальном приближении.

Ключевые слова: итерационный метод, краевая задача, эллиптическое уравнение, разрывное решение, разностная аппроксимация, сумматорное тождество, сеточная функция

1. Постановка сеточной задачи о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением

Рассмотрим следующую сеточную задачу о сопряжении с разрывным сеточным решением на границе раздела сред. Требуется найти функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определенную на $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)}$, $y(x) = y_1(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(1)}$, $y(x) = y_2(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) сеточная функция $y_1(x)$, определенная на $\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \cup \partial\omega^{(1)}$, удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$L_{1h}y_1(x) = -\left(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_2}\right)_{x_2} + d_{1h}(x)q_1(y_1) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \tag{1.1}$$

а на границе $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \backslash \gamma_S$ – условию

$$y_1(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(1)}; \tag{1.2}$$

[1]**Лубышев Федор Владимирович**, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Файрузов Махмут Эрнстович**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

2) сеточная функция $y_2(x)$, определенная на сетке $\bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$ удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_{2h}y_2(x) = -\left(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_2}\right)_{x_2} + d_{2h}(x)q_2(y_2) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \tag{1.3}$$

а на границе $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \backslash \gamma_S$ – условию

$$y_2(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(2)}; \tag{1.4}$$

3) искомые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны между собой дополнительными условиями на γ_S, позволяющими «сшить» сеточные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вдоль сеточного множества γ_S в виде следующих уравнений:

$$\tilde{L}_{1h}y_1(x) = \frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_1}(\xi, x_2) + \theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2)\right] + d_{1h}(\xi, x_2)q_1(y_1(\xi, x_2)) -$$
$$- \left(a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2)\right)_{x_2} = f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2), \tag{1.5}$$

$$\tilde{L}_{2h}y_2(x) = -\frac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(\xi + h_1, x_2)y_{2x_1}(\xi, x_2) + \theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2)\right] + d_{2h}(\xi, x_2)q_2(y_2(\xi, x_2)) -$$
$$- \left(a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2)\right)_{x_2} = f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2), \tag{1.6}$$

где $x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}$.

Явный вид разностной схемы (1.1)–(1.6) в узлах сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)}$ можно записать также в следующем, более компактном, виде:

$$\begin{aligned} &A^{(1)}y_1 = A_1^{(1)}y_1 + A_2^{(1)}y_1 = \varphi_1(x), \qquad x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S, \\ &y_1(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \backslash \gamma_S, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$A_1^{(1)}y_1(x) = \begin{cases} -\left(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \dfrac{1}{2}d_{1h(x)}q_1(y_1), & x \in \omega^{(1)}, \\ \dfrac{2}{h_1}\left[a_{(1h)}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}(x) + \theta_h(x_2)y_1(x)\right] + \dfrac{1}{2}d_{2h}(x)q_2(y_2), & x \in \gamma_S, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$A_2^{(1)}y_1(x) = -\left(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_2}\right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2}d_{1h}q_1(y_1), \quad x \in \omega^{(1)} \backslash \gamma_S, \tag{1.9}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_{1h}(x), & x \in \omega^{(1)}, \\ f_{1h}(x) + \dfrac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(x), & x \in \gamma_S, \end{cases} \tag{1.10}$$

где сеточная функция $y_2(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$ является решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} &A^{(2)}y_2 = A_1^{(2)}y_2 + A_2^{(2)}y_2 = \varphi_2(x), \qquad x \in \omega^{(2)} \cup \gamma_S, \\ &y_2(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \backslash \gamma_S, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$A_1^{(2)}y_2(x) = \begin{cases} -\left(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1}\right)_{x_1}(x) + \dfrac{1}{2}d_{2h(x)}q_2(y_2), & x \in \omega^{(2)}, \\ -\dfrac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(x + h_1, x_2)y_{2x_1}(x) - \theta_h(x_2)y_2(x)\right] + \dfrac{1}{2}d_{2h}(x)q_2(y_2), & x \in \gamma_S, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$A_2^{(2)}y_2(x) = -\big(a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_2}\big)_{x_2}(x) + \frac{1}{2}d_{2h}q_2(y_2), \quad x \in \omega^{(2)} \backslash \gamma_S, \tag{1.13}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_{2h}(x), & x \in \omega^{(2)}, \\ f_{2h}(x) + \dfrac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(x), & x \in \gamma_S. \end{cases} \tag{1.14}$$

Нетрудно показать, что сеточная функция $y(x) \equiv (y_1(x), y_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ – решение разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{aligned} Q_h(y,v) = \Bigg\{ &\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) \Bigg\} + \Bigg\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \\ &\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) \Bigg\} + \\ &+ \Bigg\{ \Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) + \\ &+ \Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) \Bigg\} + \\ &+ \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2)[y(\xi, x_2)][v(\xi, x_2)] h_2 = \\ &= \Bigg\{ \Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) + \\ &+ \Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) \Bigg\} = l_h(v). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Задача (1.15) (или (1.1)–(1.6), или (1.7)–(1.14)) является сеточным аналогом исходной дифференциальной задачи для состояния процесса управления, описываемого уравнениями математической физики с разрывными коэффициентами и решениями [1]. Подобные задачи возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. [2–5]. Численное решение таких задач, описывающих состояния управляемых процессов и тем более численное решение разностных аппроксимаций задач оптимального управления с разрывными состояниями, сопряжено со значительными трудностями, и прежде всего с необходимостью дискретизации указанных задач. Важнейшей проблемой является разработка высокоточных экономичных алгоритмов дискретизации таких задач для состояний с разрывными коэффициентами и решениями, в том числе экономичных, сходящихся итерационных методов их реализации [6–7].

Здесь и далее по поводу обозначений для сеточных функций, разностных аппроксимаций смотри работу [1].

2. Итерационный процесс для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва сеточного решения и его сходимость

Рассмотрим сеточную граничную задачу о сопряжении (1.1)–(1.6) с разрывным решением на границе γ_S (см. также (1.7)–(1.14) или (1.15)). В данном пункте мы покажем, что численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, а именно итераций на границе γ_S разрыва сточного решения в сочетании с другими итерационными методами по нелинейности в отдельности в каждой из областей $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$.

Задаче (1.1)–(1.6) (см. также (1.7)–(1.14) или (1.15)) поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней сеточной границе γ_S:

$$L_{1h}y_1^{(n)}(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_{\alpha h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_\alpha}^{(n)}\right)_{x_\alpha} + d_{1h}(x)q_1(y_1^{(n)}) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \tag{2.1}$$

$$y_1^{(n)}(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)}\backslash\gamma_S, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}\tilde{L}_{1h}y_1^{(n)}(x) = \frac{2}{h_1}a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_1}^{(n)}(\xi,x_2) - \left(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\right)_{x_2} + d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1^{(n)}(\xi,x_2)) + \\ + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}(\xi,x_2) = f_{1h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2^{(n-1)}(\xi,x_2), x \in \gamma_S = \{x_1=\xi, x_2 \in \omega_2\},\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$L_{2h}y_2^{(n)}(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_{\alpha h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_\alpha}^{(n)}\right)_{x_\alpha} + d_{2h}(x)q_2(y_2^{(n)}) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{2h}y_2^{(n)}(x) = -\frac{2}{h_1}a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)y_{2x_1}^{(n)}(\xi,x_2) - \left(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\right)_{x_2} + \\ + d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2^{(n)}(\xi,x_2)) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2^{(n)}(\xi,x_2) = \\ = f_{2h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}(\xi,x_2), \qquad x \in \gamma_S = \{x_1=\xi, x_2 \in \omega_2\},\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$y_2^{(n)}(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)}\backslash\gamma_S, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2.6}$$

где $y_2^{(0)}(x)$ – начальное приближение, например, $y_2^{(0)} = 0$ на γ_S.

Таким образом, итерационный процесс (2.1)–(2.6) сводит решение исходной сеточной граничной задачи (1.1)–(1.6) с разрывным решением к решению на каждой итерации n двух граничных задач (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) в подобластях $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций $y_1^{(n)}(x)$ и $y_2^{(n)}(x)$ состоит в отыскании последовательности пар сеточных функций $\{y^{(n)}(x)\} = \{y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $y_k^{(n)}(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$, $k = 1,2$, и которые удовлетворяют сумматорным тождествам:

$$\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}^{(n)}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}y_{1\bar{x}_2}^{(n)}v_{1\bar{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_1(y_1^{(n)}(x))v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1^{(n)}(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}v_1h_2=\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)y_2^{(n-1)}v_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg),\qquad \forall v_1(x)\in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)}); \quad (2.7)$$

$$\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1}^{(n)}v_{2\bar{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}y_{2\bar{x}_2}^{(n)}v_{2\bar{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_2(y_2^{(n)}(x))v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2^{(n)}(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)y_2^{(n)}v_2h_2=\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}v_2h_2+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg),\qquad \forall v_2(x)\in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)}), \quad (2.8)$$

$n=1,2,...$; $y_2^{(0)}(x)$ – начальное приближение (например, $y_2^{(0)}(x)=0$ на γ_S).

Используя теорию монотонных операторов [8–11] можно установить однозначную разрешимость задач (2.7)–(2.8) относительно сеточных функций $y_1^{(n)}(x)$ и $y_2^{(n)}(x)$ при каждом фиксированном номере n.

Докажем сходимость итерационного процесса (2.1)–(2.6) (в обобщенной постановке – сходимость итерационного процесса (2.7)– (2.8)).

Интегральные тождества (2.7)–(2.8) относительно определения последовательности $y^{(n)}(x)\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ перепишем в виде:

$$\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}^{(n)}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}y_{1\bar{x}_2}^{(n)}v_{1\bar{x}_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1}^{(n)}v_{2\bar{x}_1}h_1h_2+$$
$$\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}y_{2\bar{x}_2}^{(n)}v_{2\bar{x}_2}h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$

$$+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_1(y_1^{(n)}(x))v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1^{(n)}(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_2(y_2^{(n)}(x))v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2^{(n)}(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)y_k^{(n)}(\xi,x_2)v_k(\xi,x_2)h_2=\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\big(y_2^{(n-1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)+$$
$$+y_1^{(n)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)\big)h_2+\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg),\quad \forall v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)}).\quad (2.9)$$

Из (2.9) при $v_1=0$ следует (2.7), а при $v_2=0$ следует (2.8).

Для оценки скорости сходимости метода итераций при $n\to\infty$ введем в рассмотрение величины:

$$z^{(n)}(x)=\begin{cases} z_1^{(n)}=y_1^{(n)}-y_1(x), & x\in\bar\omega^{(1)},\\ z_2^{(n)}=y_2^{(n)}-y_2(x), & x\in\bar\omega^{(2)}.\end{cases}\quad (2.10)$$

Из (2.9), (1.15) следует

$$\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}z_{1\bar x_1}^{(n)}v_{1\bar x_1}h_1h_2+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}z_{1\bar x_2}^{(n)}v_{1\bar x_2}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)z_{1\bar x_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{1\bar x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}z_{2\bar x_1}^{(n)}v_{2\bar x_1}h_1h_2+$$
$$\Bigg(+\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}z_{2\bar x_2}^{(n)}v_{2\bar x_2}h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)z_{2\bar x_2}^{(n)}(\xi,x_2)v_{2\bar x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big[q_1(y_1^{(n)}(x))-q_1(y_1(x))\big]v_1(x)h_1h_2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big[q_1(y_1^{(n)}(\xi,x_2))-q_1(y_1(\xi,x_2))\big]v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_2(x)\big[q_2(y_2^{(n)}(x))-q_2(y_2(x))\big]v_2(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big[q_2(y_2^{(n)}(\xi,x_2))-q_2(y_2(\xi,x_2))\big]v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{\omega_2}\theta_h(x)z_k^{(n)}(\xi,x_2)v_k(\xi,x_2)h_2=$$
$$=\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\big[z_2^{(n-1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)+z_1^{(n)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)\big]h_2,\quad \forall v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)}).\quad (2.11)$$

Полагая в (2.11) $v = z^{(n)}$, получим:

$$\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 + \Big(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2\Big)\Big\} + \Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 +$$
$$+\Big(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar{x}_2}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\big(z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\Big\{\Big(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\big[q_1(y_1^{(n)}(x) - q_1(y_1(x))\big] z_1^{(n)}(x)h_1h_2\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\big[q_1(y_1^{(n)}(\xi,x_2) - q_1(y_1(\xi,x_2))\big] z_1^{(n)}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\big[q_2(y_2^{(n)}(x) - q_2(y_2(x))\big] z_2^{(n)}(x)h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\big[q_2(y_2^{(n)}(\xi,x_2) - q_2(y_2(\xi,x_2))\big] z_2^{(n)}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{\omega_2}\theta_h(x)\big(z_k^{(n)}(\xi,x_2)\big)^2 h_2 = \sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\big[z_1^{(n)}(\xi,x_2)z_2^{(n-1)}(\xi,x_2) + z_1^{(n)}(\xi,x_2)z_2^{(n)}(\xi,x_2)\big]h_2. \tag{2.12}$$

Обратимся к сумматорному тождеству (2.12). Поскольку $z^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$, то в граничных узлах имеем соотношения: $z^{(n)}(x) = 0$. Так как $z_{1\bar{x}_1}^{(n)} = 0$ при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$, то

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 = \sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1\hbar(x_2). \tag{2.13}$$

Поскольку $z_{2\bar{x}_1}^{(n)} = 0$ при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$, то

$$\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 = \sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar{x}_1}^{(n)}\big)^2 h_1\hbar(x_2). \tag{2.14}$$

Далее, так как $z_{1\bar{x}_2}^{(n)} = 0$ при $x_1 = 0$, то

$$\sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}\big)^2 \hbar_1h_2 = \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(0,x_2)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(0,x_2)\big)^2\frac{h_1}{2}h_2+$$
$$+\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2 =$$
$$= \sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}\big)^2 h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\big(z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2. \tag{2.15}$$

Поскольку $z^{(n)}_{2\bar{x}_2} = 0$ при $x_1 = l_1$, то

$$\sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(x)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}\big)^2 \hbar_1 h_2 = \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(\xi, x_2)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2)\big)^2 h_1 h_2 +$$
$$+ \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(x)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}\big)^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(l_1, x_2)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}(l_1, x_2)\big)^2 \frac{h_1}{2} h_2 =$$
$$= \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(x)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}\big)^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(\xi, x_2)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2)\big)^2 h_1 h_2. \quad (2.16)$$

Так как сумматорное тождество (2.12) можно переписать в виде

$$\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a^{(1)}_{1h}(x)\big(z^{(n)}_{1\bar{x}_1}\big)^2 h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a^{(1)}_{2h}(x)\big(z^{(n)}_{1\bar{x}_2}\big)^2 \hbar_1 h_2\Big\} +$$
$$+ \Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a^{(2)}_{1h}(x)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_1}\big)^2 h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a^{(2)}_{2h}(x)\big(z^{(n)}_{2\bar{x}_2}\big)^2 \hbar_1 h_2\Big\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \Big(d_{kh}(x)\big[q_k(y^{(n)}_k(x)) - q_k(y_k(x))\big], z^{(n)}_k(x)\Big)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2)\big(z^{(n)}_k(x)\big)^2 h_2 = \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2)\big(z^{(n)}_1(x) z^{(n-1)}_2(x) + z^{(n)}_1(x) z^{(n)}_2(x)\big) h_2, \quad (2.17)$$

то далее имеем

$$\Big|\sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2)\big(z^{(n)}_1(x) z^{(n-1)}_2(x) + z^{(n)}_1(x) z^{(n)}_2(x)\big) h_2\Big| \le$$
$$\le \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \sum_{x \in \gamma_S} \big(|z^{(n)}_1(x)| \cdot |z^{(n-1)}_2(x)| + |z^{(n)}_1(x)| \cdot |z^{(n)}_2(x)|\big) h_2 \le$$
$$\le \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \big[\|z^{(n)}_1(x)\|_{L_2(\gamma_S)} \|z^{(n-1)}_2(x)\|_{L_2(\gamma_S)} + \|z^{(n)}_1(x)\|_{L_2(\gamma_S)} \|z^{(n)}_2(x)\|_{L_2(\gamma_S)}\big] =$$
$$= \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z^{(n)}_1(x)\|_{L_2(\gamma_S)} \big[\|z^{(n-1)}_2(x)\|_{L_2(\gamma_S)} + \|z^{(n)}_2(x)\|_{L_2(\gamma_S)}\big]. \quad (2.18)$$

Для любых сеточных функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)} \subset \bar{\Omega}_1$ и $\bar{\omega}^{(2)} \subset \bar{\Omega}_2$, справедливы неравенства [1–3]

$$\|v_k(x)\|_{L_2(\partial\omega^{(k)})} \le \bar{C}^2_{k+2} \|v_k(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(k)})}, \qquad k = 1, 2, \quad (2.19)$$

где $\bar{C}^2_{k+2} = Const > 0$, $k = 1, 2$.

В силу оценок (2.19) из (2.18) получим

$$\Big|\sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2)\big(z^{(n)}_1(x) z^{(n-1)}_2(x) + z^{(n)}_1(x) z^{(n)}_2(x)\big) h_2\Big| \le$$
$$\le \bar{C}_3 \bar{C}_4 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z^{(n)}_1(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(1)})} \big[\|z^{(n-1)}_2(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z^{(n)}_2(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(2)})}\big] \le$$
$$\le \bar{C}_3 \bar{C}_4 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \big[\|z^{(n-1)}_2(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z^{(n)}_2(x)\|_{W^1_2(\bar{\omega}^{(2)})}\big]. \quad (2.20)$$

Кроме того, в силу ограничений на входные данные имеем

$$\sum_{k=1}^{2}\Big(d_{kh}(x)\big[q_k(y_k^{(n)}(x))-q_k(y_k(x))\big],z_k^{(n)}(x)\Big)_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})}\geq 0. \tag{2.21}$$

Далее установим следующие оценки:

$$\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\bar\omega_2}a_{1h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big\}+$$
$$+\Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\bar\omega_2}a_{1h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2\geq\nu\Big\{\Big[\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\bar\omega_2}\big(z_{1\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\bar\omega_2^+}\big(z_{1\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big]+$$
$$+\Big[\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\bar\omega_2}\big(z_{2\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\bar\omega_2^+}\big(z_{2\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big]\Big\}+\theta_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_S}\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2=\nu\sum_{k=1}^{2}\|\nabla z_k^{(n)}\|^2+$$
$$+\theta_0\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_S}\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2\geq\min\{\nu,\theta_0\}\sum_{k=1}^{2}\Big[\|\nabla z_k^{(n)}\|^2+\sum_{x\in\gamma_S}\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2\Big]. \tag{2.22}$$

Поскольку $\gamma_S\subset S$, где $S\subset\partial\Omega_k$ – часть границ $\partial\Omega_k$ областей Ω_k, $k=1,2$, с положительной мерой: $\mathrm{mes}S>0$, то в силу оценки [1] имеем

$$\|z_k^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})}\leq\bar C_k^2\Big[\|\nabla z_k^{(n)}\|^2+\sum_{x\in\gamma_S}\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2\Big],\quad k=1,2, \tag{2.23}$$

где $\bar C_k=Const>0$, $k=1,2$.

Поэтому из (2.22) получим оценку

$$\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\bar\omega_2}a_{1h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(x)\big(z_{1\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big\}+$$
$$+\Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\bar\omega_2}a_{1h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar x_1}^{(n)}\big)^2h_1\hbar_2+\sum_{\bar\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(x)\big(z_{2\bar x_2}^{(n)}\big)^2\hbar_1h_2\Big\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_S}\theta_h(x_2)\big(z_k^{(n)}(x)\big)^2h_2\geq\bar C_7\sum_{k=1}^{2}\|z_k^{(n)}\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})}=\bar C_7\|z_k^{(n)}\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}, \tag{2.24}$$

где $\bar C_7=\min\{\nu,\theta_0\}\min\{(\bar C_1)^{-2},(\bar C_2)^{-2}\}$.

Теперь на основании оценок (2.20), (2.24) из (2.12) получим

$$\bar C_7\|z^{(n)}\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\leq\bar C_3\bar C_4\|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}\|z^{(n)}\|_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\big[\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}+\|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\big].$$

Откуда имеем оценку

$$\|z^{(n)}\|_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\leq\bar C_8\|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}\big[\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}+\|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\big], \tag{2.25}$$

где $\bar C_8=(\bar C_7)^{-1}\bar C_3\bar C_4$.

Из оценки (2.25) получим

$$\|z_1^{(n)}\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\left[\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}+\|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right], \quad (2.26)$$

$n=1,2,....$

Далее на основе оценки (2.26) установим

$$\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\times$$
$$\times\left[\left(\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right)+\|z_2^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right],\quad n=1,2,\ldots. \quad (2.27)$$

откуда имеем

$$\left(1-2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\right)\left(\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right)\le$$
$$\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\cdot\|z_2^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})},\qquad n=1,2,..., \quad (2.28)$$

т. е.

$$\left(1-2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\right)\|z^{(n)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\|z_2^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}. \quad (2.29)$$

Следовательно, при

$$4\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}<1 \quad (2.30)$$

найдем

$$\|z^{(n)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\le q^2\|z_2^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})},\qquad n=1,2,..., \quad (2.31)$$

где

$$q^2=\frac{2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}{1-2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}<1. \quad (2.32)$$

С другой стороны, в силу оценки (2.26) имеем также цепочку неравенств:

$$\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\times$$
$$\times\left[\left(\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right)+\left(\|z_1^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(1)})}+\|z_2^{(n-1)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}\right)\right], \quad (2.33)$$

$n=1,2,...$, откуда найдем

$$\left(1-2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\right)\|z^{(n)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\le 2\bar C_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}\|z^{(n-1)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}, \quad (2.34)$$

$n=2,3,\ldots.$

Следовательно, при выполнении (2.30) наряду с (2.31) имеем:

$$\|z^{(n)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\le q^2\|z^{(n-1)}(x)\|^2_{V(\bar\omega^{(1,2)})},\qquad n=2,3,\ldots, \quad (2.35)$$

где величина q определена в (2.32).

Таким образом, имеем две цепочки неравенств (2.25) и (2.35) для последовательности $\{z^n\}_{n=1}^\infty$. Из цепочки неравенств (2.31) при $n=1$ имеем

$$\|z^{(1)}(x)\|_{V(\bar\omega^{(1,2)})}\le q\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar\omega^{(2)})}. \quad (2.36)$$

Полагая теперь в (2.35) последовательно $n = 2, 3, ...$, с учетом (2.36) получим следующую цепочку соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\|z^{(2)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q\|z^{(1)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q^2\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})},\\
&\|z^{(3)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q\|z^{(2)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q^3\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\|z^{(m)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q^m\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Таким образом, если выполнено условие (2.30), то справедлива оценка

$$
\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \left(\|z_1^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})} + \|z_2^{(n)}(x)\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}\right)^{1/2} \le q^n\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}, \tag{2.38}
$$

где

$$
0 < q = \left(\frac{2\bar{C}_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}{1 - 2\bar{C}_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}\right)^{1/2} < 1, \tag{2.39}
$$

а величина $z^{(n)}(x)$ определена соотношением (2.10).

Таким образом $\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \to 0$ при $n \to 0$, если выполнено неравенство (2.30), т. е. доказана сходимость итерационного процесса (2.1)–(2.6) в сеточной норме $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}$.

В силу эквивалентности норм $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}$, $\|\cdot\|_{*h} = \|\cdot\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}$, где (см. [1]):

$$
\|z^{(n)}(x)\|^2_{*h} = \|z^{(n)}(x)\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2}\|\nabla z^{(n)}(x)\|^2 + \|[z^{(n)}(x)]\|^2_{L_2(\gamma_S)}, \tag{2.40}
$$

где $[z^{(n)}(x)] = z_2^{(n)}(x) - z_1^{(n)}(x)$ – скачок функции $z^{(n)}(x)$ на γ_S; итерационный процесс (2.1)–(2.6) сходится и в сеточной норме (2.40). Процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$ при условии достаточной малости величины нормы $\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}$, точнее, если выполнено условие (2.30).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.1 *Пусть выполнено условие*

$$
4\bar{C}_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)} < 1,
$$

тогда итерационный процесс (2.1)–(2.6) *сходится в сеточных нормах* $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}$, $\|\cdot\|_{*h} = \|\cdot\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}$ *к единственному решению сеточной задачи* (1.1)–(1.6) *при любом начальном приближении* $y_2^{(0)}(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)};\gamma^2)$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$
\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le q^n\|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}, \quad 0 < q = \left(\frac{2\bar{C}_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}{1 - 2\bar{C}_8^2\|\theta_h(x_2)\|^2_{L_\infty(\gamma_S)}}\right)^{1/2} < 1.
$$

Список литературы

1. Ф. В. Лубышев, "О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52**:8 (2012), 1378–1399.

2. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Эдиториал УРСС, М., 2003, 784 с.

3. А. А. Самарский, В. Б. Андреев, *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976, 352 с.

4. В. С. Зарубин, *Инженерные методы решения задач теплопроводности*, Энергоатомиздат, М., 1983, 328 с.

5. Э. М. Карташов, *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985, 480 с.

6. В. А. Цурко, "О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением", *Дифференциальные уравнения*, **36**:7 (2000), 986–992.

7. В. А. Цурко, "Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями", *Дифференциальные уравнения*, **41**:2 (2005), 274–280.

8. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987, 296 с.

9. Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

10. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988, 304 с.

11. Ф. Е. Браудер, "Нелинейные эллиптические граничные задачи", *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963.

Поступила 23.06.2019

MSC2010 65N06

On an iterative process for the grid conjugation problem with iterations on the boundary of the solution discontinuity

© **F. V. Lubyshev**[1], **M. E. Fairuzov**[2]

Abstract. An iterative process for the grid problem of conjugation with iterations on the boundary of the discontinuity of the solution is considered. Similar grid problem arises in difference approximation of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions. The study of iterative processes for the states of such problems is of independent interest for theory and practice. The paper shows that the numerical solution of boundary problems of this type can be efficiently implemented using iterations on the inner boundary of the grid solution discontinuity in combination with other iterative methods for nonlinearities separately in each of the grid subregions. It can be noted that problems for states of controlled processes described by equations of mathematical physics with discontinuous coefficients and solutions arise in mathematical modeling and optimization of heat transfer, diffusion, filtration, elasticity theory, etc. The proposed iterative process reduces the solution of the initial grid boundary problem for a state with a discontinuous solution to a solution of two special boundary problems in two grid subdomains at every fixed iteration. The convergence of the iteration process in the Sobolev grid norms to the unique solution of the grid problem for each initial approximation is proved.

Key Words: iterative method, boundary value problem, elliptic equation, discontinuous solution, difference approximation, summation identity, grid function

References

1. F. V. Lubyshev, "Finite difference approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions", *Computational mathematics and mathematical physics*, **52**:8 (2012), 1094–1114.

2. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *[Computational heat transfer]*, Editorial URSS, Moscow, 2003 (In Russ.), 784 p.

3. A. A. Samarskij, V. B. Andreev, *[Difference methods for elliptic equations]*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 352 p.

4. V. S. Zarubin, *[Engineering methods for solving heat conduction problems]*, Energoatomizdat, Moscow, 1983 (In Russ.), 328 p.

5. E. M. Kartashov, *[Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]*, Vysshaya shkola, Moscow, 1985 (In Russ.), 480 p.

6. V. A. Tsurko, "The accuracy of finite-difference schemes for parabolic equations with a discontinuous solution", *Differential Equations*, **36**:7 (2000), 1094–1101.

[1]**Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Mahmut E. Fairuzov**, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

7. V. A. Tsurko, “Finite-difference methods for convection-diffusion problems with discontinuous coefficients and solutions”, *Differential Equations*, **41**:2 (2005), 290–296.

8. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *[Difference schemes for differential equations with generalized solutions]*, Vysshaya shkola, Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.

9. H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*, Akademie Verlag, Berlin, 1974, 281 p.

10. A. Kufner, S. Fuchik, *Nonlinear differential equations*, Elsevier, Prague, 1980, 359 p.

11. F. E.Brauder, “Nonlinear elliptic boundary value problems”, *Nonlinear elliptic boundary value problems. Materialy k sovmestnomu sovetsko-amerikanskomu simpoziumu po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi*, Publishing House of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR, Novosibirsk, 1963 (In Russ.).

Submitted 23.06.2019