DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.215-221

УДК 519.17

Конструктивная теорема существования, ассоциированная с локальными преобразованиями графов для задачи о независимом множестве

© Д. В. Сироткин[1], Д. С. Малышев[2]

Аннотация. Задача о независимом множестве для заданного графа состоит в том, чтобы найти размер наибольшего множества его попарно несмежных вершин. Известны многочисленные случаи NP-трудности и случаи полиномиальной разрешимости этой задачи. Для установления вычислительного статуса задачи о независимом множестве в рассматриваемом классе графов часто используются локальные преобразования графов. В данной работе рассматривается некоторый класс замен подграфов в графах, причем замены из этого класса изменяют число независимости контролируемым образом. Каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном — совокупностью подмножеств множества. Очевидно, что совокупность должна быть градуируемой. Показывается, что заменяющий подграф существует для любого градуируемого шаблона.

Ключевые слова: задача о независимом множестве, локальное преобразование, граф с заданными свойствами

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. непомеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для графа G и подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $G \setminus V'$ обозначается результат удаления всех элементов V' из G. *Независимым множеством* графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. Независимое множество графа G называется *наибольшим*, если оно имеет наибольшее количество вершин, а его размер называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* для заданного графа состоит в вычислении его числа независимости. Данная задача является классической NP-трудной задачей на графах [1].

Отображение $c : V(G) \longrightarrow \overline{1,k}$ называется вершинной *k-раскраской* графа G, если для любых смежных его вершин v и u выполнено неравенство $c(v) \neq c(u)$. Если граф имеет вершинную k-раскраску, то он называется *вершинно k-раскрашиваемым. Задача о вершинной k-раскраске* для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, является ли он вершинно k-раскрашиваемым. Это тоже классическая NP-полная задача на графах [1].

В [2] рассматривался достаточно общий класс локальных преобразований графов, названных *схемами замен*, при применении которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не происходит, если допустить

[1]**Сироткин Дмитрий Валерьевич**, стажер-исследователь, лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2682-9867, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

[2]**Малышев Дмитрий Сергеевич**, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), профессор, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «ННГУ им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7529-8233, dsmalyshev@rambler.ru

изменение числа независимости на некоторую константу. Мы рассматриваем некоторый подкласс класса схем замен, который будет определен далее.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Пусть граф G содержит порожденный подграф G_1 с G_1-отделяющим множеством A, G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$. *Замена G_1 на G_2 в графе G* состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются *α-подобными относительно* подмножеств $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если существует такая константа c, что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$. Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются α-подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$, где $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$ — семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(H \setminus X) < \alpha(H \setminus Y)$. В работе [2] было доказано следующее утверждение.

Лемма 1.1 *Пусть графы G_1 и G_2 являются α-подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, причем A является G_1-отделяющим в графе G. Тогда, если граф G^*_α — результат замены G_1 на G_2 в графе G, то*

$$\alpha(G^*_\alpha) = \alpha(G) + \alpha(G_2) - \alpha(G_1).$$

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются *(χ, k)-подобными относительно* $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если для любых вершинных k-раскрасок c_1 и c_2, соответственно, графов G_1 и G_2 существуют вершинные k-раскраски c'' и c', соответственно, графов G_2 и G_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$. Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение (см. также работу [3]).

Лемма 1.2 *Пусть графы G_1 и G_2 являются (χ, k)-подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, причем A является G_1-отделяющим в графе G. Тогда, если граф $G^*_{(\chi,k)}$ — результат замены G_1 на G_2 в графе G, то граф G является вершинно k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $G^*_{(\chi,k)}$.*

Для заданных графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений A на не более чем k непустых частей, каждое из которых не продолжается до вершинной k-раскраски G. Отметим, что если некоторое разбиение A не задает вершинную k-раскраску данного подмножества, то оно заведомо не продолжается до вершинной k-раскраски G. Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются (χ, k)-подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_2, A)$.

Интерес к схемам замен (со свойствами α-подобия и (χ, k)-подобия) обусловлен потенциальной возможностью их применения для редукции графов, что может быть полезным при решении задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске в некоторых классах графов [2],[4–11]. Применительно к нашим заменам также интересны следующие задачи реализации и оптимизации. *Задача реализации для задачи о независимом множестве* для заданного множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathcal{M}$. *Задача оптимизации для задачи о независимом множестве* для заданных графа G и $A \subseteq V(G)$ состоит в поиске такого графа H с минимальным количеством вершин, что $A \subseteq V(H)$ и $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathfrak{M}_\alpha(H, A)$.

В работе [3] рассматривались и решались задачи реализации и оптимизации применительно к задаче о вершинной k-раскраске. Именно, там было показано, что для любых

n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. Задача оптимизации была поставлена следующим образом. Для заданных натуральных чисел $m, n, k \geq 3$ была определена функция шенноновского типа $f_\chi(m, n, k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1, n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m, n, k) = \max\limits_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где

$$g_\chi(\varrho) = \min_{\{H\colon\ \overline{1,n} \subseteq V(H),\ \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H, \overline{1,n}) = \varrho\}} |V(H)|.$$

В работе [3] было показано, что $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

Применительно к задаче о независимом множестве задача реализации имеет положительное решение далеко не для любого $\mathcal{M}$. Это так, например, для $\mathcal{M} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$. Действительно, соотношения

$$\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\}) + 1, \alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G) - 1, \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G)$$

одновременно не совместны. Понятно, что необходимым условием положительного ответа в задаче реализации является *градуируемость* множества $\mathcal{M}$, т. е. независимость количества элементов множества $\mathcal{M}$ на путях (по отношению включения) между любыми двумя подмножествами множества A. Действительно, если $\mathcal{M}$ не градуируемо, то существуют такие числа $k \neq l$ и такие подмножества

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots V_k \subseteq A \text{ и } U_1 \subset U_2 \subset \ldots U_l \subseteq A,$$

что

$$\alpha(G \setminus V_i) = \alpha(G \setminus V_{i+1}) + 1, 1 \leq i \leq k-1 \text{ и } \alpha(G \setminus U_j) = \alpha(G \setminus U_{j+1}) + 1, 1 \leq j \leq l-1,$$

а графы $G \setminus V_k$ и $G \setminus U_l$ изоморфны.

Оказывается, что условие градуируемости является и достаточным. Это утверждение является основным результатом данной работы. Другими словами, для любого множества A и градуируемого множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ существует такой граф $G_\mathcal{M}$ с $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$ вершинами, что $A \subseteq V(G_\mathcal{M})$ и $\mathfrak{M}_\alpha(G_\mathcal{M}, A) = \mathcal{M}$.

2. Теорема существования графов с рассматриваемыми свойствами

Пусть A — некоторое множество, а подмножество $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ градуируемо. Переобозначим $\overline{X} = A \backslash X$ для $X \subseteq A$, $\overline{\mathcal{M}} = 2^A \backslash \mathcal{M}$. Очевидно, что $\overline{\mathcal{M}}$ тоже градуируемо. Для произвольного градуируемого подмножества $\mathcal{M}' \subseteq 2^A$ существует *функция ранга* $r_{\mathcal{M}'}:\ 2^A \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, определяемая для произвольного $X \subseteq A$ как длина неуплотняемой по отношению включения цепи, которая целиком состоит из элементов множества $\mathcal{M}'$, содержащихся в X. Поскольку $\mathcal{M}'$ градуируемо, то эта длина не зависит от выбора неуплотняемой цепи. Вместе с тем, $X \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $r_\mathcal{M}(X) = r_\mathcal{M}(X \setminus \{x\}) + 1$ для любого $x \in X$.

Определим граф $G_\mathcal{M}$ следующим образом.

1. Рассмотрим пустой граф на множестве вершин A.

2. Для каждого элемента $X \in \overline{\mathcal{M}}$ (кроме пустого множества) добавим новую вершину, соответствующую X, и соединим ее со всеми вершинами множества A, которые соответствуют элементам множества X.

3. Разобьем добавленные на предыдущем шаге вершины на классы эквивалентности по отношению равенства функции ранга на соответствующих им элементах множества $\overline{\mathcal{M}}$ и для каждого класса эквивалентности попарно соединим все его вершины.

Очевидно, что граф $G_{\mathcal{M}}$ имеет ровно $2^{|A|}+|A|-|\mathcal{M}|$ вершин. Для графа $G_{\mathcal{M}}$ и подмножества $X \subseteq A$ через $\alpha_X(G_{\mathcal{M}})$ обозначим наибольший из размеров независимых множеств этого графа, пересечение которых с множеством вершин A в точности равно X.

Лемма 2.1 *Для любого $X \subseteq A$ справедливо равенство*

$$\alpha_X(G_{\mathcal{M}}) = |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X}).$$

Доказательство. Независимое подмножество вершин X может быть пополнено до большего независимого только вершинами, которые соответствуют таким $Y \in \overline{\mathcal{M}}$, что $Y \cap X = \emptyset$. Но тогда $\alpha_X(G_{\mathcal{M}})$ равно $|X|+r_X$, где r_X — наибольшее количество классов эквивалентности (по отношению равенства функции ранга), целиком лежащих во множестве $\overline{X}$. Понятно, что $r_X = r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X})$. Поэтому $\alpha_X(G_{\mathcal{M}}) = |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X})$.
Доказательство закончено.

Лемма 2.2 *Для любого $X \subseteq A$ справедливо равенство*

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = |A| - |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(X).$$

Доказательство. Очевидно, что выполнено соотношение

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = \max_{Y \subseteq A \setminus X}(\alpha_Y(G_{\mathcal{M}}))$$

. Согласно данному соотношению и Лемме 2.1, запишем:

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = \max_{Y \subseteq A \setminus X}(|Y| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Y)).$$

Функция $f(Z) = |Z| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Z)$ является монотонно возрастающей (относительно отношения включения) на 2^A. Действительно, если $Z \subseteq A$ и $z \in A \setminus Z$, то

$$r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Z) \leq r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus (Z \cup \{z\})) + 1, |Z \cup \{z\}| = |Z| + 1 \text{ и } f(Z \cup \{z\}) \geq f(Z).$$

Поэтому максимум функции $|Y|+r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Y)$ на $2^{A\setminus X}$ достигается в точке $Y = A \setminus X$. Таким образом,

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = |A| - |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(X).$$

Доказательство закончено.

Лемма 2.3 *Справедливо соотношение $\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$.*

Доказательство. Для доказательства справедливости данной леммы достаточно показать, что множество $\overline{\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)} = 2^A \setminus \mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)$ совпадает с $\overline{\mathcal{M}}$. Множество $\overline{\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)}$ состоит в точности из таких подмножеств X множества A, что существует $Y \subset X$, для которого $\alpha(G \setminus X) = \alpha(G \setminus Y)$. Пусть $Z \subseteq A$ и $z \in Z$. Если $Z \in \mathcal{M}$, то $r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z \setminus \{z\}) = r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z)$, а если $Z \in \overline{\mathcal{M}}$, то $r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z \setminus \{z\}) = r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z) - 1$. Таким образом, по Лемме 2.2 равенство $\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus Z) = \alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus (Z \cup \{z\}))$ имеет место тогда и только тогда, когда $Z \in \overline{\mathcal{M}}$. Значит, $\overline{\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)} = \overline{\mathcal{M}}$.
Доказательство закончено.

Из леммы 2.3 следует справедливость следующего утверждения, которое является основным в данной работе.

Теорема 2.1 *Для любых множества A и градуируемого множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ существует граф $G_{\mathcal{M}}$ с $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$ вершинами такой, что $A \subseteq V(G_{\mathcal{M}})$ и что $\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$.*

Благодарности.
Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-31-20001-мол-а-вед).

Список литературы

1. М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, 1982, 416 с.

2. В. Е. Алексеев, В. В. Лозин, “О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **5**:1 (1998), 3–19.

3. Д. В. Сироткин., “Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k-раскраске”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:2 (2017), 98–104.

4. Д. В. Сироткин., “О сложности построения 3-раскраски с короткими гранями”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **20**:2 (2018), 199–205.

5. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “A method of graph reduction and its applications”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:4 (2018), 249–258.

6. D. S. Malyshev, D. V. Sirotkin, “Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **11**:3 (2017), 400–414.

7. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25**:4 (2018), 759–769.

8. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, “Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3**:1 (2008), 1–5.

9. B. Lévêque, D. de Werra, “Graph transformations preserving the stability number”, *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 3–8.

10. V. V. Lozin, “Stability preserving transformations of graphs”, *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.

11. D. S. Malyshev, “Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:4 (2013), 537–548.

Поступила 30.04.2019

MSC2010 05C69

A constructive existence theorem related to local transformations of graphs for the independent set problem

© **D. V. Sirotkin**[1], **D. S. Malyshev**[2]

Abstract. For a given graph, the independent set problem is to find the size of a maximum set of pairwise non-adjacent its vertices. There are numerous cases of NP-hardness and polynomial-time solvability of this problem. To determine a computational status of the independent set problem, local transformations of graphs are often used. The paper considers some class of replacements of subgraphs in graphs that change the independence number in a controllable way. Every such local transform of a graph is determined by some pattern which is a subset of the power set. It is obvious that this pattern must be gradable. The paper shows that replacing subgraph exists for any gradable pattern.

Key Words: independent set problem, local transformation, graph with given properties

References

1. M. Garey, D. Johnson, *[Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness]*, Mir Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 416 p.

2. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, “[On local transformations of graphs that preserve the independence number]”, *Diskretnyy Analiz i Issledovaniye Operatsiy*, **5**:1 (1998), 3–19 (In Russ).

3. D. V. Sirotkin, “[Theorems of existence and sufficiency connected with local transformations of graphs for the k-colourability problem]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:2 (2017), 98–104 (In Russ).

4. D. V. Sirotkin, “[On the complexity for constructing a 3-colouring for planar graphs with short facets]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:2 (2018), 199–205 (in Russ).

[1]**Dmitry V. Sirotkin**, Research Intern, Laboratory of Algorithms and Technologies for Network Analysis, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2682-9867, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

[2]**Dmitry S. Malyshev**, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7529-8233, dsmalyshev@rambler.ru

5. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, "A method of graph reduction and its applications", *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:4 (2018), 249–258.

6. D. S. Malyshev, D. V. Sirotkin, "Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **11**:3 (2017), 400–414.

7. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, "On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25**:4 (2018), 759–769.

8. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, "Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3**:1 (2008), 1–5.

9. B. Lévêque, D. de Werra, "Graph transformations preserving the stability number", *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 3–8.

10. V. V. Lozin, "Stability preserving transformations of graphs", *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.

11. D. S. Malyshev, "Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:4 (2013), 537–548.

Submitted 30.04.2019