DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.175-186

УДК 517.9

Обзор работ В. Н. Щенникова по исследованию конвергенции нелинейных почти периодических систем методом сравнения

© А. А. Косов[1], А. В. Щенников[2], Е. В. Щенникова[3], Р. В. Жалнин[4], П. А. Шаманаев[5]

Аннотация. В статье дается обзор исследований В. Н. Щенникова по проблемам почти периодической конвергенции нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи о конвергенции, устанавливаемой по линейному или однородному приближению. Приводятся условия конвергенции сложных систем, получаемые построением вектор-функций Ляпунова и применением метода сравнения. Следует отметить, что в ходе доказательства строятся конструктивные оценки на величины малых параметров и функций взаимосвязи, а также уточняются размеры области, в которой располагается предельный почти периодический режим. В качестве приложения рассмотрена задача о конвергенции в электрической цепи, моделируемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром. В заключении обсуждаются возможные приложения и нерешенные задачи для новых направлений исследований, над которыми в последние годы работал В. Н. Щенников.
Ключевые слова: конвергенция, почти периодические решения, вектор-функция Ляпунова, нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Введение

26 декабря 2018 года после тяжелой болезни ушел из жизни профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Национального исследовательского Мордовского государственного университета, доктор физико-математических наук Владимир Николаевич Щенников. Владимир Николаевич начинал научно-исследовательскую работу в конце 1960-х г. в аспирантуре Ленинградского государственного университета под руководством профессора (позднее членакорреспондента АН СССР) Владимира Ивановича Зубова, организатора и первого декана

[1]**Косов Александр Аркадьевич**, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

[2]**Щенников Алексей Владимирович**, соискатель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4734-1553, shennikov.aleksey@yandex.ru

[3]**Щенникова Елена Владимировна**, профессор кафедры фундаментальной информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: http: //orcid.org/0000-0001-5989-3550, schennikova8000@yandex.ru

[4]**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

[5]**Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

факультета прикладной математики-процессов управления ЛГУ. В 1962 г. В. И. Зубов опубликовал фундаментальную монографию «Колебания в нелинейных и управляемых системах» [1], удостоенную впоследствии Государственной премии СССР, в которой был получен ряд принципиальных результатов по теории управления, в том числе установлены необходимые и достаточные условия почти периодической конвергенции в нелинейных системах. в данной работе также была сформулирована гипотеза о конвергенции асимптотически устойчивых однородных систем при произвольных почти периодических возмущающих силах и поставлена задача доказать или опровергнуть эту гипотезу. Именно этой задачей и было предложено заняться аспиранту В. Н. Щенникову. Задача, предложенная В. И. Зубовым, оказалась весьма трудной, и ее полное решение до настоящего времени найти никому не удалось. В ходе исследований В. Н. Щенников выделил класс систем, для которого гипотеза В. И. Зубова справедлива. Доказательства проводились вторым методом Ляпунова с использованием скалярных функций Ляпунова. Эти результаты составили основу кандидатской диссертации В. Н. Щенникова «Некоторые вопросы теории колебаний в нелинейных и управляемых системах», успешно защищенной в 1972 г. в диссертационном совете при ЛГУ.

В 1962 г. В. М. Матросов открыл новое научное направление [2], предложив использовать для анализа устойчивости не одну, а сразу несколько функций ляпуновского типа или, по устоявшейся впоследствии терминологии, введенной Р. Беллманом, вектор-функцию Ляпунова. Переход к вектор-функциям Ляпунова существенно расширил возможности исследования нелинейных систем, что вызвало быстрый рост интереса к новому методу в ведущих научных центрах по всему миру (США, Франция, Япония, Италия, Индия и т. д.), быстрое развитие метода и распространение его на другие задачи и свойства, отличные от устойчивости. Метод оформился как «метод сравнения в математической теории систем» [3], в котором изучение интересующего динамического свойства в исходной системе сводится к выявлению соответствующего свойства во вспомогательной (как правило, существенно более простой) системе, называемой системой сравнения. Касательно свойства конвергенции в рамках данного подхода В. М. Матросовым была доказана [4] теорема сравнения для случая периодической конвергенции, когда правые части исходной системы и предельный режим являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом. В обзоре [5] В. М. Матросов отмечает, что недостаточно исследованы методом векторных функций Ляпунова динамические свойства, более сложные, чем устойчивость. Например, проблема анализа конвергенции представляет «сплошное белое поле, покрытое лишь редкими точками отдельных разобранных примеров» [5]. Тем самым фактически была поставлена задача распространения метода сравнения для анализа конвергенции почти периодических систем. Именно эта задача была решена В. Н. Щенниковым в 1983 г., когда им была доказана теорема сравнения о почти периодической конвергенции в системе общего вида. Далее для сложных систем (по терминологии В. М. Матросова) или крупномасштабных (large-scale) систем (по терминологии Д. Д. Шильяка) достаточные условия конвергенции были конкретизированы, их удалось переформулировать в терминах локальных подсистем и оценок на взаимосвязи. Эти результаты составили ядро докторской диссертации В. Н. Щенникова «Устойчивоподобные свойства решений нелинейных управляемых систем», успешно защищенной в диссертационном совете при ЛГУ в 1990 г. Владимир Николаевич продолжал систематически обращаться к задачам, связанным с анализом конвергенции и после защиты докторской. Эти вопросы всегда вызывали его интерес и внимание. Основная задача данной статьи – дать обзор полного цикла его работ [6–14], касающихся свойства конвергенции. Ниже приводятся формулировки основных результатов и отмечаются способы проведения доказательств (сами доказательства, естественно, не приводятся). Мы старались в той мере, в которой это было возможно, сохранить исходный авторский стиль Владимира Николаевича (исправлены только замеченные опечатки и неточности), все формулировки эквивалентны исходным, даже если приводятся в других обозначениях. В заключительном разделе статьи мы приводим ряд нерешенных задач, которые интересовали Владимира Николаевича, их он затрагивал в своих публикациях, выступлениях на семинарах. Их мы обсуждали с ним в личных беседах или по переписке при подготовке заявок на проекты РФФИ и программы «Университеты России». Надеемся, что эти задачи будут восприняты новыми поколениями исследователей, выбравших в качестве поля деятельности нелинейные дифференциальные уравнения и теорию управления.

2. Основные определения

Определение 2.1 ([1, с.23]) *Вещественная непрерывная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $l(\varepsilon) > 0$, что в любом промежутке $[\alpha, \alpha + l(\varepsilon)]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, существует по крайней мере одно число $\tau(\varepsilon)$ (оно называется ε-почти периодом функции $f(t)$) такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ будет $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$.*

Это определение означает, что при сдвиге любой точки графика $(t, f(t))$ на величину ε-почти периода по горизонтали мы получим точку $(t+\tau, f(t))$, которая по вертикали будет отстоять от точки $(t+\tau, f(t+\tau))$, лежащей на графике, не более чем на ε.

Вектор-функция называется почти периодической, если этим свойством обладает каждая ее компонента.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

правые части которой заданы при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, вещественны и непрерывны. По первому аргументу t вектор-функция $F(t, x)$ является почти периодической при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$. По второму аргументу x в каждой конечной области $||x|| < r < +\infty$ выполняется условие Липшица

$$||F(t, x^*) - F(t, x^{**})|| \le L(r)||x^* - x^{**}||, \quad \forall x^*,\, x^{**} : ||x^*|| < r,\, ||x^{**}|| < r, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

с постоянной $L(r) > 0$, не зависящей от времени.

Определение 2.2 ([1, с.337]) *Будем говорить, что система* (2.1) *обладает свойством конвергенции, если она имеет единственное почти периодическое решение $\Phi(t)$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что $||x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)|| < \varepsilon$ при $t \ge t_0$ для $||x_0 - \Phi(t_0)|| < \delta$ и, кроме того, $||x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)|| \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно по отношению к $t_0 \in \mathbb{R}$ во всякой конечной области $||x_0|| < r$. Здесь через $x(t, x_0, t_0)$ обозначена интегральная кривая системы* (2.1)*, проходящая через точку (x_0, t_0).*

При конвергенции система (2.1) имеет почти периодическое решение $\Phi(t)$, которое является глобально равномерно асимптотически устойчивым.

Определение 2.3 *Если система* (2.1) *имеет равномерно асимптотически устойчивое почти периодическое решение $\Phi(t)$ с малой областью притяжения $||x|| < d < +\infty$, то говорят, что система обладает свойством конвергенции в малом.*

Заметим, что конвергенция в малом обычно имеет место тогда, когда в системе присутствуют возмущающие силы, пропорциональные малому параметру $a > 0$, при этом размер области, в которой располагается почти периодическое решение также зависит от параметра a, $d(a) \to +0$ при $a \to +0$.

Определение 2.4 ([1, с.342]) *Функция $V(t, x, y, z)$ – заданная при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, вещественная и непрерывная – называется определенно положительной в области $||z|| \le \rho$, если для каждого $r > 0$ можно указать функцию $V_r(z) > 0$ при $z \ne 0$, вещественную непрерывную такую, что $V(t, x, y, z) \ge V_r(z)$ при $||z|| < \rho$, $||x|| < r$, $||y|| < r$, $t \in \mathbb{R}$.*

Определение 2.5 ([1, с.342]) *Функция $V(t, x, y, z)$ – заданная при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, вещественная и непрерывная – допускает бесконечно малый высший предел в области $||z|| \le \rho$, если по $r > 0$ можно указать функцию $U_r(z)$, вещественную непрерывную и заданную при $||z|| \le \rho$, такую, что $U_r(0) = 0$, $U_r(z) > 0$ при $z \ne 0$ и $|V(t, x, y, z)| \le U_r(z)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, $||x|| \le r$, $||y|| \le r$, $||z|| \le \rho$.*

3. Конвергенция однородных систем (гипотеза В. И. Зубова)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) + q_s(t), \quad s = \overline{1, n}, \tag{3.1}$$

где $X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n)$ — однородные формы степени $\mu = 2k + 1$ от величин $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными постоянными коэффициентами; $q_s(t)$ — почти периодические функции.

Гипотеза В. И. Зубова ([1, с.355]). *Предположим, что нулевое решение системы $\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}$, $s = \overline{1, n}$ асимптотически устойчиво. Тогда система* (3.1) *обладает свойством конвергенции при любых почти периодических $q_s(t)$.*

Доказать или опровергнуть это утверждение В. И. Зубов предложил читателям. Поскольку доказательство гипотезы В. И. Зубова является весьма трудной задачей, то конструктивный подход здесь заключается в том, чтобы выделить классы систем, для которых гипотеза справедлива. Именно такой подход был применен в работе [6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = g_s x^\mu + \nu X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) + R_s(t), \quad s = \overline{1, n}, \tag{3.2}$$

где g_s — вещественные постоянные; $X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n)$ — однородные формы степени $\mu = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3 \ldots$; ν — вещественный параметр.

Теорема 3.1 [6] *Если все $g_s < 0$ и значение параметра $\nu \ge 0$ достаточно мало, то система* (3.2) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство проводится вторым методом Ляпунова с использованием функций $V_1 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2$ и $V = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{n} z_s^2$, а также критерия конвергенции Зубова ([1], теорема 81). Необходимо отметить, что в статье [11] этот же результат был установлен другим методом, с использованием формулы В. М. Алексеева.

Перейдем к рассмотрению системы, для которой (3.2) является системой однородного приближения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{l=\mu+1}^{\infty} X_s^{(l)}(x_1, \ldots, x_n) + aq_s(t), \quad s = \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Здесь предполагаются выполненными условия:

1) Функции $X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n)$ являются однородными формами степени $\mu = 2k+1$ от величин $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами такими, что нулевое решение системы $\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n)$ асимптотически устойчиво;

2) Функции $X_s^{(l)}$, $l \geq \mu + 1$ являются однородными формами степени l относительно $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными почти периодическими по t коэффициентами;

3) Функции $q_s(t)$ являются вещественными почти периодическими;

4) Ряд, стоящий в правой части системы (3.3), сходится при $||x|| < \delta$ равномерно по отношению к $t \in \mathbb{R}$.

Продолжая гипотезу, В. И. Зубов утверждает ([1, с.360]), что при выполнении условий 1–4 система (3.3) обладает свойством конвергенции в малом при любом достаточно малом значении параметра $a \geq 0$. При этом равномерно асимптотически устойчивое почти периодическое решение располагается в малой области $||x|| < \delta(a)$.

Доказательство этого утверждения пока не найдено, поэтому в [6] был выделен класс систем, для которого гипотеза В. И. Зубова справедлива.

Теорема 3.2 [6] *Если все $g_s < 0$, $\nu \geq 0$ достаточно мало и выполнены условия* 2–4, *то система*

$$\dot{x}_s = g_s x_s^{\mu} + \nu X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{l=\mu+1}^{\infty} X_s^{(l)}(x_1, \ldots, x_n) + aR_s(t), \quad s = \overline{1, n},$$

обладает свойством конвергенции в малом при всех достаточно малых значениях параметра $a > 0$. При этом почти периодическое решение расположено в области $||x|| < \delta(a)$, $\delta(a) \to +0$ при $a \to +0$.

4. Конвергенция в малом, устанавливаемая по линейному приближению

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x) + aR(t). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 [7] *Пусть выполнены условия:*

1) *Правые части* (4.1) *являются почти периодическими функциями относительно аргумента $t \in \mathbb{R}$;*

2) *Компоненты вектор-функции $F(t, x)$ являются аналитическими функциями относительно x, разложения которых начинаются с членов не ниже второй степени;*

3) *Существует симметрическая почти периодическая положительно определенная непрерывно-дифференцируемая матрица $B(t)$ такая, что матрица $C(t) = \dot{B}(t) + A^T(t)B(t) + B(t)A(t)$ является отрицательно определенной, т. е. $\lambda_{\max}(C(t)) \leq -\lambda_0 < 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

Тогда существует $a_0 > 0$ такое, что при всех $0 < a < a_0$ система (4.1) *обладает свойством конвергенции в малом, т. е. имеет в области $||x|| < \rho(a)$ единственное почти периодическое решение, являющееся равномерно асимптотически устойчивым. При этом размер области, в которой имеет место конвергенция, уменьшается при уменьшении малого параметра, т. е. $\rho(a) \to +0$ при $a \to +0$.*

5. Теорема сравнения о конвергенции

Рассмотрим систему (2.1) при предположениях на правые части, сделанных в разделе 2. Введем в оборот следующую вектор-функцию

$$V^{(1)} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ V^{(1)}(t,x) = \mathrm{col}\left(V_1^{(1)}(t,x),\dots,V_m^{(1)}(t,x)\right),$$

все компоненты которой $V_k^{(1)}(t,x)$ являются непрерывно дифференцируемыми при всех $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Пусть для производных в силу системы (2.1)

$$\left.\frac{dV_k^{(1)}}{dt}\right|_{(2.1)} = \frac{\partial V_k^{(1)}}{\partial t} + \left(\mathrm{grad_x} V_k^{(1)}, F(t,x)\right)$$

выполняются неравенства

$$\left.\frac{dV_k^{(1)}}{dt}\right|_{(2.1)} \le W_k^{(1)}\left(t,x,V^{(1)}\right). \tag{5.1}$$

Здесь $W_k^{(1)}\left(t,x,V^{(1)}\right)$– непрерывные по всем аргументам функции, являющиеся квазимонотонными по третьему аргументу $V^{(1)}$.

Используя оценки (5.1) дополним исходную систему (2.1) соответствующим уравнением(5.1), приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned}&\dot{x} = F(t,x),\\ &\dot{y} = W^{(1)}(t,x,y).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Пусть $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ есть два произвольных решения системы (2.1); обозначим через $z = x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$ их разность. Введем в рассмотрение вектор-функцию $V^{(2)} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times$ $\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $V^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right) = \mathrm{col}\left(V_1^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right),\dots,V_l^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right)\right)$, все компоненты которой $V_j^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right)$ являются непрерывно дифференцируемыми при всех $\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Для переменной z справедливо уравнение

$$\dot{z} = F(t,x^{(1)}+z) - F(t,x^{(1)}). \tag{5.3}$$

Пусть для производной вектор-функции $V^{(2)}$ вдоль решений имеют место оценки

$$\left.\frac{dV_j^{(2)}}{dt}\right|_{(2.1)-(5.1)} = \frac{\partial V_j^{(2)}}{\partial t} + \left(\mathrm{grad_{x^{(1)}}} V_j^{(2)}, F\left(t,x^{(1)}\right)\right) + \left(\mathrm{grad_{x^{(2)}}} V_j^{(2)}, F\left(t,x^{(2)}\right)\right) +$$

$$+\left(\mathrm{grad_z} V_j^{(2)}, F\left(t,x^{(1)}+z\right) - F\left(t,x^{(1)}\right)\right) \le W_j^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},V^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z\right)\right). \tag{5.4}$$

Здесь $W_j^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},V^{(2)}\right)$– непрерывные по всем аргументам функции, квазимонотонные по последнему аргументу $V^{(2)}$.

Используя оценку (5.4) и соответствующее уравнение, запишем расширенную систему для разности решений в замкнутой форме

$$\begin{aligned}&\dot{x}^{(1)} = F\left(t,x^{(1)}\right),\\ &\dot{x}^{(2)} = F\left(t,x^{(2)}\right),\\ &\dot{z} = F\left(t,x^{(1)}+z\right) - F\left(t,x^{(1)}\right),\\ &\dot{p} = W^{(2)}\left(t,x^{(1)},x^{(2)},z,p\right).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Введем следующие обозначения:

$$v^{(1)} = \max_{k=\overline{1,n}} V_k^{(1)}(t,x),\ v^{(2)} = \max_{k=\overline{1,l}} V_j^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right),$$

$$||V^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)|| = \left(\sum_{j=1}^{l} V_j^{(2)^2}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)\right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Теорема 5.1 [8] *Пусть для системы* (2.1) *существуют вектор-функции* $V^{(1)}(t,x)$ *и* $V^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)$, *удовлетворяющие условиям:*

1. а) *для производной от вектор-функции* $V^{(1)}$ *в силу систему* (2.1) *справедлива оценка* (5.1)*;*

б) $v^{(1)}(t,x) \to +\infty$ *при* $||x|| \to +\infty$ *равномерно относительно* $t \in \mathbb{R}$*;*

в) $v^{(1)}(t,x)$ *ограничена сверху в каждой замкнутой области* $r_1 \leq ||x|| \leq r$ *равномерно относительно* $t \in \mathbb{R}$*;*

г) *все решения расширенной системы* (5.2) *y-ограничены равномерно относительно* $t \geq t_0$ *и начальных условий* (t_0, x_0, y_0).

2. а) *для производной от вектор-функции* $V^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)$ *вдоль решений справедлива оценка* (5.4)*;*

б) *функция* $v^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)$ *определенно положительна в смысле определения* 4*;*

в) *функция* $||V^{(2)}\left(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z\right)||$ *допускает бесконечно малый высший предел в смысле определения* 5*;*

г) *Решение* $\left(x^{(1)}(t), (x^{(2)}(t), 0, 0\right)$ *расширенной системы* (5.5) *p-асимптотически устойчиво равномерно относительно* $t_0 \in \mathbb{R}$, $||x^{(1)}(0)|| \leq r$, $||x^{(2)}(0)|| \leq r$, $||z_0|| \leq r$, $||p_0|| \leq r$.

Тогда система (2.1) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство теоремы состоит в последовательной проверке выполнения условий критерия конвергенции В. И. Зубова ([1], теорема 81). Вектор-функция $V^{(1)}$ при этом обеспечивает ограниченность решений (2.1), а вектор-функция $V^{(2)}$ обеспечивает сближение решений системы (2.1).

Условия 1.г и 2.г накладываются на расширенные системы, включающие исходную (2.1), поэтому выглядят и являются трудно проверяемыми. Однако при практическом применении теорем сравнения такого рода всегда стремятся получить оценки через одни только компоненты вектор-функции, вне связи с фазовыми переменными. В таком случае второе уравнение системы (5.2) принимает вид

$$\dot{y} = W^{(1)}(t,y), \quad (5.7)$$

а последнее уравнение системы (5.5) записывается следующим образом:

$$\dot{p} = W^{(2)}(t,p), \quad (5.8)$$

Условия 1.г и 2.г теперь существенно упрощаются и формулируются в виде требований к системам сравнения (5.7) и (5.8). От системы (5.7) требуется равномерная ограниченность всех решений, а от системы (5.8) – равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения.

6. Конвергенция сложных систем

Рассмотрим сложную систему

$$\dot{x}_s = A_s x_s + f_{1s}\left(t, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_k\right) + \varepsilon_s f_{2s}\left(t, x_1, \ldots, x_k\right) + \mu_s R_s(t), \quad (6.1)$$

где A_s — постоянная $n_s \times n_s$ матрица; $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор состояния s-той подсистемы; $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^n$, $n = n_1 + \ldots + n_k$ — полный вектор состояния системы (6.1). Вектор-функции $R_s(t)$, f_{1s} и f_{2s} считаем почти периодическими по времени. Правые части системы (6.1) считаются удовлетворяющими условию Липшица по x с постоянной, не зависящей от времени t. Кроме того, предполагаются выполненными условия

$$||f_{1s}\,(t, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_k)\,|| \le \sum_{j=1 (j \ne s)}^{k} a_{sj}||x_j||,$$

$$||f_{2s}\,(t, x_1, \ldots, x_k)\,|| \le \sum_{j=1}^{k} b_{sj}||x_j||^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где $a_{sj} \ge 0$, $b_{sj} \ge 0$ — некоторые постоянные.

Все линейные подсистемы

$$\dot{x}_s = A_s x_s, \quad s - \overline{1, k}, \tag{6.2}$$

предполагаются асимптотически устойчивыми.

Таким образом, сложная система (6.1) представляет собой совокупность устойчивых линейных подсистем (6.2), нагруженных слабыми (ввиду наличия малых параметров ε_s), нелинейностями $\varepsilon_s f_{2s}$, связанных функциями взаимодействия подсистем f_{1s} и подверженных малым почти периодическим возмущающим силам $\mu_s R_s(t)$.

Т е о р е м а 6.1 [9] *Если правые части системы* (6.1) *удовлетворяют сделанным в этом разделе предположениям, то система обладает свойством конвергенции в малом.*

Доказательство по существу представляет конструктивное построение вектор-функций Ляпунова, фигурирующих в теореме 5.1. Здесь необходимо отметить два принципиальных момента.

Во-первых, в доказательстве впервые в отечественной литературе применяется (независимо от работ Д. Д. Шильяка) вектор-функция Ляпунова с компонентами типа «корень квадратный из квадратичной формы» $\rho_s = V_s^{1/2}$ и строится соответствующая система сравнения. Такой подход к построению данной вектор-функции был разработан Д. Шильяком в 1978 г., что позволило существенно улучшить условия, получаемые в рамках ее построения по способу Бейли.

Во-вторых, в ходе доказательства строятся конструктивные оценки на величины малых параметров и функций взаимосвязи, а также уточняются размеры области, в которой располагается предельный почти периодический режим. В приложениях к конкретным сложным системам это может иметь существенное значение, поскольку от величин амплитуд вынужденных колебаний может зависеть работоспособность системы.

В [12] обсуждается применение результатов о конвергентности сложных систем в теории программного регулирования и теории самонастраивающихся систем с эталонной моделью.

В дальнейшем результаты были усилены и распространены на сложные системы с почти периодическими матрицами $A_s(t)$, имеющими отрицательную доминирующую диагональ [13].

7. Конвергенция в одной электротехнической системе

В [14] рассмотрена задача о конвергенции в электрической цепи, моделируемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + (a+1)\dot{x} + ax + cx^{\lambda} = \varepsilon\varphi(t), \tag{7.1}$$

где a и c – положительные вещественные числа; $\varphi(t)$ — непрерывная ω -периодическая функция; λ — нечетное положительное число; $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Теорема 7.1 [14] *Если $c > 0$ и $a > \frac{1}{4}$, то система* (7.1) *обладает свойством конвергенции при любом $\varepsilon > 0$.*

Доказательство основано на переходе к эквивалентной двумерной системе и построении скалярных функций Ляпунова, гарантирующих ограниченность и сближение решений.

8. Возможные приложения и нерешенные задачи для новых направлений исследований

1. Частичная конвергенция. По аналогии с частичной устойчивостью В. Н. Щенников полагал целесообразным развить теорию частичной конвергенции, когда только часть координат выходит на почти периодический предельный режим.

2. Существование квадратичной формы с почти периодической матрицей для экспоненциально устойчивой почти периодической линейной системы. В периодическом случае периодическая матрица квадратичной формы существует (Демиденко Г.В., Матвеева И.И.). В почти периодическом случае вопрос открыт. Здесь имеется прямая связь с теоремой 4.1.

3. Конвергенция в системах с импульсным взаимодействием. Владимира Николаевича особенно интересовал вопрос о передаче сигналов в моделях нейронов.

4. Конвергенция в системах с переключениями

$$\dot{x} = f^{(\sigma(t))}(t, x), \quad \sigma : \mathbb{R} \to S = \{1, 2, \ldots, m\};$$

$\sigma(t)$ — кусочно-постоянная, правосторонне непрерывная функция, множество точек разрыва которой не более чем счетно и не имеет конечных точек сгущения. Для каждого фиксированного $j \in S$ функция $f^j(t, x)$ удовлетворяет условиям раздела 2. Проблема здесь в том, что функция $\sigma(t)$ не почти периодическая в смысле определения 1. Поэтому надо дать новое определение и построить новую теорию конвергенции таких переключаемых систем.

5. Количественные оценки конвергенции в сложных системах. Необходимо разработать алгоритмы и программы построения вектор-функции Ляпунова и получения количественных оценок конвергенции по исходным коэффициентам из правых частей. Эффективно работающие программы такого рода могут быть очень полезными при анализе прикладных задач.

Список литературы

1. В. И. Зубов, *Колебания в нелинейных и управляемых системах*, Судпромгиз, Ленинград, 1962, 631 с.

2. В. М. Матросов, “К теории устойчивости движения”, *Прикладная математика и механика*, **XXVI**:6 (1962), 992–1000.

3. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев, *Метод сравнения в математической теории систем*, Наука, Новосибирск, 1980, 480 с.

4. В. М. Матросов, "Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. IV", *Дифференциальные уравнения*, **5**:12 (1969), 2129–2143.

5. В. М. Матросов, "Метод векторных функций Ляпунова в системах с обратной связью", *Автоматика и телемеханика*, 1972, № 9, 63–75.

6. В. Н. Щенников, "Явление конвергенции одной нелинейной системы", *Дифференциальные уравнения*, **8**:4 (1972), 737–739.

7. В. Н. Щенников, "К теоремам существования почти периодических решений в нелинейных системах дифференциальных уравнений", *Функциональный анализ и вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, МГУ им. Н. П. Огарёва, Саранск, 1976, 158–161.

8. В. Н. Щенников, "Исследование конвергенции в неавтономной дифференциальной системе с помощью вектор-функций Ляпунова", *Дифференциальные уравнения*, **19**:11 (1983), 1902–1907.

9. В. Н. Щенников, "Явление конвергенции сложных систем дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **20**:9 (1984), 1566–1571.

10. В. Н. Щенников, "Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях", *Автоматика и телемеханика*, 1985, № 2, 69–72.

11. В. Н. Щенников, "Исследование почти периодического режима одной нелинейной регулируемой системы", *Дифференциальные уравнения*, **22**:12 (1986), 2182–2183.

12. В. Н. Щенников, "Развитие теории вынужденных почти периодических колебаний в нелинейных управляемых системах", *Математическое моделирование*, **7**:5 (1995), 29–30.

13. А. А. Косов, В. Н. Щенников, "О конвергенции сложных почти периодических систем", *Дифференциальные уравнения*, **50**:12 (2014), 1571–1581.

14. В. С. Елфимов, А. В. Щенников, В. Н. Щенников, "Конвергентность управляемых динамических систем", *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **46**:2 (2018), 86–94.

Поступила 12.02.2019

MSC2010 34C27

Review of the works of V. N. Shchennikova on the study of the convergence of nonlinear almost periodic systems by the comparison method

© **A. A. Kosov**[1], **A. V. Shchennikov**[2], **E. V. Shchennikova**[3], **R. V. Zhalnin**[4], **P. A. Shamanaev**[5]

Abstract. The article provides an overview of the studies of V. N. Shchennikov on the problems of almost periodic convergence of nonlinear differential equations' systems. The problem of convergence established by linear or homogeneous approximation is considered. The conditions for convergence of complex systems are given, that are obtained by constructing Lyapunov vector functions and using the comparison method. It should be noted that in the course of the proof constructive estimates are made for the values of small parameters and interconnection functions. The dimensions of the region in which the limiting almost periodic mode is located are also specified. As an application, the problem of convergence in an electric circuit modeled by a second-order nonlinear differential equation with a small parameter is considered. In conclusion, possible applications and unsolved problems for new directions of research, on which V. N. Shchennikov worked in recent years, are discussed.

Key Words: convergence, almost periodic solutions, Lyapunov vector function, nonlinear system of ordinary differential equations

References

1. V. I. Zubov, *[Oscillations in nonlinear and controlled systems]*, Sudpromgiz, Leningrad, 1962 (In Russ.), 631 p.
2. V. M. Matrosov, "[To the theory of motion stability]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **XXVI**:6 (1962), 992–1000 (In Russ.).
3. V. M. Matrosov, L. Yu. Anapol'skiy, S. N. Vasil'ev, *[Comparison method in mathematical systems theory]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1980 (In Russ.), 480 p.
4. V. M. Matrosov, "The comparison principle with a vector-valued Lyapunov function. IV", *Differentsialnye uravneniya*, **5**:12 (1969), 2129–2143 (In Russ.).

[1]**Alexander A. Kosov**, Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

[2]**Aleksey V. Shchennikov**, applicant of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4734-1553, shennikov.aleksey@yandex.ru

[3]**Elena V. Shchennikova**, Professor of the Department of Fundamental Informatics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: http: //orcid.org/0000-0001-5989-3550, schennikova8000@yandex.ru

[4]**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1103-3321, zhrv@mrsu.ru

[5]**Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

5. V. M. Matrosov, “Method of Lyapunov vector functions in systems with feedback”, *Autom. Remote Control*, 1972, no. 9, 1458–1468.

6. V. N. Shchennikov, “The convergence phenomenon of a certain nonlinear system”, *Differentsialnye uravneniya*, **8**:4 (1972), 737–739 (In Russ.).

7. V. N. Shchennikov, “K teoremam sushchestvovaniya pochti periodicheskikh resheniy v nelineynykh sistemakh differentsialnykh uravneniy [On theorems on the existence of almost periodic solutions in nonlinear systems of differential equations]”, *Funktsionalnyy analiz i voprosy kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy [Functional analysis and questions of the qualitative theory of differential equations]*, MRSU, Saransk, 1976, 158–161 (In Russ.).

8. V. N. Shchennikov, “[Investigation of convergence in a nonautonomous differential system by means Lyapunov vector-functions]”, *Differentsialnye uravneniya*, **19**:11 (1983), 1902–1907 (In Russ.).

9. V. N. Shchennikov, “[The convergence phenomenon in complex systems of differential equations”, *Differentsialnye uravneniya*, **20**:9 (1984), 1566–1571 (In Russ.).

10. V. N. Shchennikov, “Stability under continuous disturbances”, *Autom. Remote Control*, **46** (1985), 197–200.

11. V. N. Shchennikov, “Investigation of an almost periodic state of a nonlinear controllable system]”, *Differentsialnye uravneniya*, **22**:12 (1986), 2182–2183 (In Russ.).

12. V. N. Shchennikov, “On the theory of forced almost periodic oscillations in nonlinear controlled systems”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **7**:5 (1995), 29–30 (In Russ.).

13. A. A. Kosov, V. N. Shchennikov, “On the convergence phenomen in complex almost periodic systems”, *Differentsialnye uravneniya*, **50**:12 (2014), 1571–1581 (In Russ.).

14. V. S. Elfimov, A. V. Shchennikov, V. N. Shchennikov, “Convergence of operated dynamic systems”, *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, **46**:2 (2018), 86–94 (In Russ.).

Submitted 12.02.2019