Математика

DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163

УДК 519.63

Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности

© **И. В. Бойков** [1], **В. А. Рязанцев** [2]

Аннотация. В статье рассматривается проблема восстановления значения постоянного коэффициента в уравнении теплопроводности в одно- и двумерном случае. Данная коэффициентная обратная задача имеет обширные приложения в физике и технике, в частности, для моделирования процессов теплообмена, а также для изучения свойств материалов и проектирования инженерных сооружений. Для решения задачи строится приближенный метод, основанный на непрерывном операторном методе решения нелинейных уравнений. Достоинствами предлагаемого метода является его простота, а также универсальность, позволяющая применять его для решения весьма широкого класса задач. В частности, при построении и обосновании непрерывного операторного метода, в отличие от метода Ньютона-Канторовича, не требуется непрерывной обратимости производных Фреше или Гато. Более того, производные могут не существовать на множествах меры нуль. Применение непрерывного операторного метода к решению обратной коэффициентной задачи с постоянным коэффициентом позволяет свести к минимуму дополнительные условия – достаточно информации о точном решении в одной точке x^*, t^*. Решение модельных примеров продемонстрировало высокую эффективность метода.

Ключевые слова: параболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, непрерывный метод решения операторных уравнений, разностная схема

1. Введение

В данной статье описываются численные алгоритмы приближенного определения постоянного коэффициента теплопроводности в соответствующем параболическом уравнении. Построение алгоритмов решения возникающего при этом класса обратных начальных и граничных коэффициентных задач для одно- и двумерного уравнения теплопроводности основывается на применении непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах. Важной особенностью этого метода является то, что его реализация не требует построения и существования обратного оператора. В основе метода лежит замена исходного нелинейного операторного уравнения на дифференциальное уравнение специального вида и его последующее приближенное решение одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом используются методы теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

[1]**Бойков Илья Владимирович**, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, i.v.boykov@gmail.com

[2]**Рязанцев Владимир Андреевич**, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат технических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0875-9823, ryazantsevv@mail.ru

В общем случае под решением коэффициентной обратной задачи подразумевается определение, при фиксированных граничных и начальных условиях, одного или нескольких коэффициентов дифференциального оператора рассматриваемого уравнения. При этом используется дополнительная информация о решении, которая может быть представлена в виде различных функционалов от решения.

Для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности применяется широкий спектр вычислительных методов.

В статье [1] строится итерационный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения теплопроводности. Коэффициент теплопроводности при этом приближенно ищется в виде сплайна, для определения коэффициентов которого применяется метод сопряженных градиентов минимизации среднеквадратичной невязки.

Авторы другой работы [2] рассматривают проблемы практической реализации итерационных методов решения коэффициентных обратных задач теплообмена; в частности, детально рассмотрен численный алгоритм, основанный на методе скорейшего спуска.

В статье [3] предлагается метод численного решения обратной коэффициентной задачи нелинейного теплопереноса, базирующийся на применении методов градиентного спуска, переменных направлений с экстраполяцией и параметрической идентификации.

В [4] для определения младшего коэффициента в уравнении параболического типа применяется метод квазиобращения, а в [5] та же задача решается с использованием метода регуляризации.

В статье [6] описывается способ построения вычислительных схем для реализации градиентного метода решения некоторых классов обратной коэффициентной задачи теплопроводности.

В работе [7] речь идет об обратной коэффициентной задаче для уравнения фильтрации. Разработан алгоритм решения обратных задач для одно- и двумерных параболических уравнений, основывающийся на применении регуляризованной сплайн-аппроксимации.

В статье [8] для решения задачи определения старшего коэффициента в уравнении теплопроводности используется метод градиентного спуска.

Темой статьи [9] являются вопросы функциональной и параметрической идентификации градиентными методами при решении коэффициентных обратных задач. На примере конкретной коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения строится алгоритм пошаговой идентификации неизвестного коэффициента теплопроводности.

В статье [10] к решению задачи идентификации параметров для решения обратной задачи теплопроводности привлекается вычислительный алгоритм итерационного фильтра.

Обзор численных методов решения обратной задачи теплопроводности приведен в работе [11].

В книге [12] указывается, что класс обратных задач, в которых требуется определить коэффициенты параболического уравнения, является наиболее сложным в силу их существенной неустойчивости, вследствие которой основным методом решения таких задач на данный момент является оптимизационный метод. В работе [12] подробно описываются градиентные методы определения коэффициентов параболических уравнений.

В данной статье строятся вычислительные алгоритмы восстановления постоянного коэффициента теплопроводности для одно- и двумерных уравнений теплопроводности. Рассматриваются следующие задачи.

Задача Коши для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \gamma \cdot \Delta u(\mathbf{x},t), \qquad t \geqslant t_0, \tag{1.1}$$

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}). \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Требуется определить неизвестный коэффициент γ в предположении, что известным является точное решение $u(\mathbf{x}^*, t^*)$ в некоторой фиксированной точке $(\mathbf{x}^*, t^*)$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Положим, что $\mathbf{x} \in [0, \ell]^n$. Рассматривается уравнение (1.1) вместе с начальным условием (1.2) и граничными условиями

$$u(0, t) = \eta_1(t), \quad u(\ell, t) = \eta_2(t), \tag{1.3}$$

в случае $n = 1$ или

$$u(0,0,t) = \eta_{11}(t),\ u(0,\ell,t) = \eta_{12}(t),\ u(\ell,0,t) = \eta_{21}(t),\ u(\ell,\ell,t) = \eta_{22}(t) \tag{1.4}$$

в случае $n = 2$.

Требуется определить неизвестный коэффициент γ в предположении, что известным является точное решение $u(\mathbf{x}^*, t^*)$ в некоторой точке $(\mathbf{x}^*, t^*)$.

2. Описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений

Следуя работе [13], приведем описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений, лежащего в основе конструируемых ниже алгоритмов.

Рассматривается операторное уравнение:

$$A(\mathbf{x}) - \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X},\ \mathbf{f} \in \mathbb{X}. \tag{2.1}$$

где $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ – нелинейный оператор и $\mathbb{X}$ – банахово пространство.

Уравнению (2.1) ставится в соответствие следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A\left(\mathbf{x}(t)\right) - \mathbf{f}. \tag{2.2}$$

К уравнению присоединяется начальное условие

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.3}$$

В работе [13] формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1 *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *в пространстве $\mathbb{X}$ имеется шар $S = R(\mathbf{x}^*, r)$, $r > 0$, в котором решение $\mathbf{x}^*$ уравнения (2.1) существует и единственно;*
2. *в каждой точке $\mathbf{x} \in S$ существует производная $A'(\mathbf{x})$;*
3. *для произвольных $\mathbf{x}_1 \in S$ и $\mathbf{x}_2 \in S$ имеет место неравенство $\|A'(\mathbf{x}_1) - A'(\mathbf{x}_2)\| \leqslant L$;*
4. *для любой точки $\mathbf{x} \in S$ выполняется неравенство $\Lambda\left(A'(\mathbf{x})\right) \leq -\alpha$, где $\alpha > 0$;*
5. *имеет место неравенство $\alpha > L$.*

Тогда решение задачи (2.2)–(2.3) сходится к решению уравнения (2.1) для любого $\mathbf{x}_0 \in S$.

В приложениях более естественно использовать следующее утверждение [13].

Т е о р е м а 2.2 *Пусть уравнение* (2.1) *имеет решение* $\mathbf{x}^*$, *и на любой дифференцируемой кривой* $\varphi(t)$, *расположенной в шаре* $\mathrm{R}(\mathbf{x}^*, r)$, *выполняются следующие условия:*

1. *при любом* t $(t > 0)$ *справедливо неравенство* $\int\limits_0^t \Lambda\left(A'\left(\varphi(\tau)\right)\right) d\tau \leqslant 0;$

2. *имеет место неравенство* $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda\left(A'(\varphi(\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau\right] \leqslant -\alpha,\ \alpha > 0.$

Тогда решение задачи Коши (2.2)-(2.3) *сходится к решению* $\mathbf{x}^*$ *уравнения* (2.1).

Выше через $\Lambda(A')$ обозначена логарифмическая норма оператора A'. Напомним, что логарифмическая норма линейного оператора K, действующего из банахового пространства B в банахово пространство B, определяется выражением $\Lambda(K) = \lim_{h\downarrow 0}(\|I + hK\| - -1)/h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

3. Приближенное определение коэффициента в задаче Коши для одномерного уравнения теплопроводности

Наиболее просто предлагаемый метод иллюстрируется на примере задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Рассматривается задача (1.1)–(1.2), где $n = 1$, $\mathbf{x} = x$ и $\mathbf{f} = f$. Для простоты обозначений положим $t_0 = 0$. Также предположим дополнительно, что известным является (возможно, приближенное) значение точного решения $u(x^*, t^*)$ в фиксированной точке (x^*, t^*).

Точное решение задачи (1.1)–(1.2) определяется следующей формулой [14, с.52].

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\gamma t}\right]\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Приняв $x = x^*$ и $t = t^*$, перепишем (3.1) в виде:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t^*}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\gamma t^*}\right]\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - u(x^*, t^*) = 0. \tag{3.2}$$

Будем искать неизвестный параметр $\gamma > 0$ как предел вспомогательной функции $\overline{\gamma}(\tau)$, где $\tau \geqslant 0$, так что $\lim\limits_{\tau\to\infty}\overline{\gamma}(\tau) = \gamma$. Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$A\left(\gamma(\tau)\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma(\tau)t^*}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\gamma(\tau)t^*}\right]\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad f = u(x^*, t^*).$$

Тогда уравнение (3.2) запишем в следующем операторном виде:

$$A\left(\overline{\gamma}(\tau)\right) - f = 0.$$

В соответствии с описанием метода из п. 2. поставим этому уравнению в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{\gamma}(\tau)}{d\tau} = A\left(\overline{\gamma}(\tau)\right) - f, \tag{3.3}$$

к которому присоединим начальное условие

$$\overline{\gamma}(0) = \overline{\gamma}_0. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 3.1 *В силу утверждения теоремы 2.1 значение $\overline{\gamma}_0$ может быть зафиксировано любым. Тем не менее на практике следует потребовать выполнения требования $\overline{\gamma}_0 > 0$ в силу условия $\overline{\gamma} > 0$ и наличия в подынтегральном выражении в* (3.2) *сомножителя $\frac{1}{\overline{\gamma}}$.*

Задачу (3.3)–(3.4) можно решить любым методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. К числу наиболее простых принадлежит метод Эйлера. Пусть $\tau \in [0, T]$, где T – достаточно большое положительное число. Разобьем сегмент $[0, T]$ на N малых промежутков точками $\tau_k = kh$, где $k = \overline{0, N}$ и $h = T/N$. Обозначим $\overline{\gamma}_k = \overline{\gamma}(\tau_k)$. Вычислительная схема, реализующая приближенное решение дифференциального уравнения, определяется формулой

$$\overline{\gamma}_{k+1} = \overline{\gamma}_k + h\left[A\left(\overline{\gamma}_k\right) - f\right],$$

которая в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\overline{\gamma}_{k+1} = \overline{\gamma}_k + h\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi\overline{\gamma}_k t^*}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\overline{\gamma}_k t^*}\right]\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi - u(x^*, t^*)\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.5}$$

Искомое значение коэффициента γ фиксируется приближенно в соответствии с формулой $\gamma \approx \overline{\gamma}_N$.

З а м е ч а н и е 3.2 *Для решения поставленной задачи достаточно знания одного значения решения $u(x^*, t^*)$. Тем не менее в случае, если это значение известно приближенно, для восстановления значения γ может потребоваться знание большего количества значений решения. В самом деле, пусть известными являются M значений $u(x_j^*, t_j^*)$. Обозначим как $\overline{\gamma}^j$ значение $\overline{\gamma}_N = \overline{\gamma}(\tau_N)$, получаемое в результате реализации вычислительной схемы* (3.5) *в точке (x_j^*, t_j^*). Тогда искомое приближенное значение γ предлагается определять по следующей формуле:*

$$\gamma \approx \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\overline{\gamma}^j.$$

П р и м е р 3.1 *Пусть требуется приближенно определить значение постоянного коэффициента γ в правой части уравнения* (1.1)*, если задано начальное условие $u(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Предположим, что при $x^* = \frac{1}{2}$, $t^* = \frac{1}{2}$ дополнительно известным является значение точного решения: $u(1/2, 1/2) = e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{1}{4}\right)$.*

Точное решение уравнения определяется [14, с.52] *функцией $u(x, t) = e^{-t}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ при точном значении искомого коэффициента $\gamma = 4$.*

Ниже используются следующие обозначения:

- No. – *порядковый номер численного эксперимента;*
- γ_0 – *начальное приближение;*
- h – *шаг метода Эйлера;*
- B – *число, определяющее границу интервала* $[-B, B]$, *в котором приближенно (в соответствии с квадратурной формулой трапеций) считается интеграл в правой части формулы* (3.5)
- $\gamma_{прибл}$ – *найденное при помощи предложенного метода приближенное значение коэффициента* γ*;*
- ε – *абсолютное значение разности между точным и приближенным значением коэффициента* γ.
- N – *число, фиксирующее разбиения сегмента* $[-B, B]$ *при приближённом вычислении интеграла в правой части* (3.5) *по квадратурной формуле (использовался метод трапеций).*

Результаты решения модельного примера приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 1: Результаты численного решения модельного примера 3.1

No.	γ_0	h	T	B	N	$\gamma_{\text{прибл}}$	ε
1	3.9	0.1	10	500	10^5	3.95232	0.04768
2	3.9	0.01	10	500	10^5	3.95219	0.04780
3	3.9	0.01	10	50	10^4	3.95220	0.04780
4	3.9	0.05	50	500	10^5	3.99749	0.00251
5	3.9	0.1	100	500	10^5	3.99994	0.00006
6	4.1	0.1	100	500	10^5	4.00006	0.00006
7	5.0	0.1	100	500	10^5	4.00067	0.00067
8	3.0	0.1	100	500	10^5	3.99940	0.00059
9	14.0	0.1	100	500	10^5	4.01256	0.01256
10	0.5	0.1	100	500	10^5	3.99822	0.00178

4. Приближённое определение коэффициента в задаче Коши для многомерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.1}$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \tag{4.2}$$

где $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$.

Поставим задачу о приближённом восстановлении коэффициента γ в задаче (4.1)–(4.2) при дополнительном предположении о том, что в некоторой точке (t^*, x^*, y^*) известно значение функции $u(t^*, x^*, y^*)$.

Общее решение задачи (4.1)–(4.2) приводится в виде формулы [14, с.155]:

$$u(t,x,y)=\frac{1}{4\pi\gamma t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4\gamma t}\right]d\xi\, d\eta. \tag{4.3}$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию $\overline{\gamma}(\sigma)$, которую свяжем с искомым коэффициентом γ при помощи формулы $\gamma=\lim\limits_{\sigma\to\infty}\overline{\gamma}(\sigma)$. Положим в (4.3) $x=x^*$, $y=y^*$ и $t=t^*$. Обозначим

$$A\big(\overline{\gamma}(\sigma)\big)=\frac{1}{4\pi\overline{\gamma}(\sigma)t^*}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2+(y^*-\eta)^2}{4\overline{\gamma}(\sigma)t^*}\right]d\xi\, d\eta.$$

В соответствии с описанием непрерывного операторного метода функция $\overline{\gamma}(\sigma)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d\overline{\gamma}}{d\sigma}=A(\overline{\gamma})-f$, где $f=u(t^*,x^*,y^*)$. Это дифференциальное уравнение будем решать при помощи метода Эйлера. Зафиксируем достаточно большое целое положительное число M и будем восстанавливать значения функции $\overline{\gamma}(\sigma)$ на промежутке $\sigma\in[0,\Phi]$. Положим $h=\frac{\Phi}{M}$ и обозначим $\overline{\gamma}_j=\overline{\gamma}(\sigma_j)$, $j=\overline{0,M}$. Тогда соответствующая вычислительная схема имеет вид:

$$\overline{\gamma}_{j+1}=\overline{\gamma}_j+h\left\{\frac{1}{4\pi t^*\overline{\gamma}_j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2+(y^*-\eta)^2}{4t^*\overline{\gamma}_j}\right]d\xi\, d\eta-u(t^*,x^*,y^*)\right\}, \tag{4.4}$$

где $j=\overline{0,M-1}$. Результатом описанного вычислительного процесса является приближённое значение γ, равное $\overline{\gamma}_M$.

П р и м е р 4.1 *Рассматривается задача приближенного определения коэффициента γ в задаче Коши для двумерного уравнения теплопроводности с начальным условием $u_0(x,y)=\cos(x)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$. Предположим дополнительно, что известным является значение точного решения $u(0.5,0.4,0.3)\approx 0.0747563245$.*

Точным решением задачи является функция $u(t,x,y)=\cos(x)\cos\left(\frac{y}{2}\right)\exp(-5t)$ при точном значении коэффициента $\gamma=4$.

Результаты численного решения задачи (при шаге метода Эйлера $h=0.1$) приведены в нижеследующей таблице.

Использованы следующие обозначения:

- No. – *номер численного эксперимента;*
- B – *число, фиксирующее границу квадрата $[-B,B]^2$, в котором интеграл Пуассона аппроксимируется при помощи кубатурной формулы трапеций;*
- N – *число разбиений интервала $[-B,B]$ при приближенном вычислении интеграла Пуассона;*
- Φ – *длина сегмента, в котором изменяется параметр $\sigma,\sigma\in[0,\Phi]$;*
- γ_0 – *начальное приближение метода;*
- $\gamma_{прибл}$ – *приближенное значение γ;*
- ε – *погрешность метода, определяемая по формуле $\varepsilon=|\gamma_{прибл}-\gamma_{точн}|$.*

Таблица 2: Результаты численного решения модельного примера 4.1 (при шаге метода Эйлера $h = 0.1$)

No.	B	N	Φ	γ_0	$\gamma_{\text{прибл.}}$	ε
1	5	100	50	5.0	4.02474	0.0247429
2	5	1000	50	5.0	4.02471	0.0247113
3	10	2000	50	5.0	4.03262	0.0326205
4	10	2000	100	5.0	4.00089	0.0008655
5	10	200	100	5.0	4.00089	0.0008655
6	10	200	200	5.0	4.00000	0.0000006
7	10	200	300	5.0	4.00000	$3.1 \cdot 10^{-9}$
8	10	200	400	5.0	4.00000	$2.6 \cdot 10^{-9}$
9	10	200	50	3.0	3.97741	0.0225933
10	10	200	100	3.0	3.99939	0.0006078
11	10	200	100	2.0	3.99898	0.0010243
12	10	200	100	1.0	3.99869	0.0013093
13	10	200	100	7.0	4.00406	0.0040619
14	10	200	100	10.0	4.01660	0.0166021
15	10	200	600	100.0	4.00216	0.0021633

5. Приближенное определение коэффициента в граничной задаче для одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим проблему приближенного определения коэффициента γ в следующей задаче для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{5.2}$$

$$u(t,0) = g_1(t), \qquad u(t,\ell) = g_2(t). \tag{5.3}$$

Здесь $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

С целью построения метода приближенного определения коэффициента γ введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\overline{\gamma}(\sigma)$ $(\sigma \geqslant 0)$ такую, что $\gamma = \lim\limits_{\sigma\to\infty} \overline{\gamma}(\sigma)$. Будем осуществлять восстановление функции $\overline{\gamma}(\sigma)$ на интервале $\sigma \in [0, \Phi]$, где $\Phi > 0$ — достаточно большое вещественное число. Введём на сегменте $[0, \Phi]$ равномерную сетку узлов $\sigma_k = k\theta$, где $\theta = \frac{\Phi}{L}$ – шаг сетки, L – достаточно большое целое положительное число. Пусть $S(\gamma, t, x)$ – функция, определяющая с достаточно высокой точностью решение задачи (5.1)–(5.3) для заданного аргументом значения γ. Относительно функции $\overline{\gamma}(\sigma)$ составим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{\gamma}(\sigma)}{d\sigma} = S(\overline{\gamma}(\sigma), t^*, x^*) - u(t^*, x^*), \tag{5.4}$$

где (t^*, x^*) — точка, в которой предполагается известным значение решения $u(t^*, x^*)$.

Для приближенного решения дифференциального уравнения (5.4) воспользуемся методом Эйлера:

$$\overline{\gamma}_{j+1} = \overline{\gamma}_j + \theta \left\{ S(\overline{\gamma}_j, t^*, x^*) - u(t^*, x^*) \right\},$$

где $\overline{\gamma}_j = \overline{\gamma}(\sigma_j)$, $j = \overline{0, L-1}$. Начальное приближение $\overline{\gamma}_0 = \overline{\gamma}(0)$ фиксируем произвольным положительным числом.

Остается открытым вопрос о нахождении значений $S(\overline{\gamma}_j, t^*, x^*)$ при $j = \overline{1, L}$. Для его решения предлагается использовать аппарат разностных схем. Пусть M, N – достаточно большие фиксированные положительные числа. Положим $h = \frac{\ell}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$, и введем на множестве точек $\Omega = \{(t,x):\, 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant \ell\}$ (где T – фиксированное положительное число) равномерную сетку узлов (t_i, x_j), $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, N}$, где $t_i = i\tau$, $x_j = jh$. Уравнение (5.1) аппроксимируем следующим разностным аналогом:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\tau} = \gamma \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}, \tag{5.5}$$

где $u_{i,j} = u(t_i, x_j)$. Расчет значений $u_{i,j}$ будем проводить по явной разностной формуле:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\gamma\tau}{h^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right), \tag{5.6}$$

где $i = \overline{0, M-1}$, $j = \overline{1, N-1}$.

З а м е ч а н и е 5.1 *Для осуществления расчётов по схеме* (5.6) *необходимо положить $u_{0,j} = u_0(x_j)$, $u_{i,0} = g_1(t_i)$, $u_{i,N} = g_2(t_i)$.*

З а м е ч а н и е 5.2 *В силу известного* [15] *условия $\dfrac{\gamma\tau}{h^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ устойчивости разностной схемы* (5.6) *необходимо потребовать выполнения условия $\tau \leqslant Ch^2, C-$ const, что на практике может привести к существенному увеличению объема вычислений, т. к. при больших значениях γ (либо при больших значениях начального приближения $\overline{\gamma}_0$) приходится уменьшать шаг сетки τ.*

З а м е ч а н и е 5.3 *Значение T естественно зафиксировать формулой $T = t^*$. Сетку узлов (t_i, x_j) следует построить таким образом, чтобы при некотором фиксированном значении j имело место равенство $x_j = x^*$.*

З а м е ч а н и е 5.4 *Разностные формулы* (5.5)–(5.6) *использовались выше для простоты описания алгоритма. Для достижения большей точности более предпочтительно использовать разностные схемы с переменным шагом* [16].

П р и м е р 5.1 *Решается задача приближенного восстановления неизвестного коэффициента γ в задаче* (5.1)–(5.3)*, если при $\ell = 1$ заданы следующие условия:*

$$u(0,x) = 2xe^{-\frac{x^2}{3}}, \tag{5.7}$$

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{12t+3}\right). \tag{5.8}$$

Дополнительно предполагается известным значение $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.53118789$.

Точное решение задачи даётся формулой $u(t,x) = \dfrac{x}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^{1/2}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{12t+3}\right)$.

Результаты численного решения задачи представлены в нижеследующей таблице. В этой таблице No. *обозначает порядковый номер численного эксперимента, $\gamma_{прибл.}$ обозначает найденное приближённое значение γ, Φ – длину сегмента $[0, \Phi]$, в котором изменяется параметр σ, h – шаг разностной схемы по переменной x, τ – шаг разностной схемы по переменной t, а ε обозначает погрешность определения значения γ.*

Во всех представленных численных экспериментах зафиксировано $\theta = \frac{\Phi}{L} = 0.1$.

Таблица 3: Результаты численного решения модельного примера 5.1

No.	γ_0	h	τ	Φ	L	$\gamma_{\text{прибл.}}$	ε
1	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.86861	0.131385
2	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.98962	0.010381
3	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	2.99893	0.001071
4	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	3.14387	0.143865
5	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	3.01569	0.015686
6	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00164	0.001640
7	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.89995	0.100049
8	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.98997	0.010033
9	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00164	0.001640
10	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.92721	0.072786
11	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.99263	0.007367
12	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	2.99924	0.000760
13	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	3.38408	0.384077
14	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	3.04537	0.045373
15	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00479	0.004786
16	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	1000	6.14184	3.141840
17	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	2000	3.79589	0.795891
18	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	3000	3.10742	0.107422
19	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	4000	3.01157	0.011570
20	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	500	5000	3.00121	0.001208
21	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	1000	10000	3.00003	0.000003

6. Приближенное определение коэффициента в граничной задаче для многомерного уравнения теплопроводности

Рассматривается проблема определения коэффициента γ в следующей граничной задаче для двумерного уравнения

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2} \right), \tag{6.1}$$

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \tag{6.2}$$

$$u(t,x,0) = g_1(t,x), \quad u(t,x,\ell) = g_2(t,x), \quad u(t,0,y) = g_3(t,y), \quad u(t,\ell,y) = g_4(t,y). \tag{6.3}$$

Здесь $t \geqslant 0$ и $(x,y) \in [0,\ell]^2$. С целью решения поставленной задачи введём в рассмотрение вспомогательную функцию $\overline{\gamma}(\sigma)$ $(\sigma \geqslant 0)$, такую, что имеет место предельное равенство $\gamma = \lim\limits_{\sigma\to\infty} \overline{\gamma}(\sigma)$. Численный метод предполагает, что $\overline{\gamma}(\sigma)$ восстанавливается в точках сегмента $\sigma \in [0,\Phi]$, где Φ – достаточно большое положительное число. Введём на сегменте $\sigma \in [0,\Phi]$ равномерную сетку узлов $\{\sigma_k\}$, где $\sigma_k = k\theta$, $\theta = \frac{\Phi}{L}$, $k = \overline{0,L}$. Пусть $S(\gamma)$ – оператор, ставящий в соответствие выбранному значению γ решение $u(t^*,x^*,y^*)$ задачи (6.1)–(6.3) (возможно, приближенное) в некоторым образом фиксированной точке $(t^*,x^*,y^*) \in \mathbb{R} \times [0,\ell] \times [0,\ell]$. Функция $\overline{\gamma}(\sigma)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\overline{\gamma}(\sigma)}{d\sigma} = S\left(\overline{\gamma}(\sigma)\right) - u(t^*,x^*,y^*). \tag{6.4}$$

З а м е ч а н и е 6.1 *Предполагается, что значение $u(t^*, x^*, y^*)$ является известным.*

Уравнение (6.4) решается приближенно при помощи метода Эйлера. Обозначим $\overline{\gamma}_j = \overline{\gamma}(\sigma_j)$. Тогда имеем вычислительную схему:

$$\overline{\gamma}_{j+1} = \overline{\gamma}_j + \theta \cdot \left\{ S(\overline{\gamma}_j) - u(t^*, x^*, y^*) \right\}, \quad j = \overline{0, L-1}. \tag{6.5}$$

Начальное приближение $\overline{\gamma}_0 = \overline{\gamma}(0)$ фиксируем произвольным положительным числом. Оператор $S(\gamma)$ предлагается реализовать при помощи построения многомерной разностной схемы. Зафиксируем $t^* = T$, $x^* = y^* = \dfrac{\ell}{2}$, и пусть $\tau = \dfrac{T}{M}$, $h = \dfrac{\ell}{N}$, где M – целое положительное число, и N – целое положительное чётное число. Введём на множестве $[0, T] \times [0, \ell] \times [0, \ell]$ равномерную сетку узлов $\{(t_i, x_j, y_k)\}$, где $t_i = i\tau$, $x_j = jh$, $y_k = kh$. Уравнение (6.1) аппроксимируем разностной формулой:

$$\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\tau} = \gamma \cdot \left(\frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}}{h^2} \right). \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) в явном виде разрешимо относительно $u_{i+1,j,k}$:

$$u_{i+1,j,k} = u_{i,j,k} + \frac{\gamma\tau}{h^2} \cdot \left(u_{i,j-1,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k+1} - 4u_{i,j,k} \right), \tag{6.7}$$

где $i = \overline{0, L-1}$, $j = \overline{1, N}$ и $k = \overline{1, N}$. В силу условий (6.2)-(6.4) полагаем

$$u_{0,j,k} = \varphi(x_j, y_k), \quad u_{i,j,0} = g_1(t_i, x_j), \quad u_{i,j,N} = g_2(t_i, x_j), \quad u_{i,0,k} = g_3(t_i, y_k), \quad u_{i,N,k} = g_4(t_i, y_k).$$

З а м е ч а н и е 6.2 *Для обеспечения устойчивости вычислительной схемы* (6.7) *необходимо потребовать выполнения условия $\tau \gg h^2$.*

П р и м е р 6.1 *Решается коэффициентная задача для следующих данных:*

$$u(t, x, y) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(y) \cdot e^{-5t}, \quad \ell = 1, \quad \gamma_{точн} = 4.$$

Зафиксировано $t^* = \frac{1}{2}$, $x^* = y^* = \frac{1}{2}$. Результаты численных экспериментов представлены в нижеследующей таблице.

Таблица 4: Результаты численного решения модельного примера 6.1

No.	γ_0	h	τ	Φ	L	$\gamma_{прибл.}$	ε
1	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	10^3	10^4	3.84882	0.151185
2	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	3.97078	0.029217
3	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.99279	0.007209
4	2	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	3.90040	0.099596
5	2	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.99011	0.009892
6	1	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	3.88561	0.114386
7	1	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.88561	0.011032
8	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	3.94888	0.051122

No.	γ_0	h	τ	Φ	L	$\gamma_{\text{прибл.}}$	ε
9	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.98875	0.011251
10	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	3.99613	0.003866
11	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	4.11919	0.119193
12	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	4.02486	0.024859
13	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	4.00659	0.006588
14	10	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	4.03936	0.039359
15	10	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	4.00935	0.009349
16	20	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^4$	4.05317	0.053173

Использованные в таблице обозначения совпадают с обозначениями в таблице для предшествующего примера.

7. Заключение

В работе представлены алгоритмы решения обратных коэффициентных задач для параболических уравнений, основанные на применении непрерывного операторного метода решения операторных уравнений. Эффективность этих алгоритмов обусловлена двумя обстоятельствами:

1. для нахождения неизвестного коэффициента параболического уравнения требуется дополнительно информация о точном решении только в одной точке (t^*, x^*), $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$;

2. при реализации алгоритмов не требуется нахождение производных операторных уравнений.

Предложенная методология допускает распространение подхода в построении вычислительных схем на другие классы обратных задач.

Список литературы

1. Е. А. Артюхин, “Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи”, *Теплофизика высоких температур*, **19**:5 (1981), 963–967.

2. О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев, *Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1988, 288 с.

3. С. А. Колесник, “Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов”, *Вычислительные технологии*, **18**:1 (2013), 34–44.

4. П. Г. Данилаев, *Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения*, УНИПРЕСС, Казань, 1998, 128 с.

5. П. Г. Данилаев, “Сравнение двух регуляризующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, **47**:5 (2003), 3–8.

6. А В. Пененко, “Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **15**:4 (2012), 393–408.

7. А. Н. Наумов, “Решение обратной коэффициентной задачи для уравнения фильтрации”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*, 2006, № 006, 6–29.

8. С. И. Кабанихин, А. Гасанов, А. В. Пененко, “Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **11**:1 (2008), 41–51.

9. П. Н. Вабищевич, А. Ю. Денисенко, “Численное решение коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения”, *Математическое моделирование*, **1**:8 (1989), 116–126.

10. Ю. М. Мацевитый А. В. Мултановский, “Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвердых материалов”, *Теплофизика высоких температур*, **28**:5 (1990), 924–929.

11. Дж. Бек, Б. Блэкуэлл, Ч. Сент-Клер, *Некорректные обратные задачи теплопроводности*, Мир, М., 1989, 311 с.

12. С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2009, 457 с.

13. И. В. Бойков, “Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:48 (2012), 1308–1314.

14. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.

15. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2008, 636 с.

16. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев, “Построение адаптивных разностных схем решения уравнения теплопроводности”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2017, № 1, 68–81.

Поступила 28.03.2019

MSC2010 65M32

On the approximate method for determination of heat conduction coefficient

© I. V. Boikov [1], V. A. Ryazantsev[2]

Abstract. The problem of recovering a value of the constant coefficient in heat equation for one- and two-dimensional cases is considered in the paper. This inverse coefficient problem has broad range of applications in physics and engineering, in particular, for modelling heat exchange processes and for studying properties of materials and designing of engineering constructions. In order to solve the problem an approximate method is constructed; it is based on the continuous operator method for solving nonlinear equations. The advantages of the proposed method are its simplicity and universality. The last property allows to apply the method to a wide range of problems. In particular, in constructing and justifying a continuous operator method, in contrast to the Newton–Kantorovich method, the continuous reversibility of Frechet or Gato derivatives is not required. Moreover, derivatives may not exist on sets of measure zero. The application of continuous operator method to the solution of an inverse coefficient problem with a constant coefficient makes it possible to minimize additional conditions – there is enough information about the exact solution at a single point x^*, t^*. Solving several model problems illustrates the high efficiency of the proposed method.

Key Words: parabolic equation, inverse coefficient problem, continuous method for solving operator equations,difference scheme

References

1. E. A. Artyukhin, "Recovery of the temperature-dependence of the thermal-conduction coefficient", *High Temperature*, **19**:5 (1981), 698–702.

2. O. M. Alifanov, E. A. Artyukhin, S. V. Rumyantsev, *[Extremal methods of solution of the ill-posed problems and their application to the inverse heat exchange problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 288 p.

3. S. A. Kolesnik, "[A method for numerical solution of inverse problems for identification of nonlinear components of the heat transfer tensor for anisotropic materials]", *Computational Technologies*, **18**:1 (2013), 34–44 (In Russ.).

4. P. G. Danilaev, *[Inverse coefficient problems for parabolic equations and their applications]*, UNIPRESS Publ., Kazan, 1998 (In Russ.), 128 p.

5. P. G. Danilaev, "Comparison of two regularizing algorithms for solution of coefficient inverse problem]", *Russian Mathematics (Izvestia VUS. Matematika)*, **47**:5 (2003), 1–6.

6. A V. Penenko, "Discrete-analytic schemes for solving an inverse coefficient heat conduction problem in a layered medium with gradient methods", *Numerical Analysis and Application*, **5**:4 (2012), 326–341 (In Russ.).

[1]**Ilya V. Boikov**, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6980-933X, i.v.boykov@gmail.com

[2]**Vladimir A. Ryazantsev**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematativs, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D.(Technical Sciences), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0875-9823, ryazantsevv@mail.ru

7. A. N. Naumov, "On the decision of inverse coefficient problem for filtration equation]", *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 2006, no. 006, 6–29 (In Russ.).

8. S. I. Kabanikhin, A. Hasanov, A.V̇. Penenko, "A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat - conduction problem]", *Numerical Analysis and Application*, **1**:1 (2008), 34–45 (In Russ.).

9. P. N. Vabischevich, A. Yu. Denisenko, "Numerical solution of inverse coefficient problem for a nonlinear parabolic equation", *Mat. Model.*, **1**:8 (1989), 116–126 (in Russ.).

10. Yu. M. Matsevityi A. V. Multanovskii, "Simultaneous identification of the thermophysical characteristics of ultrahard materials", *High Temperature*, **28**:5 (1990), 924-929 (In Russ.).

11. J. Beck, B. Blackwell, C. St. Clair Jr, *Inverse heat conduction ill-posed problems*, Wiley, Toronto, 1985 (In Russ.), 308 p.

12. S. I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems*, Siberian Scientific Publ., Novosibirsk, 2009 (In Russ.), 457 p.

13. I. V. Boikov, "[On a certain continuous metod for solution of nonlinear operator equation]", *Differential equations*, **48**:48 (2012), 1308–1314 (In Russ.).

14. A. D. Polyanin, *[Handbook of linear equations of mathematical physics]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 576 p.

15. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *Numerical methods [Chislennye metody]*, BINOM. Laboratoriya Znanii Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 636 p.

16. I. V. Boikov, V. A. Ryazantsev, "Construstion of adaptive difference schemes for solving heat conduction equations", *University proceedings. Volga region*, 2017, no. 1, 68–81 (In Russ.).

Submitted 28.03.2019