

УДК 532.5.011:517.958

Парное магнитогидродинамическое взаимодействие твердых сфер в медленном продольном потоке вязкой жидкости

© И. П. Борискина¹, А. О. Сыромясов²

Аннотация. Строится и изучается математическая модель двух твердых сфер равного радиуса и с одинаковыми физическими свойствами, помещенных в сильно вязкую жидкость, где действует магнитное поле. На бесконечном удалении от частиц поток и поле однородны. Предположение о слабости объемных токов в жидкости позволяет разделить магнитные и гидродинамические эффекты взаимодействия частиц. Распределение магнитного поля найдено для произвольной ориентации невозмущенного поля относительно линии, соединяющей центры сфер, и представлено в виде мультипольного разложения. Это выражение использовано при вычислении силы, действующей на частицу со стороны магнитного поля. Вместе с известными выражениями для гидродинамических сил указанный результат может быть использован для исследования динамики взвешенных сфер в однородном потоке магнитной жидкости. В статье более подробно изучен частный случай, когда невозмущенное поле и поток направлены вдоль линии центров. Обсуждена возможность коагуляции частиц в магнитогидродинамических потоках указанного вида.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнение Стокса, медленное течение, взвешенные частицы, магнитная жидкость, гидродинамическое взаимодействие, коагуляция.

1. Введение

Как известно, отсутствие примесей в жидкости – скорее, исключение, чем правило. В большинстве природных и технологических процессов задействованы суспензии и эмульсии – жидкости, содержащие мелкие инородные частицы, твердые или жидкие, соответственно.

Наличие взвеси может существенно влиять на усредненные характеристики вещества. В пионерской работе А. Эйнштейна [1] была вычислена эффективная вязкость разбавленной суспензии твердых сфер. При этом предполагалось, что каждая частица обтекается так, как если бы других частиц взвеси в жидкости не было. Следующий важный шаг был сделан Дж. Бэтчелором и Дж. Грином [2, 3, 4]: было учтено парное гидродинамическое взаимодействие частиц. Указанное явление заключается в том, что каждому инородному телу “видны” возмущения, вносимые в поток другим близко расположенным телом. Дальнейшие исследования в этой области связаны с учетом большего числа частиц, одновременное взаимодействие которых принимается во внимание [5, 6].

При распространении в среде тепла [7], электрического или магнитного поля наблюдаются аналогичные не прямые взаимодействия, вызванные искажением внешних полей инородными включениями.

¹Борискина Ирина Петровна, доцент кафедры математического анализа, ФГБОУ ВО “МГУ им. Н. П. Огарёва” (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3536-5838>, irinaboriskina@mail.ru

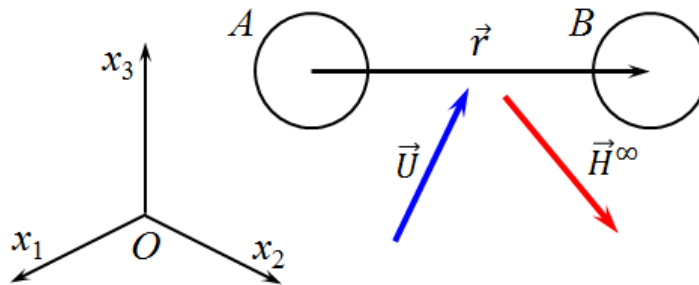
²Сыромясов Алексей Олегович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО “МГУ им. Н. П. Огарёва” (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall1@yandex.ru

Каждый из таких эффектов порознь в достаточной степени изучен. Однако большой интерес представляют “наложения” двух и более эффектов: электрогидродинамическое, термогидродинамическое взаимодействие и т.д. Они могут приводить к результатам, принципиально недостижимым при учете лишь одного из эффектов, например, к образованию или разрушению агрегатов из частиц взвеси [8]. В свою очередь, наличие агрегатов способно существенно изменить свойства дисперсной среды.

В настоящей работе изучается магнитогидродинамическое взаимодействие идентичных твердых сфер, имеющих нейтральную плавучесть и помещенных в однородный поток вязкой жидкости.

2. Постановка задачи о магнитогидродинамическом взаимодействии частиц

Имеются две одинаковые твердые сферические частицы A и B радиуса a , плотности ρ_p и магнитной проницаемости μ_p . Их центры находятся в точках с радиус-векторами \vec{r}^A и \vec{r}^B относительно начала O декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Вектор $\vec{r} = \vec{r}^B - \vec{r}^A$ соединяет центры частиц (рис. 2.1)



Р и с. 2.1

Геометрия задачи о магнитогидродинамическом взаимодействии

Эти сферы помещены в жидкость с вязкостью η , плотностью ρ_f и магнитной проницаемостью μ_f . Вектор-функции \vec{u} , \vec{H}_f , \vec{H}^A и \vec{H}^B задают, соответственно, скорость течения жидкости, напряженность магнитного поля в ней, а также магнитное поле внутри частиц A и B . На большом удалении от инородных сфер поток и поле однородны:

$$\vec{u} \rightarrow \vec{U} = \text{const}, \quad \vec{H}_f \rightarrow \vec{H}^\infty; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Здесь и далее $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ есть радиус-вектор точки среды относительно O .

Находясь в потоке и во внешнем магнитном поле, твердые сферы начнут двигаться, причем их скорости, вообще говоря, будут отличаться от скорости течения. Динамика частиц описывается уравнениями

$$m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt} = \vec{F}(A), \quad m_B \frac{d\vec{V}^B}{dt} = \vec{F}(B), \quad (2.2)$$

где t – время, m_A и m_B – массы, \vec{V}^A и \vec{V}^B – абсолютные скорости центров A и B , $\vec{F}(A)$ и $\vec{F}(B)$ – силы, приложенные к A и B . В зависимости от своих начальных положений и скоростей частицы под действием этих сил могут отдаляться друг от друга или сближаться (вплоть до коагуляции). Однако $\vec{F}(A)$ и $\vec{F}(B)$ зависят от внутренних напряжений,

действующих в среде. Поэтому перед исследованием динамики инородных тел необходимо найти распределение гидродинамических и магнитных полей в жидкости.

Считая происходящие процессы стационарными, а плотность объемных электрических токов – малой, получим, что напряженность поля удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Здесь под \vec{H} понимается напряженность поля как вне, так и внутри частиц. Условия на границе раздела “жидкость–частица” найдем, пренебрегая поверхностными токами на ней. Тогда касательная к поверхности напряженности поля и нормальная к поверхности компонента магнитной индукции должны быть непрерывны [9]. Для сферы A будем иметь:

$$\vec{H}_f \cdot \vec{\tau} = \vec{H}^A \cdot \vec{\tau}, \quad \mu_f \vec{H}_f \cdot \vec{n} = \mu_p \vec{H}^A \cdot \vec{n}; \quad |\vec{x} - \vec{r}^A| = a, \quad (2.4)$$

где $\vec{\tau}$ и \vec{n} суть единичные векторы касательной и внешней нормали к поверхности сферы. Аналогичные равенства выполнены и для частицы B .

Как известно, уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в отсутствие немагнитных массовых сил имеют вид:

$$\rho_f \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.5)$$

Здесь p – давление в жидкости.

Будем предполагать, что размеры взвешенных частиц малы, а жидкость достаточно вязкая, так что число Рейнольдса $Re = \rho_f |\vec{U}| a / \eta$ много меньше единицы. Тогда в первом из указанных соотношений можно пренебречь инерционными слагаемыми. Кроме того, второе из условий (2.3) позволяет не учитывать влияние магнитного поля на движение жидкости. Т.о., “гидродинамическая” и “магнитная” части задачи разделяются, а течение описывается в приближении Стокса:

$$\eta \Delta \vec{u} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2.6)$$

На границах частиц должны быть выполнены условия прилипания – скорость жидкости должна быть равна скорости точки поверхности. Так, при $|\vec{x} - \vec{r}^A| = a$

$$u_i = V_i^A + \Gamma_{ij}^A (x_j - r_j^A), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.7)$$

Тензор $\vec{\Gamma}^A$ задает абсолютную угловую скорость частицы. Координаты векторов и компоненты тензоров более высокого порядка обозначаются нижними индексами, по повторяющимся индексам происходит суммирование в пределах от 1 до 3.

Итак, изначально требуется решить задачи (2.3), (2.4) и (2.6), (2.7) с учетом условий на бесконечности (2.1).

3. Нахождение возмущения однородного магнитного поля

Метод решения “магнитной” части задачи в общих чертах описан в [10].

Будем искать напряженность поля в вне частиц в виде

$$\vec{H} = \vec{H}^\infty + \vec{H}', \quad (3.1)$$

где \vec{H}' – искажение, вносимое инородными телами. Из (2.1) следует, что

$$\vec{H}' \rightarrow \vec{0}, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty.$$

Второе из условий (2.3) означает, что вне и внутри частиц магнитное поле имеет потенциал:

$$\vec{H}' = \nabla\Phi_f, \vec{H}^A = \nabla\Phi^A, \vec{H}^B = \nabla\Phi^B. \quad (3.2)$$

Исходя из первого уравнения в (2.3), можно сделать вывод, что функции Φ_f, Φ^A, Φ^B – гармонические:

$$\Delta\Phi_f = 0, \Delta\Phi^A = 0, \Delta\Phi^B = 0. \quad (3.3)$$

При этом Φ^A и Φ^B , зависящие от $\vec{x} - \vec{r}^A$ и $\vec{x} - \vec{r}^B$, соответственно, не имеют особенностей в центрах частиц, а Φ_f затухает на бесконечности:

$$\Phi^A(\vec{0}) < \infty, \Phi^B(\vec{0}) < \infty; \Phi_f(\vec{x}) \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Условия (2.4) при $|\vec{x} - \vec{r}^A|$ теперь выглядят так:

$$\left(\frac{\partial\Phi_f}{\partial x_i} + H_i^\infty\right)\tau_i = \frac{\partial\Phi^A}{\partial x_i}\tau_i, \mu_f\left(\frac{\partial\Phi_f}{\partial x_i} + H_i^\infty\right)n_i = \mu_f\frac{\partial\Phi^A}{\partial x_i}n_i, \quad (3.5)$$

Соотношения на поверхности B имеют такой же вид с заменой Φ^A на Φ^B .

Из (3.3) и (3.4) следует, что искомые потенциалы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^A &= \Phi_j^{int}(A)L_j(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^3 + \Phi_{jk}^{int}(A)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^5 + \\ &+ \Phi_{jkl}^{int}(A)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^A)|\vec{x} - \vec{r}^A|^7 + \dots \\ \Phi_f &= \Phi_j^{ext}(A)L_j(\vec{x} - \vec{r}^A) + \Phi_{jk}^{ext}(A)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^A) + \Phi_{jkl}^{ext}(A)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^A) + \dots \\ &+ \Phi_j^{ext}(B)L_j(\vec{x} - \vec{r}^B) + \Phi_{jk}^{ext}(B)L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}^B) + \Phi_{jkl}^{ext}(B)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}^B) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Мультиполи $L_{j\dots k}$ суть частные производные фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$L_{j\dots k}(\vec{y}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|\vec{y}|} \right).$$

Неизвестными в разложениях (3.6) являются тензорные коэффициенты $\Phi_j^{int}(A), \dots, \Phi_{jkl}^{ext}(B), \dots$. Индексы “int” и “ext” относятся к полю внутри и вне частиц, а обозначения “(A)” и “(B)” относят то или иное слагаемое к сферам A и B , соответственно.

Чтобы найти указанные величины, следует подставить (3.6) в граничные условия (3.5). Для снижения количества неизвестных применяются следующие упрощения.

Во-первых, из геометрических соображений следует, что распределение напряженности симметрично относительно середины отрезка, соединяющего центры сфер. Поскольку дифференцирование меняет четность функции, распределение потенциала антисимметрично относительно этой же точки:

$$\Phi_f\left(\frac{\vec{r}^A + \vec{r}^B}{2} - \vec{y}\right) = -\Phi_f\left(\frac{\vec{r}^A + \vec{r}^B}{2} + \vec{y}\right).$$

Для выполнения этого условия необходимо положить

$$\Phi_j^{ext}(B) = \Phi_j^{ext}(A), \Phi_{jk}^{ext}(B) = -\Phi_{jk}^{ext}(A), \Phi_{jkl}^{ext}(B) = \Phi_{jkl}^{ext}(A), \dots \quad (3.7)$$

Во-вторых, искомые тензорные коэффициенты сворачиваются с мультиполями $L_{j\dots k}$, симметричными по всем индексам, а значит, и сами являются симметричными.

В-третьих, из (3.5) вытекает, что решение задачи линейно по \vec{H}^∞ . Поэтому тензорные коэффициенты также линейны по \vec{H}^∞ ; кроме того, они зависят от \vec{r} . Опуская индексы “int” и “ext”, а также обозначения “(A)” и “(B)”, запишем общие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}\Phi_i &= H_i^{\infty\parallel}FA + H_i^{\infty\perp}FB, \\ \Phi_{ij} &= H_i^{\infty\parallel}r_jFC + (H_i^{\infty\perp}r_j + H_j^{\infty\perp}r_i)FD, \\ \Phi_{ijk} &= H_i^{\infty\parallel}r_jr_kFE + (H_i^{\infty\perp}r_jr_k + H_j^{\infty\perp}r_ir_k + H_k^{\infty\perp}r_ir_j)FF.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Здесь и далее индексы “ \parallel ” и “ \perp ” обозначают компоненты того или иного вектора, параллельные и перпендикулярные \vec{r} , соответственно.

Сходные соображения были использованы в [11] при решении задачи о термодинамическом взаимодействии сфер в неоднородном поле температуры.

Окончательно, скалярные функции $FA^{int}(A)$, $FB^{int}(A)$, ... отыскиваются из граничных условий (3.5) в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon = a/r$:

$$\begin{aligned}FA^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p} + \frac{2a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FB^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p} - \frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FC^{ext}(A) &= -\frac{3a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FD^{ext}(A) &= \frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FE^{ext}(A) &= \frac{2a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FF^{ext}(A) &= -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)^2}{2(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FA^{int}(A) &= -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p} + \frac{6\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FB^{int}(A) &= -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p} - \frac{3\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{(2\mu_f + \mu_p)^2}\varepsilon^3, \\ FC^{int}(A) &= -\frac{15\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{2a^2(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FD^{int}(A) &= \frac{5\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{2a^2(2\mu_f + \mu_p)(3\mu_f + 2\mu_p)}\varepsilon^5, \\ FE^{int}(A) &= \frac{14\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{3a^4(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7, \\ FF^{int}(A) &= -\frac{7\mu_f(\mu_f - \mu_p)}{6a^4(2\mu_f + \mu_p)(4\mu_f + 3\mu_p)}\varepsilon^7.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Их достаточно, чтобы вычислить потенциалы магнитного поля с точностью до ε^5 .

При $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. когда частицы взвеси бесконечно удалены друг от друга, полученные разложения переходят в решение задачи об одиночной сфере в однородном магнитном поле. В этом случае имеется единственное выделенное направление, связанное с вектором \vec{H}^∞ , поэтому $FA = FB$ и

$$\Phi_j^{ext}(A) = -\frac{a^3(\mu_f - \mu_p)}{2\mu_f + \mu_p}H_j^\infty, \quad \Phi_j^{int}(A) = -\frac{3\mu_f}{2\mu_f + \mu_p}H_j^\infty.$$

Остальные тензорные коэффициенты, включающие компоненты \vec{r} , в данном приближении равны нулю.

4. Динамика частиц и образование агрегатов в продольных полях

Как известно, сила, действующая со стороны сплошной среды на тело Ω , равна

$$F_i = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j dS, \quad (4.1)$$

где $\partial\Omega$ – поверхность Ω , σ_{ij} – компоненты тензора напряжений среды. В рассматриваемом случае этот тензор распадается на гидродинамическую и магнитную компоненты, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{hyd} + \sigma_{ij}^{mag}$, причем [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{hyd} &= -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \sigma_{ij}^{mag} &= \frac{\mu_f}{4\pi} \left(H_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} H_k H_k \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь \vec{u} , p являются решениями задачи (2.6), (2.7), (2.1), а \vec{H} – задачи (2.3), (2.4), (2.1).

Вернемся к уравнениям (2.2). Будем считать, что плотности частиц и жидкости достаточно близки. Это позволит не учитывать массовые силы, приложенные к сферам (силу тяжести и т.д.) так же, как они не учитывались в (2.5). Тогда в соответствии с (4.1) и (4.2)

$$\vec{F}(A) = \vec{F}^{hyd}(A) + \vec{F}^{mag}(A), \quad \vec{F}(B) = \vec{F}^{hyd}(B) + \vec{F}^{mag}(B).$$

Рассмотрим, например, движение сферы A . Характерным масштабом времени служит отношение $a/|\vec{U}|$, поэтому левая часть первого уравнения (2.2) имеет порядок

$$\left| m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt} \right| \sim \frac{4}{3} \pi a^2 \rho_p |\vec{V}^A - \vec{U}| \cdot |\vec{U}|.$$

С другой стороны, из закона Факсена [12] следует, что $|\vec{F}^{hyd}(A)| \sim 6\pi\eta a |\vec{V}^A - \vec{U}|$. Поэтому отношение суммарной силы, действующей на A , к ее гидродинамической составляющей имеет порядок числа Рейнольдса Re :

$$\left| m_A \frac{d\vec{V}^A}{dt} \right| \cdot \frac{1}{|\vec{F}^{hyd}(A)|} \sim \frac{2}{9} \cdot \frac{\rho_p |\vec{U}| a}{\eta}.$$

Однако ранее Re было объявлено пренебрежимо малым. Поэтому и производной от \vec{V}^A в уравнении движения частицы следует пренебречь. Т.о., динамика инородных тел в выбранном приближении описывается уравнениями:

$$\vec{F}^{hyd}(A) + \vec{F}^{mag}(A) = \vec{0}, \quad \vec{F}^{hyd}(B) + \vec{F}^{mag}(B) = \vec{0}. \quad (4.3)$$

Для вычисления магнитной компоненты силы подставим решение (3.1), (3.2), (3.6)–(3.9) в (4.2) и (4.1). После упрощений найдем силу, приложенную к сфере A :

$$\begin{aligned} F_i^{mag}(A) &= -\mu_f [FA^{ext}(A)]^2 H_j^\infty H_k^\infty L_{ijk}(\vec{r}) = \\ &= -\mu_f \left(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p} \right)^2 a^6 \left(6 \frac{H_i^\infty H_j^\infty r_j}{r^5} + 3 \frac{H_j^\infty H_j^\infty r_i}{r^5} - 15 \frac{H_j^\infty H_k^\infty r_j r_k r_i}{r^7} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь значение $FA^{ext}(A)$ взято с точностью до ε^0 .

При $r \rightarrow \infty$ величина $F_i^{mag}(A) \rightarrow 0$, т.е. на одиночную сферу в однородном магнитном поле сила со стороны сплошной среды не действует.

Как было сказано выше, распределение магнитного поля в решаемой задаче должно быть симметрично относительно точки с радиус-вектором $(\vec{r}^A + \vec{r}^B)/2$. Поэтому распределение магнитных напряжений вблизи частицы B также симметрично распределению возле частицы A . Однако вектор внешней нормали \vec{n} в точке на поверхности B направлен противоположно вектору в симметричной точке на поверхности A . Поэтому магнитные силы, приложенные к двум сферам и вычисленные согласно (4.1), противоположны:

$$\vec{F}^{mag}(B) = -\vec{F}^{mag}(A). \quad (4.5)$$

Подробно изучим случай, когда невозмущенные поток и поле направлены вдоль прямой, проходящей через центры сфер: $\vec{U} \parallel r$, $\vec{H}^\infty \parallel r$. Дополнительно будем предполагать, что в некоторый момент времени частицы не вращались и двигались вдоль своей линии центров. Тогда и в произвольный момент времени вращение будет отсутствовать, а частицы продолжают двигаться по указанной прямой:

$$\vec{\Gamma}^A = \vec{\Gamma}^B = \vec{0}, \quad \vec{\omega}^A = \vec{\omega}^B = \vec{0}, \quad \vec{U}^{A\perp} = \vec{U}^{B\perp} = \vec{0}.$$

Поэтому далее заменим все векторы их проекциями на \vec{r} .

Без ограничения общности можно считать, что векторы \vec{r} и \vec{H}^∞ сонаправлены. Тогда из (4.4) следует, что

$$F^{mag}(A) = 6 \frac{\mu_f}{r^4} [FA^{ext}(A)H^\infty]^2 = 6\mu_f \left(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p} \right)^2 \frac{a^6}{r^4} (H^\infty)^2. \quad (4.6)$$

Т.к. $F^{mag}(A) > 0$, то из (4.5) следует, что $\vec{F}^{mag}(B)$ направлена противоположно \vec{r} . Это значит, что однородное магнитное поле, приложенное вдоль линии центров, действует на одинаковые сферические частицы, подобно силе притяжения.

Задача (2.6), (2.7) о парном гидродинамическом взаимодействии тел в сильно вязкой жидкости решена, например, в [5]. Из результатов этой работы следует, что на две одинаковые сферы A и B , движущиеся вдоль линии центров со скоростями U^A и U^B относительно жидкости, действуют гидродинамические силы

$$F^{hyd}(A) = -6\pi\eta a[U^A f^\parallel(\varepsilon) + U^B g^\parallel(\varepsilon)], \quad F^{hyd}(B) = -6\pi\eta a[U^B f^\parallel(\varepsilon) + U^A g^\parallel(\varepsilon)], \quad (4.7)$$

где $f^\parallel(\varepsilon) = 1 + 9\varepsilon^2/4$, $g^\parallel(\varepsilon) = -3\varepsilon/2 - 19\varepsilon^8/8$.

Из (4.3) и (4.5) вытекает, что $F^{hyd}(B) = -F^{hyd}(A)$. Вместе с (4.7) это ведет к соотношениям

$$\begin{aligned} U^B &= -U^A, \\ F^{hyd}(A) &= -6\pi\eta a U^A \chi(\varepsilon), \\ \chi(\varepsilon) &= f^\parallel(\varepsilon) - g^\parallel(\varepsilon) = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{9}{4}\varepsilon^2 + \frac{19}{8}\varepsilon^8. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Скорость тела A относительно жидкости теперь можно определить из (4.3), (4.6) и (4.8):

$$U^A = \frac{\mu_f [FA^{ext}(A)H^\infty]^2}{r^4 \pi \eta a \chi(\varepsilon)}. \quad (4.9)$$

Особенный интерес представляет вопрос о возможности коагуляции частиц взвеси, т.е. об их сближении вплоть до касания. Чтобы сферы в потоке сближались, требуется, чтобы проекция скорости B относительно A на \vec{r} была отрицательна. Обозначим

$$U^{BA} = V^B - V^A = U^B - U^A. \quad (4.10)$$

Тогда относительное движение сфер вдоль линии центров описывается уравнением

$$\frac{dr}{dt} = U^{BA}(r), \quad r(0) = r_0,$$

где r_0 – начальное расстояние между центрами сфер. Касанию частиц и образованию агрегата соответствует значение $r(t) = 2a$.

Исходя из (4.8), (4.9) и (4.10), легко получить, что в рассматриваемом приближении

$$U^{BA}(r) = -2\mu_f \left(\frac{\mu_f - \mu_p}{2\mu_f + \mu_p} \right)^2 \cdot \frac{(H^\infty)^2}{\pi\eta} \cdot \frac{a^5}{r^4 + \frac{3}{2}ar^3 + \frac{9}{4}a^2r^2 + \frac{19}{8}a^3r}.$$

Т.к. $U^{BA}(r) < 0$, то в продольном потоке вязкой магнитной жидкости частицы взвеси будут сближаться вне зависимости от соотношения μ_f и μ_p . Более того, поскольку при $r \geq 2a$ величина $|U^{BA}(r)|$ не обращается в нуль, то в рамках изучаемого приближения сближение сфер до их контакта произойдет за конечное время. Из того, что $|U^{BA}(r)|$ растет при уменьшении r , следует, что это время не превышает величины

$$\frac{r_0 - 2a}{|U^{BA}(r_0)|}.$$

Очевидно, более точная модель поведения инородных сфер должна быть основана на решениях магнитной и гидродинамической задач, содержащих более высокие степени малого параметра ε . В качестве альтернативы при $r \approx 2a$, т.е. вблизи контакта частиц, может быть использовано т.н. приближение смазки.

5. Заключение

В данной статье изучено поведение двух идентичных твердых сфер, помещенных в вязкую магнитную жидкость. При этом предполагается, что магнитное и гидродинамическое взаимодействие частиц могут быть рассмотрены по отдельности друг от друга.

В случае, когда невозмущенное магнитное поле однородно, вычислены искажения, вносимые частицами в распределение напряженности поля, а также силы, действующие на каждую из частиц. Для этого был использован метод мультипольного разложения.

Динамика твердых сфер в однородном потоке жидкости изучена в безынерционном приближении. Показано, что если невозмущенные поток и поле направлены вдоль прямой, соединяющей центры частиц, то сами эти частицы начинают сближаться, причем их касание достигается за конечное время. Это означает, что в продольных (по отношению к линии центров) магнитных полях возможно образование агрегатов из инородных тел, помещенных в жидкость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Einstein, “Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen”, *Annalen der Physik*, **19** (1906), 289–306.

2. G. K. Batchelor, “The stress system in a suspension of force-free particles”, *Journal of Fluid Mechanics*, **41**:3 (1970), 545–570.
3. G. K. Batchelor, J. T. Green, “The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400.
4. G. K. Batchelor, J. T. Green, “The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 ”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:3 (1972), 401–427.
5. С. И. Мартынов, *Взаимодействие частиц в суспензии*, Изд-во Казан. матем. об-ва, Казань, 1998, 135 с.
6. A. A. Zick, G. M. Homsy, “Stokes flow through periodic array of spheres”, *Journal of Fluid Mechanics*, **115** (1982), 13–26.
7. А. Л. Бердичевский, “Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями”, *Доклады АН СССР*, **247**:6 (1979), 1363–1367.
8. С. И. Мартынов, “Влияние образования и разрушения агрегатов на вязкость магнитной жидкости”, *Магнитная гидродинамика*, **25**:1 (1989), 47–52.
9. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*. Т. 1, 6, стер., Лань, СПб., 2004, 528 с.
10. И. П. Борискина, “Взаимодействие частиц в неоднородном магнитном поле”, *Вестник Мордовского университета*, **13**:3–4 (2003), 120–123.
11. А. О. Сыромясов, “Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры”, *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, **4**(3) (2011), 1158–1160.
12. Дж. Хашпель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, М., 1976, 630 с.

Поступила 4.12.2018

MSC2010 76W05, 76D07, 70F05, 35Q35

Pair-wise MHD-interaction of rigid spheres in longitudinal creeping flow

© I. P. Boriskina¹, A. O. Syromyasov²

Abstract. Authors describe and study the mathematical model of two identical rigid spheres immersed in highly viscous fluid with magnetic field acting in it. At infinite distance from suspended particles the flow and the field are uniform. The hypothesis that bulk currents are weak allows to split magnetic and hydrodynamic interactions of the spheres. Distribution of magnetic field is obtained for arbitrary orientation of undisturbed field with respect to line going through the spheres' centers and is written in the form of multipole expansion. This expression is used to calculate magnetic force acting on both particles. Together with known expressions for hydrodynamic forces this result may be applied in study of particle dynamics in uniform flow of viscous magnetic fluid. In the paper particular case of field and flow being parallel to line of centers is examined in more detail. The opportunity of particles' coagulation in such flow is discussed.

Key Words: viscous fluid, Stokes equation, creeping flow, suspended particles, magnetic fluid, hydrodynamic interaction, coagulation.

REFERENCES

1. A. Einstein, "Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", *Annalen der Physik*, **19** (1906), 289–306.
2. G. K. Batchelor, "The stress system in a suspension of force-free particles", *Journal of Fluid Mechanics*, **41**:3 (1970), 545–570.
3. G. K. Batchelor, J. T. Green, "The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field", *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400.
4. G. K. Batchelor, J. T. Green, "The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 ", *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:3 (1972), 401–427.
5. S. I. Martynov, *Vzaimodejstvie chastic v suspenzii [Interaction of particles in a suspension]*, **33**, Kazan Mathematical Society, Kazan, 1998 (In Russ.), 135 p.
6. A. A. Zick, G. M. Homsy, "Stokes flow through periodic array of spheres", *Journal of Fluid Mechanics*, **115** (1982), 13–26.
7. A. L. Berdichevsky, "Ob ehffektivnoj teploprovodnosti sred s periodicheski raspolozhennymi vklyucheniymi [On effective heat conductance of media with periodically located inclusions]", *Doklady AN SSSR [Reports of USSR Academy of Sciences]*, **247**:6 (1979), 1363–1367 (In Russ.).

¹**Irina P. Boriskina**, Associate Professor, Department of Calculus, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3536-5838>, irinaboriskina@mail.ru

²**Aleksei O. Syromyasov**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall1@yandex.ru

8. S. I. Martynov, “Vliyanie obrazovaniya i razrusheniya agregatov na vyazkost’ magnitnoy zhidkosti [Influence of aggregate formation and disruption on the viscosity of magnetic fluid]”, *Magnitnaya gidrodinamika [Magnetohydrodynamics]*, **25**:1 (1989), 47–52 (In Russ.).
9. L. I. Sedov, *Mekhanika sploshnoj sredy [A course in continuum mechanics]*. V. 1, 6, Lan Publishers, St. Petersburg., 2004 (In Russ.), 528 p.
10. I. P. Boriskina, “Vzaimodejstvie chastic v neodnorodnom magnitnom pole [Interaction of particles in non-uniform magnetic field]”, *Mordovia University Bulletin*, **13**:3–4 (2003), 120–123 (In Russ.).
11. A. O. Syromyasov, “Termodinamicheskoe vzaimodejstvie sfericheskikh chastic v srede s postoyannym gradientom temperatury [Thermodynamic interaction of spherical particles in a fluid with constant temperature gradient]”, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, **4(3)** (2011), 1158–1160 (In Russ.).
12. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, 1965.

Submitted 4.12.2018