

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.70-77

УДК 517.958:531.12; 534.11

Вычисление собственных частот поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции© В. Н. Анисимов¹, В. Л. Литвинов²

Аннотация. В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Рассмотренная математическая модель учитывает широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Объект принадлежит к широкому кругу одномерных колеблющихся объектов с движущимися границами. Наличие движущихся границ затрудняет описание таких объектов. В статье введены новые переменные, останавливающие границы. При помощи приближенного метода Галеркина получено алгебраическое уравнение четвертого порядка, позволяющее получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Рассмотренные методы постановки и решения задачи позволяют решить проблемы, возникающие при изучении колебаний объектов с движущимися границами. Полученные результаты исследований могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологических установок по изготовлению кабелей.

Ключевые слова: : колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, резонансные свойства, колебания кабеля, собственные частоты.

1. Введение

В статье исследуются поперечные колебания кабеля на участке наложения на него изоляции. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками [1]–[2]. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъемных установок [3]–[9], гибкие звенья передач [10]–[14], лентопротяжные механизмы [15]–[16], конвейеры [17]–[18] и т. д. Наличие движущихся границ существенно осложняет математическое описание таких объектов, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

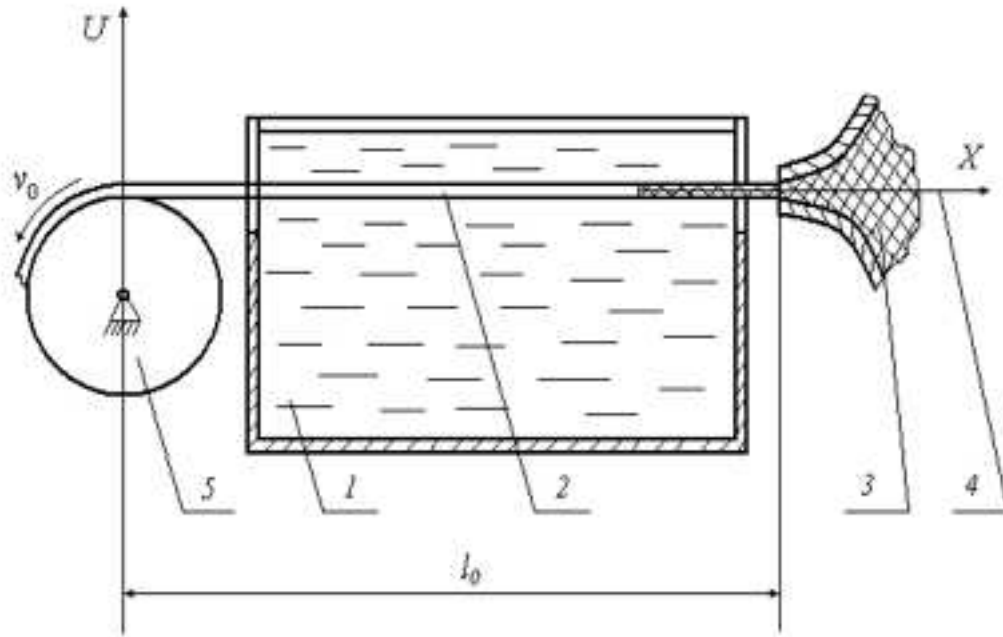
2. Постановка задачи

Схема технологической установки по изготовлению кабелей изображена на рис. 2.1. Здесь в точке $x = l_0$ через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5.

¹Анисимов Валерий Николаевич, заведующий кафедрой Общеуниверситетских дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д. 45.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

²Литвинов Владислав Львович, заместитель заведующего кафедрой Общеуниверситетских дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д. 45.), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

Особенность задачи заключается в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется по длине. Скорость волн, бегущих из точки $x=0$ в точку $x = l_0$, уменьшается, так как уменьшается жесткость струны, поэтому волны концентрируются с приближением к точке $x = l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и среда этим волнам, как указывается в статье [16], оказывает меньшее сопротивление, чем волнам, бегущим в обратном направлении. Указанные факты могут привести к большим амплитудам колебаний вблизи точки $x = l_0$, что нежелательно. Чтобы предотвратить это, необходимо знать собственные частоты колебаний рассматриваемой системы.



Р и с. 2.1

Схема технологической установки по изготовлению кабелей.

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [C(x - \nu_0 t) U_{xx}(x, t)] - \rho U_{tt}(x, t) - \lambda U_t(x, t) - RU_x(x, t) = 0; \quad (2.1)$$

$$U(\nu_0 t, t) = 0; \quad U(\nu_0 t + l_0, t) = 0; \quad U_x(\nu_0 t, t) = 0; \quad U_x(\nu_0 t + l_0, t) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь λ, R – коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x - \nu_0 t)$ – функция, характеризующая изгибную жесткость кабеля; ν_0 – скорость продольного движения кабеля, T – сила натяжения кабеля, ρ – масса единицы длины кабеля.

Если принять

$$R = \lambda \nu_0, \quad (2.3)$$

то на волну $U = \varphi(x - \nu_0 t)$, бегущую со скоростью ν_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют ($F_c = \lambda U_t + RU_x = 0$), что соответствует действительности.

Введем новые переменные:

$$\zeta = x - \nu_0 t; \quad V(\zeta, t) = U(x, t). \quad (2.4)$$

После преобразований, с учетом (2.4), получим задачу с условиями, заданными на неподвижной границе:

$$\begin{aligned} (a^2 - \nu_0^2) V_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [C(\zeta) V_{\zeta\zeta}(\zeta, t)] + 2\nu_0 V_{\zeta t}(\zeta, t) - V_{tt}(\zeta, t) - \frac{\lambda}{\rho} V_t(\zeta, t) &= 0; \\ V(0, t) = 0; \quad V(l_0, t) = 0; \\ V_{\zeta}(0, t) = 0; \quad V_{\zeta}(l_0, t) = 0. \end{aligned}$$

Примем зависимость жесткости от ζ линейной:

$$C(\zeta) = d - b\zeta.$$

Введем в задачу безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\zeta}{l_0} - 0,5; \quad \tau = \frac{at}{l_0}; \quad Z(\xi, \tau) = V(\zeta, t).$$

Окончательная постановка задачи примет вид

$$\begin{aligned} r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + 2r Z_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \\ + (1 - \nu^2) Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) + 2\nu Z_{\xi\tau}(\xi, \tau) - Z_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta Z_{\tau}(\xi, \tau) = 0; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$Z(-0,5; \tau) = 0, \quad Z(0,5; \tau) = 0, \quad Z_{\xi}(-0,5; \tau) = 0, \quad Z_{\xi}(0,5; \tau) = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} r = \frac{b}{\rho l_0 a^2}, \quad \gamma = \frac{0,5b}{\rho l_0 a^2} - \frac{d}{\rho l_0^2 a^2}, \\ \nu = \frac{\nu_0}{a}, \quad \beta = \frac{\lambda l_0}{\rho a}. \end{aligned}$$

Безразмерные параметры характеризуют: ν - скорость продольного движения; r, γ - переменную изгибную жесткость; β - сопротивление внешней среды.

Изоляционная масса выдавливается в жидком виде, поэтому изгибную жёсткость в точке $x = l_0$ можно принять равной нулю. При этом $\gamma = -0,5r$.

3. Приближенное решение задачи методом Галеркина

Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций:

$$Z(\xi, \tau) = \mu(\xi) e^{W\tau}.$$

Тогда для $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} L[\mu(\xi)] \equiv r\xi \mu''''(\xi) + \gamma \mu''''(\xi) + 2r \mu''''(\xi) + (1 - \nu^2) \mu''(\xi) + \\ + 2\nu W \mu'(\xi) - (W^2 + \beta W) \mu(\xi) = 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mu(-0,5) = 0; \quad \mu(0,5) = 0; \quad \mu'(-0,5) = 0; \quad \mu'(0,5) = 0. \quad (3.2)$$

Для определения собственных частот задачи (3.1)-(3.2) воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина [19]–[20]. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu(\xi) = A\varphi_1(\xi) + B\varphi_2(\xi),$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \xi^4 - 0,5\xi^2 + 0,0625, \quad \varphi_2(\xi) = \xi^5 - 0,5\xi^3 + 0,0625\xi$$

– две линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям (3.2) и являющиеся ортогональными на интервале $(-0,5; 0,5)$.

При использовании метода Галеркина коэффициенты A и B следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)] \varphi_1(\xi) d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)] \varphi_1(\xi) d\xi = 0, \\ A \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)] \varphi_2(\xi) d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)] \varphi_2(\xi) d\xi = 0. \end{cases}$$

Здесь оператор L определяется выражением (3.1).

Приравняв нулю определитель системы, после преобразований получим уравнение для собственных частот:

$$\begin{aligned} W^4 + 2\beta W^3 + W^2(\beta^2 - 4465 \cdot \gamma - 12 \cdot \nu^2 + 56) + W[56\beta(1 - \nu^2) - 4465 \cdot \beta\gamma] + \\ + 1996855 \cdot \gamma^2 - 69726 \cdot \gamma(1 - \nu^2) + 528(1 - \nu^2)^2 - 128407 \cdot r^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно-сопряженных корней:

$$W_1 = \omega_{01} \pm i\omega_1, \quad W_2 = \omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Действительные части корней характеризуют затухание свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Уравнение (3.3) решалось в среде MATLAB. В таблице приведены собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров ν и r при $\beta = 0,5$ и $\gamma = -0,5r$.

Таблица 1: Собственные частоты W_1 и W_2 в зависимости от параметров ν и r

$r \backslash \nu$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0	$-0,250 + 3,455i$	$-0,247 + 3,414i$	$-0,237 + 3,294i$	$-0,222 + 3,100i$	$-0,204 + 2,840i$
	$-0,250 + 6,629i$	$-0,253 + 6,641i$	$-0,263 + 6,674i$	$-0,278 + 6,722i$	$-0,297 + 6,775i$
0,1	$-0,250 + 5,573i$	$-0,250 + 5,560i$	$-0,250 + 5,508i$	$-0,250 + 5,420i$	$-0,240 + 5,300i$
	$-0,25 + 15,750i$	$-0,250 + 15,751i$	$-0,250 + 15,760i$	$-0,250 + 15,770i$	$-0,250 + 15,780i$
0,2	$-0,25 + 7,015i$	$-0,250 + 7,002i$	$-0,249 + 6,963i$	$-0,248 + 6,897i$	$-0,246 + 6,805i$
	$0,250 + 21,288i$	$-0,250 + 21,289i$	$-0,251 + 21,294i$	$-0,252 + 21,301i$	$-0,254 + 21,311i$

Анализ таблицы показывает, что частота колебаний (мнимая часть комплексно-сопряженных корней) увеличивается с увеличением r (характеризует изгибную жёсткость) и уменьшением ν (характеризует скорость продольного движения). Действительные части корней, характеризующие затухание, от r и ν зависят слабо.

Заметим, что если W_n безразмерная частота для задачи (2.5)-(2.6), то частота ω_n для исходной задачи (2.1)-(2.2) находится по формуле: $\omega_n = \frac{aW_n}{l_0}$.

4. Заключение

Рассмотренная математическая модель позволяет учесть широкий круг факторов, влияющих на колебания: продольное движение, переменную изгибную жесткость, сопротивление внешней среды, натяжение кабеля. Полученное уравнение собственных частот позволяет с использованием стандартных программных средств получить две первые собственные частоты колебаний кабеля. Полученные результаты могут быть использованы для обеспечения надежной работы технологической установки по изготовлению кабелей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Математические модели нелинейных продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»*, **19:2** (2015), 382–397.
2. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами”, *Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия), СамГТУ, Самара, 2017, 35–39.
3. О. А. Горошко, Г. Н. Савин, *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наукова думка, Киев, 1971, 270 с.
4. А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами*, Физматлит, М., 2001, 320 с.
5. S. M. Sahebkar, M. R. Ghazavi, S. E. Khadem, M. H. Ghayesh, “Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well”, *Mech. and Mach. Theory*, **46:5** (2011), 743–760.
6. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении”, *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, **19:4** (2017), 161–165.
7. W. D. Zhu, Y. Chen, “Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control”, *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **128:1** (2006), 66–78.
8. А. И. Весницкий, А. И. Потапов, “Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках”, *Динамика систем*, **7** (1975), 84–89.
9. Л. О. Кечеджиян, Н. А. Пинчук, А. М. Столяр, “Об одной задаче математической физики с подвижной границей”, *Извест. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*, **1** (2008), 22–27.
10. А. А. Лежнева, “Изгибные колебания балки переменной длины”, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, **1** (1970), 159–161.
11. W. D. Zhu, N. A. Zheng, “Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation”, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **75:3** (2008), 031003.

12. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении”, «*Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ*» имени Е.В. Воскресенского, Материалы VIII Международной научной молодежной школы-семинара, Средне-Волжское математическое общество, Саранск, 2018, 120–125.
13. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость”, *Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций*, Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1, СамГТУ, Самара, 2008, 38–42.
14. В. С. Тихонов, А. А. Абрамов, “Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке”, *Вестник МГУ. Сер. 1*, **5** (1993), 45–48.
15. К. И. Рагульский, “Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов”, *В сб.: Динамика машин*, Наука, М., 1971, 169–177.
16. Ю. П. Самарин, “Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве”, *Прикладная математика и механика*, **26**:3 (1964), 77–80.
17. В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, Е. Е. Лисенкова, “Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой”, *Вестник научно-технического развития*, **62**:6 (2013), 18–29.
18. Kotera Tadashi, “Vibration of a string with time-varying length”, *Bulleten Japan Society of Mechanical Engineers*, **21**:162 (1978), 1677–1684.
19. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, И. В. Корпен, “Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах”, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, **2** (2018), 70–77.
20. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **329**:17 (2010), 3484–3494.

Поступила 15.12.2018

MSC2010 35R37; 35G30, 35Q70

Calculation of the natural frequencies of the transverse of cable oscillations at the area of application of insulation

© V.N. Anisimov ¹, V.L. Litvinov ²

Abstract. Researches the transverse vibrations of the cable in the area where the insulation is applied to it. The considered mathematical model takes into account a wide range of factors affecting the oscillations: longitudinal motion, variable bending stiffness, environmental resistance, cable tension. The object belongs to a wide range of one-dimensional objects with moving boundaries. Moving boundaries complicate the description of such objects. The article introduces new variables that stop the boundaries. In this paper, using the Galerkin method, a fourth-order algebraic equation is obtained, which makes it possible to obtain two first natural frequencies of cable oscillations. The considered methods of statement and solution of the problem allow to solve the problems arising in the study of oscillations of objects with moving boundaries. Results can be used to ensure reliable operation of the technological installation for the manufacture of cables.

Key Words: oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, resonant properties, cable oscillations, natural frequencies.

REFERENCES

1. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders”, *Vestn. Samar. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **19**:2 (2015), 382–397 (In Russ.).
2. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Comparative analysis of linear and nonlinear models describing oscillations of systems with moving boundaries”, *Proceedings of the X All-Russian Conference on Solid Mechanics* (September 18–22, 2017, Samara, Russia), Samara State Technical University, Samara, 2017, 35–39 (In Russ.).
3. O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Introduction in mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length*, Naukova Dumka, Kiev, 1971 (In Russ.), 270 p.
4. A. I. Vesnitskii, *Vaves in systems with moving boundaries and loads*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.
5. S. M. Sahebkar, M. R. Ghazavi, S. E. Khadem, M. H. Ghayesh, “Nonlinear vibration analysis of an axially moving drill string system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well”, *Mech. and Mach. Theory*, **46**:5 (2011), 743–760.
6. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction”, *News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, **19**:4 (2017), 161–165 (In Russ.).
7. W. D. Zhu, Y. Chen, “Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control”, *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **128**:1 (2006), 66–78.

¹**Valeriy N. Anisimov**, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran’, Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

²**Vladislav L. Litvinov**, Deputy Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran’, Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Technical), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

8. A. I. Vesnitsky, A. I. Potapov, “Transverse oscillations of ropes in mine hoists”, *Dynamics of systems*, **7** (1975), 84–89 (In Russ.).
9. L. O. Kechedgiyan, N. A. Pinchuk, A. M. Stolyar, “A problem of mathematical physics with moving boundary”, *Vest. Vuzov North-Kaukaz. Region. Natural Sciences*, **1** (2008), 22–27 (In Russ.).
10. A. A. Lezhneva, “Bending vibration of beam of variable length”, *Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanics of solidstate*, **1** (1970), 159–161 (In Russ.).
11. W. D. Zhu, N. A. Zheng, “Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation”, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **75**:3 (2008), 031003.
12. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Investigation of lateral vibrations of a rope moving in the longitudinal direction”, *Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes” named after E. V. Voskresensky*, Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar, Middle Volga Mathematical Society, Saransk, 2018, 120–125 (In Russ.).
13. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Calculation of natural frequencies of transverse vibrations of a viscoelastic rope moving in the longitudinal direction and having flexural rigidity”, *Mathematical modeling and boundary value problems*, Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 1, Samara State Technical University, Samara, 2008, 38–42 (In Russ.).
14. V. S. Tikhonov, A. A. Abramov, “Transverse oscillations of a flexible thread of variable length in the flow”, *Vestnik MGU. Ser. 1*, **5** (1993), 45–48 (In Russ.).
15. K. I. Ragulsky, “Voprosy dinamiki pretsizionnykh lentoprotiazhnykh mekhanizmov [Questions of dynamics of precision tape drive mechanisms]”, *Dynamics of cars*, Nauka Publ., M., 1971, 169—177 (In Russ.).
16. Yu. P. Samarin, “Ob odnoi nelineinoy zadache dlia volnovogo uravneniia v odnomernom prostranstve [About one nonlinear task for the wave equation in one-dimensional space of]”, *Applied mathematics and mechanics*, **26**:3 (1964), 77–80 (In Russ.).
17. V. I. Erofeev, D. A. Kolesov, E. E. Lisenkova, “Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load”, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, **62**:6 (2013), 18–29 (In Russ.).
18. Kotera Tadashi, “Vibration of a string with time-varying length”, *Bulleten Japan Society of Mechanical Engineers*, **21**:162 (1978), 1677–1684.
19. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, I. V. Korpen, “Use of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries”, *News of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*, **2** (2018), 70–77 (In Russ.).
20. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **329**:17 (2010), 3484–3494.

Submitted 15.12.2018