DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.48-59

УДК 517.954

Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией

© **А. А. Сарсенби**[1]

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией. Доказана единственность решения задачи. Показана некорректность смешанной задачи с краевыми условиями типа Дирихле для этого уравнения. Методом Фурье получена спектральная задача для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом положительных и отрицательных собственных значений. Построена функция Грина полученного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией. Установлена равномерная оценка функции Грина при достаточно больших значениях спектрального параметра. Доказано существование функции Грина дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом. Методом оценки функции Грина доказана полнота собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом. В классе полиномов доказано существование разложения решения изучаемой некорректной задачи по собственным функциям.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, метод Фурье, функция Грина, собственные функции, базис.

1. Введение

В работах [1]–[2] рассмотрены различные задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией. Следует отметить, что спектральные задачи с инволюцией изучены сравнительно мало. В работах [3]–[5] рассмотрены спектральные задачи для дифференциальных уравнений первого порядка. В последние годы появились работы, посвященные изучению спектральных задач для дифференциальных уравнений второго и высшего порядков с инволюцией (см., например, [6]–[11]), исследованию функции Грина краевых задач для одномерных дифференциальных уравнений с инволюцией [12]. Обратные задачи для уравнений в частных производных с инволюцией рассмотрены в работах [13]–[14]. Работа [15] посвящена изучению интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера с инволюцией, решение которого может быть тесно связано с обратными задачами по восстановлению потенциала одномерного уравнения Шредингера (некоторые аспекты этой теории можно посмотреть в работе [16]).

Корректность смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией рассматривались в работе [17] в следующей постановке:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_x u(x,t) + q(x)\, u(x,t)\,,\ -1 < x < 1,\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x)\,, \tag{1.1}$$

где A_x – некоторый полуограниченный дифференциальный оператор второго порядка с инволюцией, действующий по переменной x. Заметим, что преобразование S функции $f(x)$ из класса $L_2(-1,1)$ называют инволюцией, если $(S^2 f)(x) = f(x)$. В частности, преобразование вида $(Sf)(x) = f(-x)$ является инволюцией.

[1]**Сарсенби Абдисалам Абдижаханулы**, докторант кафедры математики, «Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова» (160012, Казахстан, г. Шымкент, пр. Таукехана, 5), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1667-3010, abdisalam@mail.ru

В настоящей заметке рассматривается смешанная задача (1.1) с оператором A_x, порожденным соотношениями вида

$$A_x y = -y''(-x) + q(x)\,y(x)\,,\ -1 < x < 1,\ y(-1) = 0,\ y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Оператор A_x (при $q(x) \equiv 0$) имеет бесконечное число положительных и отрицательных собственных значений. Это означает, что оператор в правой части изучаемого уравнения (1.1) не является полуограниченным. Поэтому обсуждается вопрос о некорректности смешанных задач (1.1)–(1.2) для уравнения параболического вида с инволюцией. Изучены вопросы полноты собственных функций оператора A_x вида (1.2). Найдены достаточные условия на начальные данные, когда изучаемая задача имеет единственное решение. Найдено представление решения в виде частичных сумм ряда Фурье по собственным функциям. Доказано, что множество таких начальных функций всюду плотно в пространстве $L_2(-1,1)$.

Уравнение (1.1) мы называем уравнением типа теплопроводности с инволюцией, указывая лишь на внешнее сходство его с известным уравнением математической физики.

Необходимым условием существования решения задачи (1.1)–(1.2) является согласованность начальных данных с уравнением (1.1) и краевыми условиями (1.2). Поэтому мы будем требовать, что $\varphi(x) \in C^2[-1,1]$ и $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

Говорят, что задача (1.1)–(1.2) поставлена корректно, если

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственно;

3) решение задачи непрерывно зависит от начальных данных (устойчиво).

Применение метода Фурье к задаче (1.1)–(1.2) приводит к спектральной задаче с инволюцией:

$$-X''(-x) + q(x)\,X(x) = \lambda X(x)\,,\ \ -1 < x < 1,\quad X(-1) = X(1) = 0. \tag{1.3}$$

2. Некорректность смешанной задачи (1.1)–(1.2)

При $q(x) \equiv 0$ спектральная задача (1.3) – самосопряженная и имеет две серии собственных значений: $\lambda_{k1} = -k^2\pi^2,\ \lambda_{k2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2$. Им соответствуют собственные функции $X_{k1}(x) = \sin k\pi x,\ k = 1, 2, , ,; X_{k2}(x) = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x,\ \ k = 0, 1, 2, ...$; которые образуют полную ортонормированную систему в классе $L_2(-1,1)$.

Стандартным способом выписывается формальное решение смешанной задачи (1.1)–(1.2) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{\lambda_{k1}} A_k e^{-\lambda_{k1}t} sink\pi x + \sum_{\lambda_{k2}} B_k e^{-\lambda_{k2}t}\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x, \tag{2.1}$$

где

$$A_k = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x)\, sink\pi x dx, \qquad B_k = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x dx. \tag{2.2}$$

Если последовательность $\left\{A_k e^{-\lambda_{k1}t}\right\}$ не убывает с достаточной быстротой при каждом фиксированном $t > 0$, то первый ряд в (2.1) расходится ввиду $\lambda_{k1} < 0$. Поэтому в случае общих начальных данных смешанная задача (1.1)–(1.2) может не иметь решения. В случае существования решения оно не обладает свойством устойчивости, т. е. не зависит непрерывно от начальных данных. Например, возмущение

$$u_\delta(x,t) = \varepsilon e^{-\lambda_{k1}t}\sin k\pi x$$

не превосходит числа ε при $t = 0$, но будет большим любого наперед заданного числа C_0 для $t = \delta$ при достаточно малых ε и δ и достаточно большом k. Таким образом, смешанная задача (1.2) для уравнения типа теплопроводности с инволюцией (1.1) поставлена некорректно. Тем не менее, можно показать, что в зависимости от начальной функции решение изучаемой смешанной задачи существует и единственно.

3. Разрешимость смешанной задачи (1.1)–(1.2) в случае $q(x) \equiv 0$

Прежде всего покажем единственность решения смешанной задачи.

Теорема 3.1 *Если решение смешанной задачи* (1.1)–(1.2) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Любое решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.2) как функция от x представимо в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{k1}(t)\, sink\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} T_{k2}(t)\, cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x$$

по ортонормированному базису $\{X_k(x)\} = \left\{X_{k1} = sink\pi x,\, X_{k2} = \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}$. Поскольку этот ряд сходится в смысле нормы пространства $L_2(-1,1)$, то он сходится и в смысле скалярного произведения. Поэтому

$$T_{k1}(t) = (u(x,t), sink\pi x), \quad T_{k2}(t) = \left(u(x,t), cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

Эти два равенства запишем вкратце в виде

$$T_k(t) = (u(x,t), X_k(x)). \tag{3.1}$$

Умножив скалярно на $X_k(x)$ обе части уравнения (1.1), получим равенство

$$(u_t,\, X_k) = (u_{xx}(-x,t), X_k).$$

Правую часть полученного равенства два раза интегрируем по частям, а в левой части используем правило дифференцирования по параметру t под знаком интеграла. Учитывая уравнение (1.3), получим соотношение $\dfrac{\partial}{\partial t}(u, X_k) = \lambda_{k1}(u(x,t), X_k)$. В данное равенство подставим (3.1). В результате получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$T'_k(t) = -\lambda_k T_k(t), \;\; T_k(0) = (\varphi,\, X_k).$$

Начальное условие получено из (3.1) при $t = 0$. В силу единственности решения задачи Коши $T_k(t)$ определяются единственным образом. Этим доказывается единственность решения задачи (1.1)–(1.2). Теорема 3.1 доказана.

Теперь покажем классы допустимых начальных функций $\varphi(x)$, для которых задача (1.1)–(1.2) имеет решение. Сначала покажем, что ряд (2.1) является решением задачи (1.1)–(1.2), если все коэффициенты A_k равны нулю.

Т е о р е м а 3.2 *Если начальная функция $\varphi(x)$ является нечетной, принадлежит классу $C^2[-1,1]$ и удовлетворяет условиям $\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$, то решение задачи* (1.1)–(1.2) *существует, единственно и представимо в виде ряда (2.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi(x)$ – нечетная функция, то все коэффициенты Фурье A_k вида (2.2) равны нулю. Поэтому ряд (2.1) принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k e^{-(k+0,5)^2\pi^2 t}\cos(k+0,5)\pi x \tag{3.2}$$

Теорема будет доказана, если ряд (3.2) сходится при любом $t>0$ и его можно почленно дифференцировать один раз по переменной t и два раза по переменной x. Последние две операции возможны при условии равномерной сходимости ряда

$$-\sum_{k=0}^{\infty}B_k(k+0,5)^2\pi^2 e^{-(k+0,5)^2\pi^2 t}\cos(k+0,5)\pi x \tag{3.3}$$

для всех $t>0$. Равномерная сходимость ряда (3.3) доказывается так же, как и в случае классического уравнения параболического типа (см., например, [18]). Сходимость ряда (3.2) будет следовать из сходимости мажорантного ряда

$$\|x(t:t_0,x_0)\|\le K_{D_1}e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||x_0||,\qquad t\ge t_0. \tag{3.4}$$

Сходимость ряда (3.4) доказывается так же, как доказывается абсолютная и равномерная сходимость классического ряда Фурье по тригонометрической системе [18]. Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.2) существует, единственно и представимо в виде ряда (3.2). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2), где начальная функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{N_1}a_k sink\pi x+\sum_{k=0}^{N_2}b_k co\,\mathrm{s}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x. \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 3.3 *Если начальная функция $\varphi(x)$ является тригонометрическим полиномом вида* (3.5)*, то решение задачи* (1.1)–(1.2) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{N_1}A_k sink\pi x\, e^{k^2\pi^2 t}+\sum_{k=0}^{N_2}B_k cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\, e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 t},$$

где

$$A_k=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,sink\pi x dx,\quad k=1,2,...,N_1;$$

$$B_k=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,co\,\mathrm{s}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x dx,\ \ k=0,1,2,...,N_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы вытекает из равенства нулю коэффициентов $A_k=0,\quad k=N_1+1,\ N_1+2\,...,\quad B_k=0,\quad k=N_2+1,\ N_2+2,\ ...$ и Теоремы 3.1. Теорема 3.3 доказана.

Поскольку множество тригонометрических полиномов по полной ортонормированной системе $\{X_{k1},\, X_{k2}\}$ всюду плотно в $L_2(-1,1)$, то из Теоремы 3.3 вытекает

Теорема 3.4 *Множество допустимых начальных функций, для которых смешанная задача* (1.1)–(1.2) *разрешима, всюду плотно в* $L_2\,(-1,1)$.

4. Полнота системы собственных функций спектральной задачи (1.3)

Хорошо известно, что применение метода Фурье к задаче (1.1)–(1.2) приводит к спектральной задаче (1.3). Для доказательства полноты системы собственных функций спектральной задачи (1.3) мы построили функцию Грина краевой задачи (1.3) при $q\,(x) \equiv 0$. С помощью равномерной оценки построенной функции Грина доказываем существование функции Грина общей краевой задачи (1.3). Полученные оценки функции Грина позволяют применить теорему М. А. Наймарка [19] о полноте собственных функций.

Функцией Грина краевой задачи (1.3) при $q\,(x) \equiv 0$ мы называем такую функцию $G\,(x,t,\lambda)$, что функция $X\,(x) = \int\limits_{-1}^{1} G\,(x,t,\lambda)\, f\,(t)\, dt$ является решением неоднородной краевой задачи

$$-X''\,(-x) = \lambda X\,(x) + f\,(x)\,, \quad X\,(-1) = X\,(1) = 0.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что при $\lambda \neq \lambda_{ki}$, $i = 1,2$ функцией Грина краевой задачи (1.3) при $q\,(x) \equiv 0$ является функция вида

$$G\,(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\left\{\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{e^{i\rho}+e^{-i\rho}}\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\right\} + g\,(x,t,\lambda)\,,$$

где $\rho = \sqrt{\lambda}$,

$$g\,(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\begin{cases} -i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)+\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right),\ t \leq -x; \\ i\left(e^{i\rho t}+e^{-i\rho t}\right)\left(e^{i\rho x}-e^{-i\rho x}\right)-\left(e^{\rho t}-e^{-\rho t}\right)\left(e^{\rho x}+e^{-\rho x}\right),\ t \in [-x,x]\,; \\ i\left(e^{i\rho x}+e^{-i\rho x}\right)\left(e^{i\rho t}-e^{-i\rho t}\right)-\left(e^{\rho x}-e^{-\rho x}\right)\left(e^{\rho t}+e^{-\rho t}\right),\ t > x. \end{cases}$$

В комплексной ρ-плоскости рассмотрим окружности

$$C_{k1}:\,|\rho| = k\pi + \frac{1}{4};\ C_{k2}:\,|\rho| = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{1}{4}$$

с общим центром в начале координат. Эти окружности не пересекаются и не содержат собственных значений оператора A_x с нулевым коэффициентом. Обозначим через $O_\varepsilon\,(\rho_{ki})\,,\, i = 1,2$, малые окрестности величин $\rho_{k1},\ \rho_{k2}$. Пусть

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2,\ \rho_0 = \min\left(|\rho_1|\,, |\rho_2|\right).$$

Лемма 4.1 *Для функции Грина краевой задачи* (1.3) *с нулевым коэффициентом справедлива следующая равномерная оценка:*

$$|G(x,t,\lambda)| \le \frac{C}{\rho}\left(e^{-\rho_0||x|-|t||} + e^{-\rho_0(2-||x|-|t||)}\right) \tag{4.1}$$

при достаточно больших $|\rho|$, *таких что* $\rho \notin O_\varepsilon(\rho_{ki})$, $i = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $t \le -x$ функцию Грина можно переписать в виде

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{8\rho}\left[\left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}+1\right)\left(e^{\rho(x+t)}-e^{-\rho(x-t)}\right) - \left(\frac{e^{\rho}+e^{-\rho}}{e^{\rho}-e^{-\rho}}-1\right)\left(e^{\rho(x-t)}-e^{-\rho(x+t)}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{8\rho}\left[\left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)}-i\right)\left(e^{i\rho(x+t)}+e^{-i\rho(x-t)}\right) + \left(\frac{e^{i\rho}-e^{-i\rho}}{i\left(e^{i\rho}+e^{-i\rho}\right)}+i\right)\left(e^{i\rho(x-t)}+e^{-i\rho(x+t)}\right)\right].$$

Из этого равенства следует неравенство

$$|G(x,t,\lambda)| \le= \frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}\left(e^{\rho_1(x+t)}-e^{-\rho_1(x-t)}\right) - \frac{e^{-\rho_1}}{e^{\rho_1}-e^{-\rho_1}}\left(e^{\rho_1(x-t)}-e^{-\rho_1(x+t)}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{4|\rho|}\left[\frac{e^{-\rho_2}}{e^{\rho_2}+e^{-\rho_2}}\left(e^{-\rho_2(x+t)}+e^{\rho_2(x-t)}\right) + \frac{e^{\rho_2}}{e^{\rho_2}+e^{-\rho_2}}\left(e^{-\rho_2(x-t)}+e^{\rho_2(x+t)}\right)\right].$$

Отсюда следует утверждение леммы в случае $t \le -x$. Аналогичным образом убеждаемся в справедливости леммы при $-x \le t \le x$ и $t > x$. Лемма доказана.

Обозначим через $G_q(x,t,\lambda)$ функцию Грина краевой задачи (1.3) с непрерывным коэффициентом $q(x)$, а $G(x,t,\lambda)$ – функцию Грина той же задачи с нулевым коэффициентом. Поскольку почти всюду на интервале $(-1,1)$ выполняются соотношения

$$-\frac{\partial^2 G(-x,t,\lambda)}{\partial x^2} = \lambda G(x,t,\lambda),$$

$$-\frac{\partial^2 G_q(-x,t,\lambda)}{\partial x^2} + q(x)\, G_q(x,t,\lambda) = \lambda G_q(x,t,\lambda),$$

то почти всюду на этом интервале выполняется равенство

$$\left(G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right)''_{x=-x} + \lambda\left(G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda)\right) = -q(x)\, G_q(x,t,\lambda).$$

Поэтому вне полюсов функций $G_q(x,t,\lambda)$ и $G(x,t,\lambda)$ имеет место следующее равенство:

$$G_q(x,t,\lambda) - G(x,t,\lambda) = \int_{-1}^{1} G(x,s,\lambda)\, q(s)\, G_q(s,t,\lambda)\, ds. \tag{4.2}$$

Если решение $G_q(x,t,\lambda)$ интегрального уравнения (4.2) существует, то оно будет функцией Грина краевой задачи (1.3). Поэтому существование функции Грина краевой задачи сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 4.1 *Если функция* $q(x)$ *непрерывна и* $\rho \ne \rho_{k1}$, $\rho \ne \rho_{k2}$, *то для достаточно больших* $|\rho|$ *решение* $G_q(x,t,\lambda)$ *интегрального уравнения* (4.2) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_{q0}(x,t,\lambda)=0$, и

$$G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G(x,t,\lambda)=\int\limits_{-1}^{1}G(x,s,\lambda)\,q(s)\,G_{qp}(s,t,\lambda)\,ds. \qquad (4.3)$$

Согласно Лемме 4.1 для функции Грина $G(x,t,\lambda)$ краевой задачи с нулевым коэффициентом справедлива оценка

$$|G(x,t,\lambda)|\le\frac{C}{|\rho|}r(x,t), \qquad (4.4)$$

где

$$r(x,t)=e^{-\rho_0||x|-|t||}+e^{-\rho_0(2-||x|-|t||)},\ \rho=\rho_1+i\rho_2,\ \rho_0=\min(|\rho_1|,|\rho_2|).$$

Из уравнения (4.3) при $p=0$ следует справедливость оценки (4.4) и для функции $G_{q1}(x,t,\lambda)$. Пользуясь неравенством (4.4) и этим замечанием, введем обозначение

$$\max|G_{q1}(x,t,\lambda)|\,|\rho|\,r^{-1}(x,t)=C_0,\ \max|G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G_{qp}(x,t,\lambda)|\,|\rho|\,r^{-1}(x,t)=C_p, \qquad (4.5)$$

где максимум берется во всем $x\in[-1,1]$, для каждого фиксированного t и для достаточно больших $|\rho|$, $\rho\neq\rho_{k1},\ \rho\neq\rho_{k2}$. Покажем, что для произвольного числа p введенные величины удовлетворяют неравенствам

$$C_j\le\frac{C}{2^j},\ j=0,1,...,p. \qquad (4.6)$$

При $j=0$ оценка (4.6) следует из оценки (4.4) для функции$G_{q1}(x,t,\lambda)$. Допустим справедливость оценки (4.6) при $j=1,2,...,p$ и докажем справедливость оценки (4.6) при $j=p+1$. Тогда получим справедливость оценки (4.6) для любого числа p. Пользуясь соотношением (4.3) из (4.5), получим неравенство

$$C_{p+1}\le CC_p|\rho|^{-1}\max\int\limits_{-1}^{1}r(x,s)\,r(s,t)\,r^{-1}(x,t)\,|q(s)|\,ds. \qquad (4.7)$$

Заметим, что

$$r(x,s)\,r(s,t)\le 2r(x,t).$$

Это следует из неравенств

$$||x|-|t||\le||x|-|s||+||s|-|t||,$$

$$2-||x|-|t||\le 2-||x|-|s||+||s|-|t||,$$

$$2-||x|-|t||\le 2+||x|-|s||-||s|-|t||,$$

$$4-||x|-|s||-||s|-|t||\ge||x|-|t||.$$

Поэтому из (4.7) вытекает оценка

$$C_{p+1}\le 2CC_p|\rho|^{-1}\int\limits_{-1}^{1}|q(s)|\,ds.$$

При достаточно больших $|\rho|$ можно считать $2C|\rho|^{-1}\int\limits_{-1}^{1}|q(s)|\,ds<\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$C_{p+1}\leq\frac{C_p}{2}\leq\frac{C}{2^{p+1}}.$$

Таким образом неравенство (4.6) доказано. Далее из (4.5) и (4.6) следует, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\left(G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G_{qp}(x,t,\lambda)\right)$$

сходится равномерно, и последовательность его частичных сумм имеет вид

$$S_n(x)=G_{qp+1}(x,t,\lambda)-G_{q1}(x,t,\lambda).$$

Из сходимости этой последовательности вытекает равномерная сходимость последовательности $\{G_{qp+1}(x,t,\lambda)\}$к пределу $G_q(x,t,\lambda)$. Теорема доказана.

Справедливость теоремы 4.1 для случае обыкновенных дифференциальных операторов показана в работе [20].

Из доказательства теоремы вытекает равномерная оценка вида (4.4) функции Грина $G_q(x,t,\lambda)$ краевой задачи (1.3):

$$|G_q(x,t,\lambda)|\leq\frac{C}{|\rho|}r(x,t). \tag{4.8}$$

На основании оценки (4.8) и теоремы о полноте М.А. Наймарка [19] убеждаемся в справедливости теоремы о полноте собственных функций спектральной задачи (1.3).

Теорема 4.2 *Если функция $q(x)$ непрерывна, то система собственных функций оператора A_x вида* (1.2) *полна в пространстве $L_2(-1,1)$.*

Следствием самосопряженности спектральной задачи (1.3) при непрерывном вещественном $q(x)$ является

Теорема 4.3 *Если функция $q(x)$ непрерывна и вещественна, то система собственных функций оператора A_x вида* (1.2) *образует полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(-1,1)$.*

5. Разрешимость смешанной задачи (1.1)–(1.2) в общем случае

Собственные функции спектральной задачи (1.3), соответствующие собственным значениям λ_k, обозначим через $X_k(x)$. Справедлива следующая

Теорема 5.1 *Если в уравнении* (1.1) *коэффициент $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, начальная функция $\varphi(x)$ является полиномом вида*

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}a_kX_k(x),$$

то решение задачи (1.1), *с оператором* A_x *вида* (1.2) *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

где

$$A_k = \int_{-1}^{1} \varphi(x) X_k(x)\, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы очевидно в силу плотности множества полиномов по полной ортонормированной системе $X_k(x)$в классе $L_2(-1,1)$, для смешанной задачи (1.1), с оператором A_x вида (1.2).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке КН МОН РК, грант AP05131225.

Список литературы

1. D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument:an algebraic approach*, PWN Elsevier, Amsterdam, Warszawa, 1973, 354 p.

2. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, PWN Elsevier, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 410 p.

3. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. Sarsenbi, "Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution", *Abstract and Applied Analysis 2012*, 2012, № 4, Article ID 590781. DOI: https//doi.org/10.1155/2012/590781.

4. M. Sh. Burlutskaya, "Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions", *Comput. Mathematics and Math. Physics*, **54**:1 (2014), 3–12.

5. A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, E. A. Romanova, "Spectral analysis of a differential operator with an involution", *Journal of Evolution Equations*, **17**:2 (2017), 669–684.

6. A. M. Sarsenbi, "Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator", *Differential Equations*, **46**:4 (2010), 509–511.

7. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of a nonlocal problem for second order differential equation with an involution", *Differential Equations*, **51**:8 (2015), 990–996.

8. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**:278 (2015), 1–9.

9. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution", *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 33–46.

10. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data", *Filomat*, **32**:3 (2018), 1069–1078. DOI: https//doi.org/10.2298/FIL1803069K.

11. А. А. Сарсенби, “Полнота и базисность собственных функций спектральной задачи с инволюцией”, *Математический журнал*, **17**:2(64) (2017), 175–183.

12. A. Cabada, F. A. F. Tojo, “On linear differential equations and systems with reflection”, *Appl. Math. Comp.*, **305** (2017), 84–102.

13. M. Kirane, N. Al-Salti, “Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation”, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9** (2016), 1243–1251.

14. A. A. Sarsenbi, “On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution”, *AIP Conference Proceedings*, **1880** (2017), 040021. DOI: https//doi.org/10.1063/1.5000637.

15. M. J. Ablowitz, H. Z. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear Schredinger equation”, *Physical Review Letters*, **110** (2013), 064105. DOI: https//doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.064105.

16. А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев, “Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма-Лиувилля”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **20**:2 (2018), 148–158.

17. A. Ashyralyev, A. Sarsenbi, “Well-posedness of a parabolic equation with involution”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38**:10 (2017), 1295–1304 DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1972, 736 с.

19. М. А. Наймарк, “О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве”, *Доклады Академии наук СССР*, **98**:5 (1954), 727–730.

20. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Иностранная литература, М., 1958, 474 с.

Поступила 7.12.2018

MSC2010 34M03, 34L10

The ill-posed problem for the heat transfer equation with involution

© **A. A. Sarsenbi**[1]

Abstract. A mixed problem for an equation of heat transfer with involution is considered. The uniqueness of the problem's solution is proved. The ill-posedness of the mixed problem with Dirichlet-type boundary conditions for this equation is shown. By application of Fourier method, we obtain a spectral problem for a second-order differential operator with involution with an infinite number of positive and negative eigenvalues. The Green function of obtained second-order differential operator with involution is constructed. Uniform estimate of the Green's function is established for sufficiently large values of the spectral parameter. The existence of the Green's function of a second-order differential operator with involution and with variable coefficient is proved. By estimation of the Green's function completeness of the eigenfunctions's system for operator discussed is proved. In the class of polynomials the existence of a solution of this ill-posed problem is proved.

Key Words: differential equation with involution, Fourier method, Green's function, eigenfunctions, basis.

References

1. D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument:an algebraic approach*, PWN Elsevier, Amsterdam, Warszawa, 1973, 354 p.
2. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, PWN Elsevier, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1993, 410 p.
3. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. Sarsenbi, "Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution", *Abstract and Applied Analysis 2012*, **1**:4 (2012), Article ID 590781. DOI: https//doi.org/10.1155/2012/590781.
4. M. Sh. Burlutskaya, "Mixed problem for a first order partial differential equations with involution and periodic boundary conditions", *Comput. Mathematics and Math. Physics*, **54**:1 (2014), 3–12.
5. A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, E. A. Romanova, "Spectral analysis of a differential operator with an involution", *Journal of Evolution Equations*, **17**:2 (2017), 669–684.
6. A. M. Sarsenbi, "Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator", *Differential Equations*, **46**:4 (2010), 509–511.
7. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of a nonlocal problem for second order differential equation with an involution", *Differential Equations*, **51**:8 (2015), 990–996.
8. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Basicity in Lp of root functions for differential equations with involution", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2015**:278 (2015), 1–9.

[1]**Abdisalam A. Sarsenbi**, doctoral candidate of Department of Mathematics, M. Auezov South Kazakhstan State University (5 Taukehan Av., Shymkent 160012, Kazakhstan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1667-3010, abdisalam@mail.ru

9. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution", *Differential Equations*, **53**:1 (2017), 33–46.

10. L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi, "Equiconvergence property for spectral expansions related to perturbations of the operator $-u''(-x)$ with initial data", *Filomat*, **32**:3 (2018), 1069–1078. DOI: https//doi.org/10.2298/FIL1803069K.

11. A. A. Sarsenbi, "[Completeness and basicity of the eigenfunctions of the spectral problem with involution]", *Matematicheskiy zhurnal*, **17**:2(64) (2017), 175–183 (In Russ.).

12. A. Cabada, F. A. F. Tojo, "On linear differential equations and systems with reflection", *Appl. Math. Comp.*, **305** (2017), 84–102.

13. M. Kirane, N. Al-Salti, "Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9** (2016), 1243–1251.

14. A. A. Sarsenbi, "On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution", *AIP Conference Proceedings*, **1880** (2017), 040021. DOI: https//doi.org/10.1063/1.5000637.

15. M. J. Ablowitz, H. Z. Musslimani, "Integrable nonlocal nonlinear Schredinger equation", *Physical Review Letters*, **110** (2013), 064105. DOI: https//doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.064105.

16. A. M. Akhtyamov, I. M. Utyashev, "[Restoration of polynomial potential in the Sturm-Liouville problem]", *Zhurnal srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:2 (2018), 148–158 (In Russ.).

17. A. Ashyralyev, A. Sarsenbi, "Well-posedness of a parabolic equation with involution", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38**:10 (2017), 1295–1304 DOI: https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

18. A N. Tikhonov, A. A. Samarskiy, *[Equation of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 736 p.

19. M. A. Naymark, "[On some signs of completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of a linear operator in a Hilbert space]", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **98**:5 (1954), 727–730 (In Russ.).

20. E. A. Koddington, N. Levinson, *[Theory of ordinary differential equations]*, Inostrannaya literatura Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 474 p.

Submitted 7.12.2018