DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.439-447

УДК 517.9

Класс управляемых систем дифференциальных уравнений за бесконечное время

© **А. Ю. Павлов**[1]

Аннотация. В статье получены необходимые условия управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений за бесконечное время без предположения существования асимптотического равновесия у системы линейного приближения. Это позволяет определить новый класс управляемых систем дифференциальных уравнений. Решение задачи об управляемости за бесконечное время сводится к построению оператора, зависящего от выбранного управления, которое, в свою очередь, зависит от переводимой точки, и доказательству существования его неподвижной точки. Показано, что условие существования асимптотического равновесия не является в общем случае необходимым для управляемости систем за бесконечное время. Приведен пример, иллюстрирующий применение теоремы об управляемости за бесконечное время. Далее в статье приведена теорема, обобщающая неравенство Важевского. Доказательство теоремы основано на неравенстве Коши-Буняковского. Сделано замечание о верности теоремы для случая, если матрица и вектор-функции, стоящие в правой части нелинейного дифференциального уравнения, являются комплексными, а x – вектор с комплексными компонентами. На основании левой части неравенства из теоремы об обобщении неравенства Важевского получены необходимые условия управляемости за бесконечное время. Эти условия проверены на том же примере скалярного уравнения.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, управляемость за конечное время, управляемость за бесконечное время, неравенство Важевского, асимптотическое равновесие.

1. Введение

В математической теории управления большое значение имеют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за бесконечное время [1–4]. Задача об управляемости за бесконечное время заключается в переводе произвольной фиксированной точки в сколь угодно малую окрестность другой точки. Причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит. Известно, что в теоремах об управляемости требуется существование асимптотического равновесия у системы первого приближения.

В работе [1] Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости за бесконечное время системы, имеющей вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u) + F(t) \tag{1.1}$$

в определенном классе допустимых управлений K. Данная задача решается методом сравнения [5]. В качестве уравнения сравнения используется

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + B(t)u + F(t). \tag{1.2}$$

[1]**Павлов Андрей Юрьевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1664-898X, pavlovayu18@yandex.ru

.

Задача об управляемости за бесконечное время сводится к тому, чтобы подобрать оператор P, зависящий от выбранного управления u, которое, в свою очередь, зависит от переводимой точки $y_0 = P_u x_0$. И доказать существование у оператора неподвижной точки.

Теоремы из работы [1] объединяет то, что в каждой из них требуется существование асимптотического равновесия, которое ввёл Л. Чезари в работе [6], у системы первого приближения для системы (1.1)

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y. \tag{1.3}$$

Понятие асимптотического равновесия рассмотрено Е.В. Воскресенским в работе [7]. Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

В работе [8] приведен пример скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x + u. \tag{1.4}$$

Показано, что данная система является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия. Далее была получена теорема 1.2 об управляемости за бесконечное время без предположения существования асимптотического равновесия у системы первого приближения.

2. Пример системы, управляемой за бесконечное время, уравнение первого приближения которого не имеет асимптотического равновесия.

Пример 2.1 *Вновь рассмотрим уравнение* (1.4) *из примера* 1.1 *работы* [8]

$$\frac{dx}{dt} = -x + u.$$

Покажем, что это уравнение при некоторых $\boldsymbol{u}$*, произвольных* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет теореме* 1.2 *из работы* [8].

Представим уравнение (1.4) *в виде:*

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + u$$

В обозначениях теорем можно положить

$$A(t) = \Lambda(t) = -\frac{3}{4}, \qquad f(t,x,u) = -\frac{1}{4}x + u(t), \qquad \phi(t) = -\frac{3}{4}x_1$$

Тогда $|f(t,y+x_1,u)+A(t)x_1| = |-\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}x_1+u-\frac{3}{4}x_1| \le \frac{1}{4}|y|+|u(t)-x_1|$*, и, следовательно,* $\psi(t) \equiv \frac{1}{4}, \eta(t) = |u(t)-x_1|$*. Далее*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s)+\Psi(s))ds = \int\limits_{t_0}^{+\infty} (-\frac{3}{4}+\frac{1}{4})ds = -\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{2}ds = -\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\eta(t,u(t))}{\Lambda(t)+\Psi(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|u(t)-x_1|}{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть $u(t) = x_1 + \dfrac{1}{t}$. *Тогда последний предел равен нулю и*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0} (\Lambda(s) + \Psi(s)) ds) dl = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{l} exp(-\int\limits_{l}^{t_0} \frac{1}{2} ds) dl = +\infty.$$

Таким образом, при $u(t) = x_1 + \dfrac{1}{t}$ *выполняются все условия теоремы* 1.2 *работы* [8].

3. Обобщение неравенства Важевского

Для получения еще одного класса управляемых систем приведем обобщение неравенства Важевского.

Т е о р е м а 3.1 *Для любого решения дифференциальной системы*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) + \phi(t), \tag{3.1}$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}, a_{ij} \in \mathbb{C}([t_0; +\infty); \mathbb{R}), f \in \mathbb{C}([t_0; +\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathbb{C}([t_0; +\infty]; \mathbb{R}^n)$, *при* $t_0 \le t < +\infty$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\int\limits_{t_0}^{t} \eta(l) exp(\int\limits_{l}^{t} (\lambda(s) - \psi(s)) ds) dl + ||x(t_0)|| exp((\int\limits_{t_0}^{t} (\lambda(s) - \psi(s)) ds) \le \\ \le ||x(t)|| \le \\ \le \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l) exp(\int\limits_{l}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds) dl + ||x(t_0)|| exp((\int\limits_{t_0}^{t} (\Lambda(s) + \psi(s)) ds),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\lambda(t)$ *и* $\Lambda(t)$ — *наименьший и наибольший характеристические корни симметризованной матрицы* $A^H(t) = \dfrac{1}{2}[A(t) + A^T(t)]$ *соответственно; функции* f *и* ϕ *удовлетворяют неравенству* $||f(t, x) + \phi(t)|| \le \psi(t)||x|| + \eta(t)$, $\psi, \eta \in \mathbb{C}([t_0; +\infty); \mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — нетривиальное решение системы (3.1). Очевидно, $||x||^2 = x^T x$. В силу системы (3.1) и учитывая, что $\dfrac{dx^T}{dt} = (\dfrac{dx}{dt})^T = x^T A^T(t) + f^T(t, x) + \phi^T(t)$, получим

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}(||x||^2) = x^T \tfrac{dx}{dt} + \tfrac{dx^T}{dt} x = \\ = x^T (A(t)x + f(t, x) + \phi(t)) + (x^T A^T(t) + f^T(t, x) + \phi^T(t))x = \\ = x^T (A(t)x + A^T(t))x + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x = \\ = 2x^T A^H(t)x + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Поскольку матрица $A^H(t)$ симметрична, то [9, с.34] $\forall t \in [t_0; +\infty)$ будем иметь

$$\lambda(t) x^T x \le x^T A^H(t) x \le \Lambda(t) x^T x,$$

где $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ — наименьший и наибольший корни уравнения $det(A^H - \lambda E) = 0$. Поэтому на основании формулы (3.3) найдем

$$2\lambda(t)||x||^2 + x^T f(t,x) + f^T(t,x)x + x^T\phi(t) + \phi^T(t)x \leq \\ \leq \frac{d}{dt}(||x||^2) \leq \\ \leq 2\Lambda(t)||x||^2 + x^T f(t,x) + f^T(t,x)x + x^T\phi(t) + \phi^T(t)x;$$

$$2\lambda(t)||x||^2 - |x^T(f(t,x) + \phi(t))| - |(f^T(t,x) + \phi^T(t))x| \leq \\ \leq \frac{d}{dt}(||x||^2) \leq \\ \leq 2\Lambda(t)||x||^2 + |x^T(f(t,x) + \phi(t))| + |(f^T(t,x) + \phi^T(t))x|. \quad (3.4)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$2\lambda(t)||x||^2 - 2||x||\ ||f(t,x) + \phi(t)|| \leq \\ \leq \frac{d}{dt}(||x||^2) \leq \\ \leq 2\Lambda(t)||x||^2 + 2||x||\ ||f(t,x) + \phi(t)||;$$

$$2\lambda(t)||x||^2 - 2||x||\ ||f(t,x) + \phi(t)|| \leq \\ \leq 2||x||\frac{d}{dt}(||x||) \leq \\ \leq 2\Lambda(t)||x||^2 + 2||x||\ ||f(t,x) + \phi(t)||;$$

$$\lambda(t)||x|| \ - \ ||f(t,x) + \phi(t)|| \leq \frac{d}{dt}(||x||) \leq \Lambda(t)||x|| \ + \ ||f(t,x) + \phi(t)||.$$

Поскольку $||f(t,x) + \phi(t)|| \leq \psi(t)||x|| + \eta(t)$, то

$$(\lambda(t) - \psi(t))||x|| - \eta(t) \leq \frac{d}{dt}(||x||) \leq (\Lambda(t) + \psi(t))||x|| + \eta(t). \quad (3.5)$$

Пусть $y(t) = ||x(t)||$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda(t) + \psi(t))y + \eta(t).$$

Частное решение этого уравнения, проходящее через точку $(t_0; ||x(t_0)||)$, имеет вид

$$y(t) = c(t)\ exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}(\Lambda(s) + \psi(s))ds\right),$$

где $c(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\eta(l)exp(-\int\limits_{t_0}^{l}(\Lambda(s) + \psi(s))ds)dl + ||x(t_0)||$.

Поэтому из (3.5) на основании теоремы из [10, с.40] следует, что

$$||x(t)|| = y(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l) exp\left(\int\limits_{l}^{t}(\Lambda(s)+\psi(s))ds\right)dl + ||x(t_0)|| exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}(\Lambda(s)+\psi(s))ds\right). \quad (3.6)$$

Аналогично на основании замечания из [10, с.40] доказывается левая часть неравенства в формуле (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 3.1 *Доказанная теорема остается верной, если $A(t)$ — комплексная матрица, $f(t,x)$ и $\phi(t)$ - комплексные вектор-функции, а x — вектор с комплексными компонентами. В этом случае вместо операции транспонирования в теореме нужно выполнять операцию эрмитова сопряжения; матрица $A^H(t)$ в этом случае будет эрмитово-симметричной.*

4. Новый класс управляемых систем за бесконечное время

Вновь рассмотрим систему (1.6) из работы [8]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,u) \\ x(t_0) = x_0, \ x(+\infty) = x_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, T \leq t < +\infty, A(\cdot) : [T,+\infty) \mapsto Hom(R^n, R^n)$ — непрерывное отображение, $a \in C([T,+\infty) \times R^n \times R^m, R^n)$.

Необходимо перевести точку x_0 в точку x_1 по траектории уравнения (4.1) за бесконечное время.

Получим на основании левой части неравенства (3.2) необходимое условие управляемости за бесконечное время системы (4.1).

Положим $y = x - x_1$. Тогда перепишем систему (4.1)в виде [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, \qquad y(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для системы (4.2) по теореме 3.1 будем иметь

$$||y(t)|| \geq -\int\limits_{t_0}^{t} \eta(l,u(l)) exp\Big(\int\limits_{l}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big)dl + ||x_0 - x_1|| exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big) =$$

$$= exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big)\Big[||x_0-x_1|| - \int\limits_{t_0}^{t}\eta(l,u(l))\times$$

$$\times\, exp\Big[\int\limits_{l}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds - \int\limits_{t_0}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big]dl\Big] =$$

$$= exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big)\Big[||x_0-x_1|| - \int\limits_{t_0}^{t}\eta(l,u(l)) \times exp\Big[\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s)-\psi(s))ds\Big]dl\Big]$$

Последнее выражение при $t \to +\infty$ должно стремиться к неположительному числу. Рассмотрим

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{||x_0 - x_1|| - \int\limits_{t_0}^{t} \eta(l, u(l)) exp(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds)dl}{exp(\int\limits_{t_0}^{t}(\psi(s) - \lambda(s))ds)}.$$

Предположим, что выполняется одна из следующих альтернатив:

1. $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s))ds = +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp\big(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\big)dl = \infty$,
2. $\int\limits_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s))ds = -\infty$, $||x_0 - x_1|| - \int\limits_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) exp\big(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\big)dl = 0$,

а функция $u(t)$ такова, что к пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{-\eta(t, u(t)) exp\big(\int\limits_{t}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\big)}{exp\big(\int\limits_{t_0}^{t}(\psi(s) - \lambda(s))ds\big)(\psi(t) - \lambda(t))} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\lambda(t) - \psi(t)}.$$

Таким образом доказана следующая

Т е о р е м а 4.1 *Если система* (4.1) *управляема за бесконечное время и выполняется одна из следующих альтернатив*

$$1)\quad \int\limits_{t_0}^{+\infty}(\psi(s) - \lambda(s))ds = +\infty,\ \int\limits_{t_0}^{+\infty}\eta(l, u(l))exp\Big(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\Big)dl = \infty, \tag{4.3}$$

$$2)\quad \int\limits_{t_0}^{+\infty}(\psi(s) - \lambda(s))ds = -\infty,$$

$$||x_0 - x_1|| - \int\limits_{t_0}^{+\infty}\eta(l, u(l))exp\Big(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\Big)dl = 0, \tag{4.4}$$

то

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\lambda(t) - \psi(t)} \le 0 \tag{4.5}$$

П р и м е р 4.1 *Рассмотрим уравнение из примера* 1.1 *работы* [8]*:*

$$\dot{x} = -x + u. \tag{4.6}$$

Покажем, что данное уравнение при некоторых и удовлетворяет теореме (1.3)*. Для этого вновь представим уравнение* (1.4) *в виде*

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + u. \tag{4.7}$$

В обозначениях теоремы (1.3) можно положить

$$A(t) = \lambda(t) \equiv -\frac{3}{4}, \qquad f(t,x,u) = -\frac{1}{4}x + u(t), \qquad \phi(t) = -\frac{3}{4}x_1.$$

Так как $|f(t, y + x_1, u) + A(t)x_1| = | - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}x_1 + u - \frac{3}{4}x_1| \le \frac{1}{4}|y| + |u(t) - x_1|$, *то* $\psi(t) \equiv \frac{1}{4}, \qquad \eta(t) = |u(t) - x_1|$. *Следовательно*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}(\Psi(s) - \lambda(s))ds = \int\limits_{t_0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)ds = \int\limits_{t_0}^{+\infty}ds = +\infty, \tag{4.8}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\eta(t,u(t))}{\lambda(t) - \Psi(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{|u(t) - x_1|}{-1}. \tag{4.9}$$

Кроме того, должно выполняться условие

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\eta(l,u(l))exp\left(\int\limits_{l}^{t_0}(\lambda(s) - \psi(s))ds\right)dl = \int\limits_{t_0}^{+\infty}|u(l) - x_1|\; exp(l - t_0)dl = \infty \tag{4.10}$$

Таким образом, для управляемости уравнения (1.4) *необходимо, чтобы* $u(t)$ *была непрерывной функцией такой, что*

$$\lim_{t\to+\infty}|u(t) - x_1| \ge 0.$$

Другими словами, необходимо существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty}|u(t)|$ *и выполнение условия* (4.10). *Управление* $u(t) = x_1 + \frac{1}{t}$ *из примера* (1.4) *удовлетворяет этим требованиям.*

Список литературы

1. Е. В. Воскресенский, *Асимптотичесие методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2001, 300 с.
2. В. И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Наука, Москва, 1975, 495 с.
3. В. И. Зубов, *Теория колебаний: учеб. пособие для университетов*, Высшая школа, Москва, 1979, 400 с.
4. А. Ю. Павлов, *Метод сравнения и управляемость нелинейных систем*, дис. ... канд. физ.-мат.наук, Саранск, 1995, 143 с.
5. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., Саранск, 1990, 224 с.
6. Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва, 1964, 480 с.
7. Е. В. Воскресенский, “О задаче Чезари”, *Дифференциальные уравнения*, **25**:9 (1989).

8. А. Ю. Павлов, “Управляемость за бесконечное врмя и асимптотическое равновесие”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:2 (2015), 81–84.

9. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, гл. ред. физ-мат.лит., М., 1967, 472 с.

10. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва, 1970, 720 с.

Поступила 7.08.2018

MSC2010 34C20

Class of controllable systems of differential equations for infinite time

© **A. Yu. Pavlov**[1]

Abstract. In the article necessary conditions for a controllability of systems of nonlinear differential equations in an infinite time are obtained without assuming the existence of an asymptotic equilibrium for the system of linear approximation. Thus, a new class of controlled systems of differential equations is presented. The problem of controllability for an infinite time (i.e. the transfer of an arbitrary point into an arbitrary small domain of another point) comes down to choosing an operator depending on the selected control, which in turn depends on the point being transferred. Then one is to prove the existence of a fixed point for this operator. It is known that the theorems on controllability require existence of an asymptotic equilibrium for system of the first approximation. It is shown in the paper that in general case the condition of asymptotic equilibrium's existence is not necessary for controllability of systems in an infinite time. An example on the theorem on controllability for an infinite time is given. The theorem generalizing Vazhevsky inequality is proved by implementation of Cauchy-Bunyakovsky inequality. A remark is made about the theorem's validity for the case when the matrix and vector from the right-hand side of nonlinear differential equation are complex and x is vector with complex components. Basing on the left-hand side of the inequality in the theorem generalizing Vazhevsky inequality, the necessary conditions for controllability in an infinite time are obtained. These conditions are verified on the same example of a scalar equation that was mentioned before.

Key Words: nonlinear systems of ordinary differential equations, controllability in finite and infinite time, Vazhevsky inequality, asymptotic equilibrium

References

1. E. V. Voskresenskiy, *[Asymptotic methods: theory and regulations]*, SVMO, Saransk, 2001 (In Rus.), 300 p.

2. V. I. Zubov, *[Lectures by the control theory]*, Nauka, Moscow, 1975 (In Russ.), 495 p.

3. V. I. Zubov, *[Theory of oscillations: textbook for universities]*, Vyshaya shkola, Moscow, 1979 (In Russ.), 400 p.

4. A. Yu. Pavlov, *[Equal method and a controlability of non-linear systems]*, [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1995 (in Russ.), 143 p.

[1]**Andrey Yu. Pavlov**, Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1664-898X, pavlovayu18@yandex.ru

5. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize*, Saratov University Publishing House, Saransk Branch, Saransk, 1990 (In Russ.), 224 p.

6. L. Cesari, “[Asymptotic behavior and solutions stability of ordinary differential equations]”, *Mir*, 1964 (In Russ.), 480 p.

7. E. V. Voskresenskiy, “About Cesari problem”, *Differentsyalnye uravneniya*, **25**:9 (1989).

8. A. Yu. Pavlov, “Controllability for infinite time and asymptotic equilibrium”, **17**:2 (2015), 81–84 (In Russ.).

9. B. P. Demidovich, *[Lectures by the mathematical stability theory]*, Nauka, Moscow, 1967 (In Russ.), 472 p.

10. P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Mir, M., 1970 (In Russ.), 720 p.

Submitted 7.08.2018