DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.429-438

УДК 519.6:517.962

Аппроксимация смешанной краевой задачи

© Ф. В. Лубышев[1], М. Э. Файрузов[2]

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения эллиптического типа дивергентного вида с переменными коэффициентами. Предполагается, что область интегрирования имеет достаточно гладкую границу, причем граница области интегрирования есть объединение двух непересекающихся кусков, на одном из которых задано граничное условие Дирихле, а на другом задано граничное условие Неймана. Поставленная задача – это задача с разрывным граничным условием. Подобные задачи со смешанными условиями на границе наиболее часто встречаются на практике при моделировании процессов и представляют значительный интерес для разработки методов их решения. В частности, ряд задач теории упругости, теории диффузии, фильтрации, геофизики, ряд задач расчета и оптимизации процессов электро-тепло-массопереноса в сложных многоэлектродных электрохимических системах сводятся к краевым задачам указанного типа. В настоящей работе предложена аппроксимация исходной смешанной краевой задачи третьей краевой задачей с параметром. Исследуется сходимость предложенных аппроксимаций. Установлены оценки скорости сходимости предложенных аппроксимаций в Соболевских нормах.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, смешанная краевая задача, Соболевское пространство, теорема вложения, аппроксимация, сходимость аппроксимаций

1. Постановка смешанной краевой задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. Предполагается, что Γ_1 и Γ_2 – непустые открытые подмножества $\partial\Omega = \Gamma$ с достаточно гладкими границами, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$.

Рассматривается следующая смешанная граничная задача:

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

$$u(x) = \mu_1(x), \qquad x \in \Gamma_1, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = \mu_2(x), \qquad x \in \Gamma_2. \tag{1.3}$$

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\cos(\widehat{\nu, x_\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x)\nu_\alpha(x), \quad x \in \Gamma_2,$$

[1]**Лубышев Федор Владимирович**, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Файрузов Махмут Эрнстович**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

– конормальная производная; $\nu_\alpha(x)$; $\alpha = 1,2$ – направляющие косинусы вектора внешней нормали:

$$\nu = \big(\nu_1(x), \nu_2(x)\big) = \big(\cos(\nu, x_1), \cos(\nu, x_2)\big),$$

причем $k_\alpha(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ – заданные функции; $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega)$,$f(x) \in L_2(\Omega)$,$\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$,$\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$,$0 < \nu_0 \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}_0$,$\alpha = 1,2$.

Задачи такого типа со смешанными условиями на границе Γ, соответствующими различному характеру взаимодействия рассматриваемой среды Ω на различных участках $\partial\Omega_i = \Gamma_i$ ее границы $\Gamma = \partial\Omega$, являются наиболее часто встречающимися на практике (на $\Gamma = \partial\Omega$ задаются условия разных типов).

Смешанные краевые условия (1.2)–(1.3) соответствуют, например, заданному распределению температуры на участке $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$ границы $\Gamma = \partial\Omega$ и заданному потоку тепла на участке $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \subset \Gamma$.

Задачи такого типа представляют значительный интерес для приложений и разработки методов их исследования [1]–[23]. В частности, ряд задач теории упругости, теории диффузии, фильтрации, геофизики, ряд задач расчета и оптимизации процессов электротепло-массопереноса в сложных многоэлектродных электрохимических системах сводятся к задачам типа (1.1)–(1.3)

Краевая задача (1.1)–(1.3) это задача с разрывным граничным условием. Вопросы существования и единственности решения задачи типа (1.1)–(1.3) изучались, например, в работе [21]. Задача типа (1.1)–(1.3) исследовалась еще Зарембой [21].

Под решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать слабое решение, а именно которое находится следующим образом. Пусть $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$ такая, что $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$ – след этой функции на Γ_1 как элемент пространства $L_2(\Gamma_1)$ (т.е. $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$ и функция $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям: $\Phi(x)\big|_{\Gamma_1} = \mu(s)$ на Γ_1 в смысле теории следов [8]– [9]; [11]; [13]; [20]; [22]). Пусть $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, и пусть

$$V = \big\{v(x) \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ в смысле теории следов}\big\} = \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega, \Gamma_1).$$

Функцию $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ назовем слабым решением задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad z = u - \Phi \in V, \tag{1.4}$$

$$2) \quad A(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega = \int\limits_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s)\, ds + \int\limits_\Omega f(x) v(x)\, d\Omega \tag{1.5}$$

для любого $v \in V$.

З а м е ч а н и е 1.1 *Краевую задачу* (1.1)–(1.3) *следует отнести к задаче с разрывным граничным условием.*

З а м е ч а н и е 1.2 *Неоднородное граничное условие* (1.2) *здесь определяется (выражено) функцией* $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$, *для которой*

$$\Phi = \mu_1(s) \quad \text{на } \Gamma_1 \text{ в смысле теории следов.}$$

Таким образом, выполнение граничного условия (1.2) *в данном случае обеспечивается условием* (1.4) *(здесь* $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$ *это функция, описывающая неорднородное граничное условие* (1.2)*). Под следом функции* $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ *на* $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ *надо понимать ограничение следа (функции)* $u(s) \in L_2(\Gamma)$. *Следовательно, рассматривается лишь та «часть» функции* $u(s)$, *которая «принадлежи»* Γ_1. *Здесь через* s *обозначен параметр длины дуги на* Γ.

Справедлива следующая [13]

Л е м м а 1.1 *Смешанная краевая задача* (1.1)-(1.3) *имеет одно(и только одно) слабое решение $u(x) \in W_2^1(\Omega)$; существует такая постоянная $C > 0$, независящая от функций f, Φ, μ_2, для которой выполняется соотношение*

$$\|u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \le C\left[\|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}\right]. \qquad (1.6)$$

З а м е ч а н и е 1.3 *При рассмотрении случая, когда граничное условие* (1.2) *является однородным, надо положить в определении слабого решения задачи* (1.1)–(1.3)*: $\Phi(x) = 0$ в $W_2^1(\Omega)$, так что $\Phi(x)$ – нулевая функция в данной ситуации.*

З а м е ч а н и е 1.4 *Напомним некоторые факты. Известно, что в случае, когда граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω ограничена и достаточно регулярна, можно определить единственным образом след функции $u \in W_2^1(\Omega)$ на $\Gamma = \partial\Omega$, который обозначим через $\gamma u = u|_\Gamma$. При этом $\gamma u = u|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$, т. е. след функции $u \in W_2^1(\Omega)$ определен на $\Gamma = \partial\Omega$ как элемент $L_2(\Gamma)$* [13]*;* [22]*;* [23] *(и даже $W_2^{1/2}(\Gamma)$ см. далее), и отображение $u \to \gamma u = u|_\Gamma$ является линейным и непрерывным отображением из $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$ ($W_2^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$).*

Однако данное утверждение далеко не лучший возможный результат в том смысле, что отображение $u \to \gamma u = u|_\Gamma$ не сюрьективно из $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Gamma)$ [23].

Можно усилить этот результат введением пространства с дробным индексом $W_2^{1/2}(\Gamma)$: образ $W_2^1(\Omega)$ при отображении γ уже, чем $L_2(\Gamma)$, и совпадает с $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Оказывается, отображение $u \to \gamma u = u|_\Gamma$ является линейным, непрерывным и сюрьективным отображением $W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\Gamma)$ [14]; [23].

Так что справедлива следующая [11]

Л е м м а 1.2 *Если $\Phi \in W_2^1(\Omega)$, то след $v = \Phi|_\Gamma$ принадлежит пространству $W_2^{1/2}(\Gamma)$, и выполняется оценка*

$$\|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \le C\|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Обратно: для каждой функции $v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ такая, что

$$\Phi|_\Gamma = v(s), \qquad s \in \Gamma.$$

и справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_*\|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)}. \qquad (1.7)$$

Ниже мы воспользуемся тем, что отображение $v \to \Phi$ является линейным и непрерывным отображением из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^1(\Omega)$ ($W_2^{1/2}(\Gamma) \to W_2^1(\Omega)$). Здесь и выше [14]; [19] класс $W_2^{1/2}(\Gamma)$ представляет собой пространство с дробным индексом и состоит из функций $v(s)$, $s \in \Gamma$, являющихся следом на Γ для функций Φ класса $W_2^1(\Omega)$: $v(s) = \Phi|_\Gamma$ с нормой в $W_2^{1/2}(\Gamma)$, определяемой равенством

$$\|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\substack{\Phi \in W_2^1(\Omega) \\ \gamma\Phi = v}} \|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)},$$

причем нижняя грань берется по всем тем функциям $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$, для которых

$$\Phi(s) = v(s), \qquad s \in \Gamma.$$

Пространство $W_2^{1/2}(\Gamma)$ – образ пространства $W_2^1(\Omega)$ при отображении γ, т. е. $W_2^{1/2}(\Gamma) = \gamma[W_2^1(\Omega)]$ [14].

Класс функций $W_2^{1/2}(\Gamma)$ является подпространством пространства $L_2(\Gamma)$.

Таким образом, пространство функций с дробной производной $W_2^{1/2}(\Gamma)$ позволяет произвести более углубленный анализ проблемы следов.

Преобразуем оценку (1.6). Выбирая в лемме 1.2 в качестве $v(s) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ граничную функцию $\mu_1(s) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ задачи (1.1)–(1.3):

$$v(s) = \mu_1(s), \qquad s \in \Gamma_1, \tag{1.8}$$

заметим, что (1.7) примет вид (в силу вложения $W_2^{1/2}(\Gamma_1) \subset W_2^1(\Omega)$):

$$\|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_* \|\mu_1\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}. \tag{1.9}$$

Следовательно, из оценки (1.6) найдем априорную оценку вида

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_{**}\left[\|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|\mu_1\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}\right]. \tag{1.10}$$

Замечание 1.5 *Справедливо утверждение* [11]; [19]: *если* $u \in W_2^2(\Omega)$, *то для этой функции имеет смысл производная по нормали* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, *причем справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} \le \hat{C}\|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \hat{C} > 0. \tag{1.11}$$

Замечание 1.6 *Из определения* $W_2^s(\Omega)$ *– пространств с дробным индексом* [11]; [19]*– вытекает неравенство*

$$\|u\|_{W_2^\gamma(\Omega)} \le C\|u\|_{W_2^s(\Omega)} \text{ при } s > \gamma, \tag{1.12}$$

т. е. если функция $u \in W_2^s(\Omega)$, *то она является также элементом из* $W_2^\gamma(\Omega)$, *и справедливо* (1.12). *Соотношение, аналогичное* (1.12), *справедливо и для пространств* $W_2^s(\partial\Omega)$.

Запишем также неравенство

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{L_2(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad C > 0. \tag{1.13}$$

2. Аппроксимация смешанной краевой задачи третьей краевой задачей. Сходимость аппроксимаций

Для решения задачи (1.1)–(1.3) рассмотрим метод, заключающийся в приближенной замене смешанной задачи (1.1)–(1.3) третьей краевой задачей с параметром $\varepsilon > 0$:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s)u_\varepsilon = g(s), \quad s \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \tag{2.15}$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in \Gamma_1, \\ 0, & s \in \Gamma_2, \end{cases} \qquad g(s) = \begin{cases} \varepsilon\mu_1(s), & s \in \Gamma_1, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2, \end{cases} \qquad \varepsilon = const > 0. \tag{2.16}$$

Будем считать, что при $\varepsilon \to +\infty$ решение задачи (2.14)–(2.16) стремится к решению исходной смешанной краевой задачи (1.1)–(1.3).

Обобщенным решением краевой задачи (2.14)–(2.16) называется функция $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{gathered} A_1(u_\varepsilon, v) = \int\limits_\Omega - \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \tfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \tfrac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s)\, ds = \\ = \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} \mu_1(s) v(s)\, ds + \int\limits_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s)\, ds + \int\limits_\Omega f(x) v(x)\, d\Omega = l_\varepsilon(v), \end{gathered} \tag{2.17}$$

для всех $v(x) \in W_2^1(\Omega)$.
Справедлива следующая

Л е м м а 2.1 *Задача* (2.14)–(2.16) *однозначно разрешима в классе* $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство леммы может быть произведено на основе леммы Лакса-Мильграмма [5]; [9]; [13].

Т е о р е м а 2.1 *При* $\varepsilon \to +\infty$ *решение задачи* (2.14)–(2.16) *сходится по норме* $W_2^1(\Omega)$ *к решению задачи* (1.1)–(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о.Введем функцию $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$. Покажем, что

$$u_\varepsilon(x) \to u(x) \text{ при } \varepsilon \to +\infty \text{ в норме } W_2^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Нетрудно убедиться, что функция $\omega_\varepsilon(x)$ решает задачу:

$$L\omega_\varepsilon(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x) \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s)\omega_\varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial N}(s), \qquad s \in \Gamma_1, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N} = 0, \qquad s \in \Gamma_2. \tag{2.21}$$

Умножим (2.19) на $\omega_\varepsilon(x)$ и проинтегрируем по Ω. Используя формулу Грина [13], получим:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_2} L\omega_\varepsilon(x)\omega_\varepsilon(x)\, d\Omega = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} d\Omega - \int\limits_\Gamma \tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s)\omega_\varepsilon(s)\, ds = \\ = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \left(\tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} \tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s)\omega_\varepsilon(s)\, ds - \int\limits_{\Gamma_2} \tfrac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s)\omega_\varepsilon(s)\, ds = 0. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Итак, получим соотношение

$$\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \left(\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2(s)\, ds = -\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N}(s)\omega_\varepsilon(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\nu_0 \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2(s)\, ds \le -\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N}(s)\omega_\varepsilon(s)\, ds. \tag{2.23}$$

Из (2.23) получим

$$\varepsilon\|\omega\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}, \tag{2.24}$$

т. е. находим оценку:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \frac{1}{\varepsilon}\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1).} \tag{2.25}$$

Далее из (2.23) запишем:

$$\nu_0\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}. \tag{2.26}$$

Принимая во внимание оценку (2.25), из (2.26) получим:

$$\nu_0\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega \leq \frac{1}{\varepsilon}\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}. \tag{2.27}$$

Итак, имеем оценку:

$$\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega = \int\limits_\Omega |\nabla\omega_\varepsilon|^2 d\Omega \leq \frac{1}{\nu_0\varepsilon}\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}. \tag{2.28}$$

Напомним обозначения:

$$\begin{gathered}
\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_1}, \tfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \tfrac{\partial u}{\partial x_n}\right),\\
|\nabla u| = \left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2\right)^{1/2},\\
|\nabla u|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\left|\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2,\\
\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx,\\
\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx\right)^{1/2}.
\end{gathered} \tag{2.29}$$

Оценку (2.28) запишем в виде

$$\|\nabla\omega_\epsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla\omega_\varepsilon|^2 dx = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx \leq \frac{1}{\nu_0\epsilon}\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}. \tag{2.30}$$

Из оценок (2.25), (2.30) получим:

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\|\nabla\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to+\infty}\|\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = 0. \tag{2.31}$$

Далее, справедливо неравенство [13]

$$\begin{gathered}
\|\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C_0\left(\|\nabla\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right) =\\
= C_0\left\{\left(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\tfrac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Gamma_1}\omega_\varepsilon^2 ds\right)^{1/2}\right\} =\\
= C_0\left\{\left(\int\limits_\Omega |\nabla\omega_\varepsilon|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Gamma_1}\omega_\varepsilon^2 ds\right)^{1/2}\right\},
\end{gathered} \tag{2.32}$$

где константа $C_0 > 0$ зависит лишь от Ω и Γ_1.

Из оценок (2.31)– (2.32) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 0. \qquad (2.33)$$

Из оценок (2.31)–(2.33) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = 0. \qquad (2.34)$$

Далее из (2.25) и (2.30) в силу (2.32) получим

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le C_0\left[\tfrac{1}{\sqrt{\nu_0}\sqrt{\varepsilon}}\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)} + \tfrac{1}{\varepsilon}\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)}\right] = \\ = C_0\tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\nu_0}} + \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)}.\end{aligned} \qquad (2.35)$$

Поэтому из (2.25), (2.30), (2.35) получим

$$\begin{aligned}\|\omega_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega\left[\sum_{\alpha=1}^n\left(\tfrac{\partial\omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \omega_\varepsilon^2\right]dx = \|\nabla\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\omega_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \le \\ \le \tfrac{1}{\nu_0\varepsilon}\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \tfrac{C_0^2}{\varepsilon}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\nu_0}} + \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = \\ = \left[\tfrac{1}{\nu_0} + \left(\tfrac{1}{\nu_0^{1/2}} + \tfrac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right)^2 C_0^2\right]\tfrac{1}{\varepsilon}\left\|\tfrac{\partial u}{\partial N}\right\|^2_{L_2(\Gamma_1)}.\end{aligned}$$

Таким образом, установлена также оценка скорости сходимости:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \le \theta_\varepsilon\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)}, \qquad (2.36)$$

где

$$\theta_\varepsilon = \left[\frac{1}{\nu_0} + \left(\frac{1}{\nu_0^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\right)^2 C_0^2\right]^{1/2} \to \frac{1}{\nu_0^{1/2}}(1 + C_0^2)^{1/2} = C_1 \quad \text{при } \varepsilon\to+\infty.$$

Доказательство закончено.

Замечание 2.1 *Пусть решение $u(x)$ задачи (1.1)–(1.3) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$, тогда, принимая во внимание оценку*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial N}\right\|_{L_2(\Gamma_1)} \le C_2\|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \qquad (2.37)$$

установим следующую оценку величины $\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}$:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \le \theta_\varepsilon\frac{C_2}{\varepsilon^{1/2}}\|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \qquad (2.38)$$

Здесь $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$.

Список литературы

1. В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, *Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах*, Наукова думка, Киев, 1976, 288 с.

2. И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, *Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации*, Наукова думка, Киев, 1973, 264 с.

3. И. Н. Молчанов, *Численные методы решения некоторых задач теории упругости*, Наукова думка, Киев, 1979, 316 с.

4. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел, *Методы граничных элементов*, Мир, М., 1987, 524 с.

5. Ф. Сьярле, *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, М., 1980, 512 с.

6. Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979, 576 с.

7. К. Байокки, А. Капело, *Вариационные и квазивариационные неравенства*, Наука, М., 1988.

8. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.

9. Ж.-П. Обэн, *Приближенное решение эллиптических краевых задач*, Мир, М., 1977, 384 с.

10. Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983, 256 с.

11. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987, 296 с.

12. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Либроком, М., 2009, 784 с.

13. К. Ректорис, *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985, 592 с.

14. И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986, 272 с.

15. Р. Темам, *Математические задачи теории пластичности*, Наука, М., 1991, 288 с.

16. Я. А. Каменярж, *Предельный анализ пластических тел и конструкций*, Наука, М., 1997, 512 с.

17. И. И. Ворович, *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*, Наука, М., 1989, 376 с.

18. Ф. Сьярле, П. Рабье, *Уравнения Кармана*, Мир, М., 1983, 172 с.

19. Г. И. Марчук, В. И. Агошков, *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, М., 1981, 416 с.

20. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988, 304 с.

21. М. И. Вишик, Г. И. Эскин, "Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения", *УМН*, **22**:1(133) (1967), 15–76.

22. В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976, 394 с.

23. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980, 384 с.

Поступила 13.07.2018

MSC2010 65N06

Approximation of a mixed boundary value problem

© **F. V. Lubyshev** [1], **M. E. Fairuzov** [2]

Abstract. The mixed boundary value problem for the divergent-type elliptic equation with variable coefficients is considered. It is assumed that the integration domain has a sufficiently smooth boundary that is the union of two disjoint pieces. The Dirichlet boundary condition is given on the first piece, and the Neumann boundary condition is given on the other one. So the problem has discontinuous boundary condition. Such problems with mixed boundary conditions are the most common in practice when modeling processes and are of considerable interest in the development of methods for their solution. In particular, a number of problems in the theory of elasticity, theory of diffusion, filtration, geophysics, a number of problems of optimization in electro-heat and mass transfer in complex multielectrode electrochemical systems are reduced to the boundary value problems of this type. In this paper, we propose an approximation of the original mixed boundary value problem by the third boundary value problem with a parameter. The convergence of the proposed approximations is investigated. Estimates of the approximations' convergence rate in Sobolev norms are established.

Key Words: Elliptic equations, mixed boundary value problem, Sobolev spaces, embedding theorems, approximation, convergence of approximations

References

1. V. L. Rvachev, A. P. Slesarenko, *Logic algebra and integral transformations in boundary value problems*, Naukova dumka, Kiev, 1976 (In Russ.), 288 c.

2. I. I. Lyashko, I. M. Velikoivanenko, *A numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration theory*, Naukova dumka, Kiev, 1973 (In Russ.), 264 c.

3. I. N. Molchanov, *Numerical methods for solving some problems in the theory of elasticity*, Naukova dumka, Kiev, 1979 (In Russ.), 316 c.

[1]**Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir state University» (32, Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3279-4293, maxam721@mail.ru

[2]**Mahmut E. Fairuzov**, associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir state University» (32, Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9118-660X, fairuzovme@mail.ru

4. K. Brebbiya, Zh. Telles, L. Vroubel, *Boundary element methods*, Mir, M., 1987 (In Russ.), 524 c.

5. F. S'yarle, *Finite Element Method for Elliptic Problems*, Mir, M., 1980 (In Russ.), 512 c.

6. R. Glovinski, Zh.-L. Lions, R. Tremol'yer, *Numerical study of variational inequalities*, Mir, M., 1979 (In Russ.), 576 c.

7. K. Bayokki, A. Kapelo, *Variational and quasi-variational inequalities*, Nauka, M., 1988 (In Russ.).

8. D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 464 c.

9. Zh.-P. Oben, *Approximate solution of elliptic boundary value problems*, Mir, M., 1977 (In Russ.), 384 c.

10. D. Kinderlerer, G. Stampakk'ya, *Introduction to variational inequalities and their applications*, Mir, M., 1983 (In Russ.), 256 c.

11. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Difference schemes for differential equations with generalized solutions*, Vysshaya shkola, M., 1987 (In Russ.), 296 c.

12. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Computational heat transfer*, Librokom, M., 2009 (In Russ.), 784 c.

13. K. Rektoris, *Variational methods in mathematical physics and technology*, Mir, M., 1985 (In Russ.), 592 c.

14. I. Glavachek, Ya. Gaslinger, I. Nechas, Ya. Lovishek, *Solution of variational inequalities in mechanics*, Mir, M., 1986 (In Russ.), 272 c.

15. R. Temam, *Mathematical problems of plasticity theory*, Nauka, M., 1991 (In Russ.), 288 c.

16. Ya. A. Kamenyarzh, *Limit analysis of plastic bodies and structures*, Nauka, M., 1997 (In Russ.), 512 c.

17. I. I. Vorovich, *Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 376 c.

18. F. S'yarle, P. Rab'ye, *Karman equations*, Mir, M., 1983 (In Russ.), 172 c.

19. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Introduction to projection methods*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 c.

20. A. Kufner, S. Fuchik, *Nonlinear differential equations*, Nauka, M., 1988 (In Russ.), 304 c.

21. M. I. Vishik, G. I. Eskin, "Elliptic convolution equations in a bounded domain and their applications", *Russian Mathematical Surveys*, **22**:3 (1967), 13–15.

22. V. P. Mikhaylov, *Partial differential equations*, Nauka, M., 1976 (In Russ.), 394 c.

23. G. Dyuvo, Zh.-L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, Nauka, M., 1980 (In Russ.), 384 c.

Submitted 13.07.2018