

УДК 517.9

О числе модулей градиентных потоков функции высоты поверхности

© В. Е. Круглов¹

Аннотация. В 1978 г. Ж. Палисом было открыто наличие континуума топологически не сопряженных потоков (каскадов) в окрестности системы с гетероклиническим касанием — наличие модулей. В. Ди Мелу и С. Ван Стрин в 1987 г. охарактеризовали класс диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей. Оказалось, что условие конечности модулей накладывает ограничение на длину цепочки седел, участвующих в гетероклиническом касании: таких седел не может быть больше трех. Удивительным образом подобного эффекта не обнаруживается для непрерывных динамических систем. В настоящей работе рассматриваются градиентные потоки функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности рода $g > 0$. Такие потоки обладают цепочкой, состоящей из $2g$ седловых точек. В настоящей работе устанавливается, что число модулей таких потоков равно $2g - 1$. Этот результат является непосредственным следствием достаточных условий топологической сопряженности потоков в окрестности таких систем, установленных в данной статье. Полным топологическим инвариантом топологической эквивалентности для таких систем является четырехцветный граф, несущий информацию о взаимном расположении ячеек. Оснащение ребер графа аналитическими параметрами — модулями, связанными с седловыми связками — дает достаточные условия топологической сопряженности потоков рассматриваемого класса

Ключевые слова: модуль устойчивости, градиентный поток, топологическая сопряженность, четырехцветный граф, топологический инвариант.

1. Введение и формулировка результатов

Топологическая сопряженность двух динамических систем означает существование гомеоморфизма, переводящего траектории одной системы в траектории другой с сохранением направления и времени движения. Для непрерывных систем (потоков) это отношение отличается от *топологической эквивалентности*, которая не требует сохранения времени.

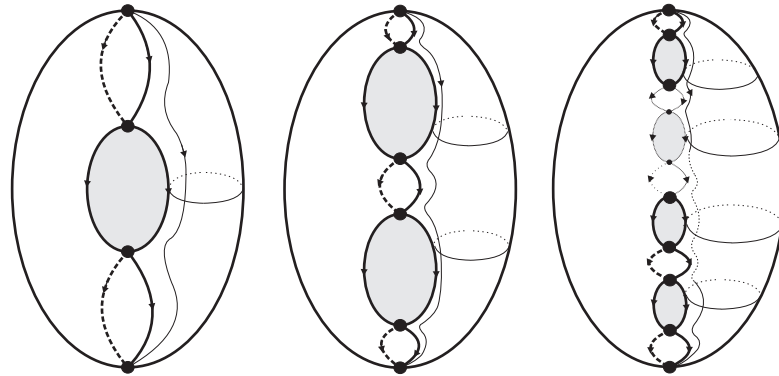
В 1978 г. Ж. Палисом [1] было открыто наличие континуума топологически не сопряженных динамических систем в окрестности системы с гетероклиническим касанием на поверхности. Именно он рассмотрел окрестность орбиты гетероклинического касания и показал, что для топологической сопряженности систем в двух таких окрестностях необходимо совпадение параметров, выражающихся через собственные значения седел, сепаратрисы которых касаются. Таким образом, любая окрестность системы с касанием в пространстве динамических систем содержит бесконечное множество попарно различных классов топологической сопряженности. Параметры, с помощью которых описываются классы в некоторой такой окрестности, называются *модулями топологической сопряженности*.

В. Ди Мелу и С. Ван Стрин [2] в 1987 г. охарактеризовали класс диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей. Оказалось, что условие конечности модулей

¹**Круглов Владислав Евгеньевич**, аспирант кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь лаборатории «Топологические методы в динамике», НИУ ВШЭ, (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

накладывает ограничение на длину цепочки седел, участвующих в гетероклиническом касании: таких седел не может быть больше трех. Удивительным образом подобного эффекта не обнаруживается для непрерывных динамических систем.

В настоящей работе речь пойдет о классе G градиентных потоков $f^t : S_g \rightarrow S_g$ класса гладкости C^2 , порожденных градиентным векторным полем функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности S_g рода $g > 0$. Неблуждающее множество таких систем состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек: одного источника, одного стока и $2g$ седловых точек, образующих цепочку, каждый элемент которой соединяется со следующим двумя седловыми сепаратрисами (см. Рис. 1.1).



Р и с у н о к 1.1

Градиентные потоки функции высоты

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1 *Любой поток $f^t : S_g \rightarrow S_g$ из класса G имеет в точности $2g - 1$ модулей.*

2. Топологическая эквивалентность Ω -устойчивых потоков поверхности

В данном разделе приводятся необходимые для дальнейшего изложения результаты по топологической классификации (относительно топологической эквивалентности) Ω -устойчивых потоков f^t , заданных на замкнутой поверхности S .

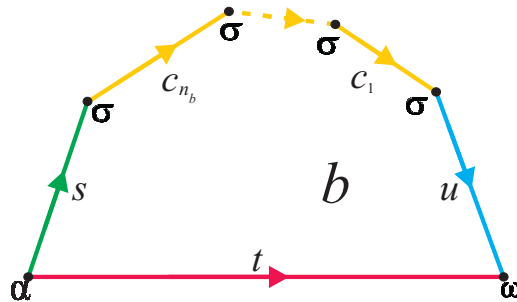
Согласно работе К. Пью и М. Шуба [3], неблуждающее множество Ω_{f^t} потока f^t состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек, которые не образуют циклов, то есть множеств неподвижных точек $q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1} = q_1$ со свойством $W_{q_i}^u \cap W_{q_{i+1}}^s \neq \emptyset, i = 1, \dots, k$, где $W_{q_i}^s$ и $W_{q_i}^u$ — устойчивое и неустойчивое многообразия точки q_i соответственно.

Обозначим через $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ множества неподвижных точек потока f^t , имеющих размерность неустойчивого многообразия 0, 1, 2, т. е. стоков, седел, источников соответственно. Везде далее будем предполагать, что множество $\Omega_{f^t}^1$ не пусто, поскольку в противном случае все потоки принадлежат одному классу топологической сопряженности.

Назовем компоненту связности множества $\tilde{S} = S \setminus \left(\bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^1} (cl W_p^u \cup cl W_p^s) \right)$ ячейкой. Согласно [4], любая ячейка J потока f^t содержит единственный сток ω и источник α в замыкании.

Выберем в каждой ячейке J t -кривую, т. е. траекторию, соединяющую источник со стоком. Обозначим через \mathcal{T} объединение t -кривых потока f^t . Будем называть s -кривой

связку, s -кривой и u -кривой устойчивую и неустойчивую седловую сепаратрису, не являющуюся связкой, соответственно. Назовем компоненту связности множества $\hat{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$ *многоугольной областью*. Согласно [4], любая многоугольная область b потока f^t гомеоморфна открытому диску, и ее граница состоит из замыканий одной t -кривой, одной u -кривой, одной s -кривой и конечного (возможно, пустого) множества c -кривых (см. Рис. 2.1). Будем называть эти кривые *цветными кривыми* и *сторонами* многоугольной области. Каждая c -кривая принадлежит границам в точности двух многоугольных областей b , поэтому ей приписывается пара ее порядковых номеров в этих областях, соответственно.

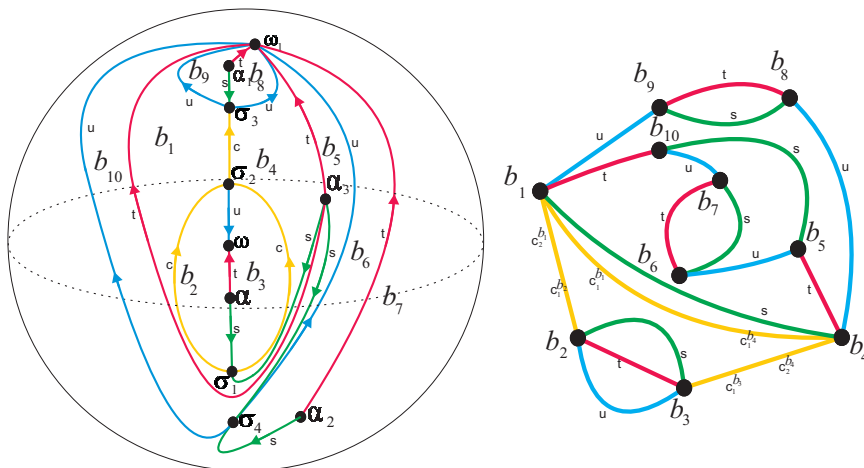


Р и с у н о к 2.1

Многоугольная область

Граф Γ_{f^t} с ребрами цветов u, s, t и c называется *четырёхцветным графом* потока f^t , если:

- каждой многоугольной области b потока f^t соответствует вершина b графа Γ_{f^t} ;
- каждой цветной кривой области b соответствует цветное ребро графа Γ_{f^t} такого же цвета;
- все c -ребра графа Γ_{f^t} имеют ту же пару номеров, что и соответствующие им c -кривые (см. Рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Поток из класса G и его четырехцветный граф

Предложение 2.1 ([4], теорема 1) Ω -устойчивые потоки поверхности топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их четырехцветные графы изоморфны посредством изоморфизма, сохраняющего цветность и нумерацию ребер.

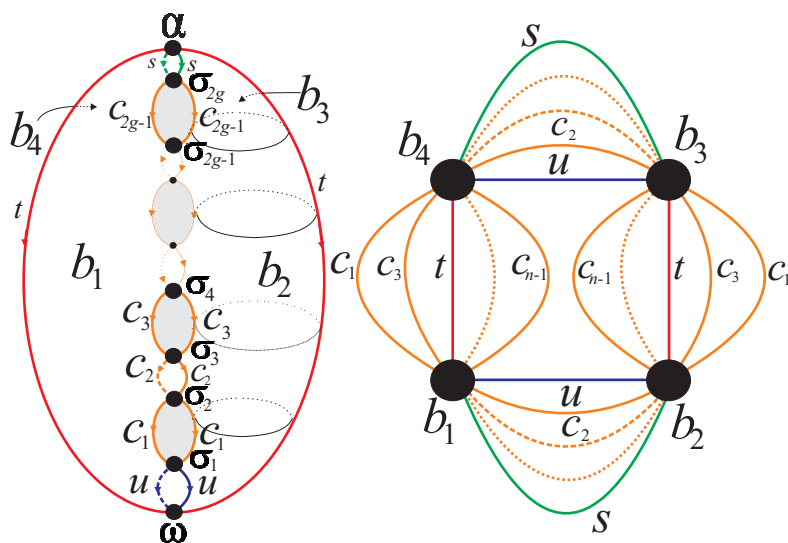
3. Аналитические инварианты потока из класса G

В этом разделе рассматривается класс G градиентных потоков $f^t : S_g \rightarrow S_g$ класса гладкости C^2 , порожденных градиентным векторным полем функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности S_g рода $g > 0$. Неблуждающее множество таких систем состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек: одного источника α , одного стока ω и $2g$ седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$ таких, что

$$W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i = W_{\sigma_{i+1}}^u \setminus \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 2g - 1.$$

Обозначим c_i компоненту связности множества $W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i$.

Поток f^t не имеет циклов и, следовательно, является Ω -устойчивым. Из результатов предыдущего раздела следует, что поток f^t имеет две ячейки и четыре многоугольные области, его четырехцветный граф изображен на Рис. 3.1.



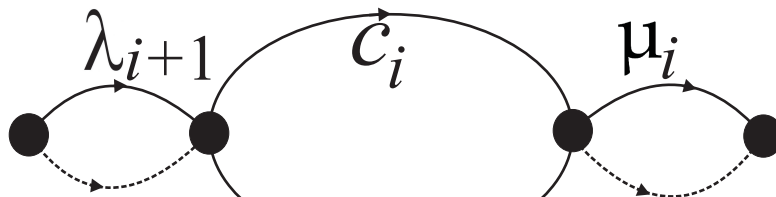
Р и с у н о к 3.1

Поток из класса G и его четырехцветный граф

Таким образом, потоки $f^t, f^{t'} : S_g \rightarrow S_g$ из класса G имеют изоморфные графы и, следовательно, являются топологически эквивалентными. Однако из результатов Ж. Палиса [1] следует, что они не являются топологически сопряженными. Более детально.

Пусть μ_i — положительное собственное значение и λ_i — отрицательное собственное значение седловой точки σ_i (см. Рис. 3.2). Положим

$$\theta_i = \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, 2g - 1.$$



Р и с у н о к 3.2

Связка c_i , ее седла и собственные значения

Введем аналогичные обозначения для потока f^t . Покажем, что совпадение параметров θ_i, θ'_i является необходимым условием топологической сопряженности потоков $f^t, f'^t : S_g \rightarrow S_g$, откуда будет следовать, что число модулей потока класса G не менее $2g - 1$.

Обозначим через $F_{\mu_i, \lambda_i}^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\mu_i > 0, \lambda_i < 0$ – поток на плоскости, определяемый системой

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_i x, \\ \dot{y} = \lambda_i y, \end{cases}$$

Заметим, что $u_{\mu_i, \lambda_i} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x||y|^{-\frac{\mu_i}{\lambda_i}} < 1\}$ – инвариантная окрестность его седловой точки $O(0, 0)$.

Предложение 3.1 ([5], лемма 2.2) Пусть σ_i – седловая точка потока $f^t \in G$ с собственными значениями $\lambda_i < 0, \mu_i > 0$. Тогда существует инвариантная окрестность U_i седла σ_i и диффеоморфизм $\zeta_i : U_i \rightarrow u_{\mu_i, \lambda_i}$, топологически сопрягающий потоки $f^t|_{U_i}$ и $F_{\mu_i, \lambda_i}^t|_{u_{\mu_i, \lambda_i}}$.

Окрестность U_i из предложения 3.1 называется *линеаризирующей окрестностью* точки σ_i .

Обозначим через (x_i, y_i) координаты в окрестности u_{μ_i, λ_i} . Положим $V_i^s = \zeta_i(U_i \cap U_{i+1})$ и $V_{i+1}^u = \zeta_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$. Тогда (см. рис. 3.3) отображение перехода

$$g_i = \zeta_{i+1}\zeta_i^{-1} : V_i^s \rightarrow V_{i+1}^u$$

во введенных координатах имеет вид

$$g_i(x_i, y_i) = (\delta_i(x_i, y_i), \gamma_i(x_i, y_i)) = (x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что линеаризирующие окрестности выбраны так, что

$$x_{i+1} = \delta_i(x_i, y_i) = y_i^{\frac{\mu_{i+1}}{\lambda_i}}.$$

Этого всегда можно добиться подходящей заменой координат.

Лемма 3.1² Для любой точки $(0, y_i^0) \in V_i^s$ верно, что

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i}(0, y_i^0) = 0, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0) \neq 0.$$

Доказательство. По определению $g_i(Ox_i) = Oy_{i+1}$ и, значит, $\gamma_i(Ox_i) \equiv 0$, откуда $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(x_i^0, 0) = 0$. Поскольку g_i – диффеоморфизм, то его якобиан не равен нулю. Поскольку $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(x_i^0, 0) = 0$, то $\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i}(x_i^0, 0) \neq 0$.

Доказательство закончено.

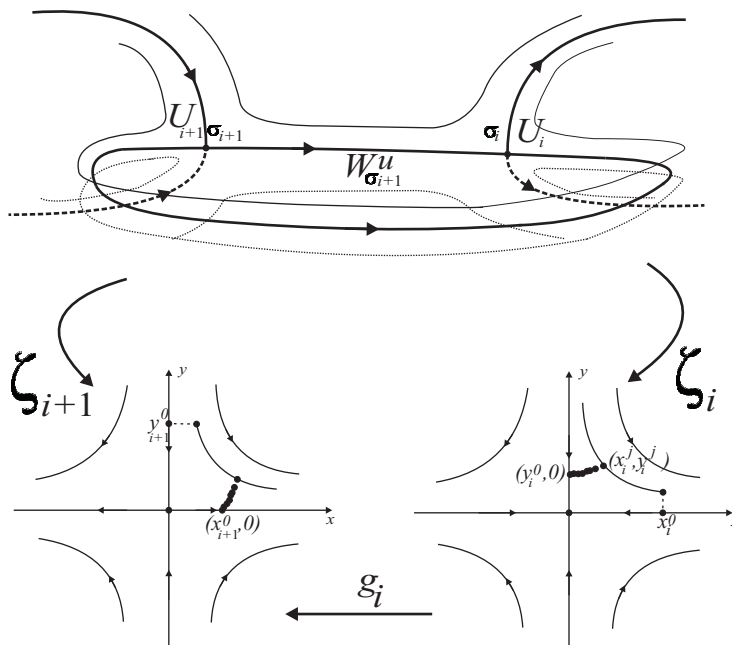
Положим

$$k_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0).$$

Лемма 3.2 Пусть $(x_i^j, y_i^j) \subset V_i^s$ – последовательность точек, сходящаяся к $(0, y_i^0)$ при $j \rightarrow \infty$ такая, что $x_i^j \neq 0$ (см. Рис. 3.3). Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1}^j}{x_i^j} = k_i$.

²Аналогичные приведенным в этом разделе утверждения для диффеоморфизмов можно найти, например, в разделе 2 работы [6] (предложения 2.4 (пункт 1) и 2.5 (пункт 1)).

Доказательство. Используя формулу конечных приращений и тот факт, что $\gamma_i(0, y_i^0) = 0$, получим $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1}^j}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i(x_i^j, y_i^j)}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i(x_i^j, y_i^j) - \gamma_i(0, y_i^j)}{x_i^j} =$
 $= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(\nu \cdot x_i^j, y_i^j) x_i^j}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(\nu \cdot x_i^j, y_i^j) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0) = k_i.$
 Доказательство закончено.



Р и с у н о к 3.3

Отображение перехода

Предложение 3.2 Пусть потоки $f^t, f^{t'} : S_g \rightarrow S_g \in G$ топологически сопряжены. Тогда $\theta_i = \theta'_i$.

Доказательство. Из топологической сопряженности потоков $f^t, f^{t'}$ следует существование гомеоморфизма $h : S_g \rightarrow S_g$ такого, что $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Выберем последовательность $(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j) \subset V_i^u$, как в лемме 3.2. Положим для определенности $y_{i+1}^j, x_{i+1}^j > 0, x_i^j > 0, y_i^j > 0$. Зафиксируем $y_{i+1}^0 > 0, x_i^0 > 0$ (см. Рис. 3.3) и выберем времена t_{i+1}^j, t_i^j такими, что

$$y_{i+1}^0 = y_{i+1}^j \cdot e^{-\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j}, \quad x_i^0 = x_i^j \cdot e^{\mu_i \cdot t_i^j}.$$

Тогда $x_i^0 = y_{i+1}^0 \cdot e^{\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j} \cdot k_i^j \cdot e^{\mu_i \cdot t_i^j}$, где $k_i^j = \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j}$. Откуда $\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j + \mu_i \cdot t_i^j = \ln \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j \cdot k_i^j}$ и, следовательно,

$$\frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = \frac{\ln \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j \cdot k_i^j}}{\mu_i \cdot t_{i+1}^j} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i}.$$

В силу лемм 3.1, 3.2 и того, что $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j^{i+1} = \infty$, получим:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x_i^0}{y_{i+1}^0 \cdot k_i}}{\mu_i \cdot t_{i+1}^j} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i} = -\theta_i.$$

Положим $h_i = \zeta_i' h \zeta_i^{-1}$, $(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j) = h_{i+1}(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j)$, $(0, y_{i+1}^0) = h_{i+1}(0, y_{i+1}^0)$, $(x_i^0, 0) = h_i(x_i^0, 0)$ (см. Рис. 3.3). Поскольку h – сопрягающий гомеоморфизм, имеют место следующие равенства:

$$y_{i+1}^0 = y_{i+1}^j \cdot e^{-\lambda_{i+1}' \cdot t_{i+1}^j}, \quad x_i^0 = x_i^j \cdot e^{\mu_i' \cdot t_i^j}.$$

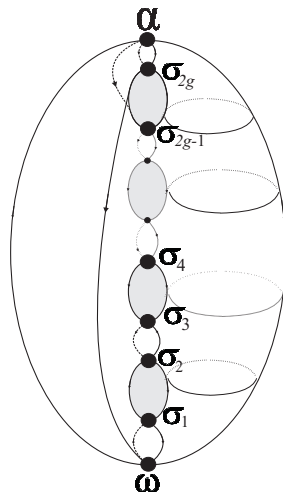
Из рассуждений, аналогичных вышеприведенным, получим, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = -\theta_i'$. Таким образом, $\theta_i = \theta_i'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

4. Топологическая сопряженность потоков в окрестности системы из класса G

В настоящем разделе показывается, что для двух потоков в окрестности системы из класса G достаточными условиями их топологической сопряженности являются изоморфность их цветных графов и совпадение аналитических инвариантов, из чего следует, что число модулей потока класса G не более $2g - 1$. Рассмотрим данное утверждение более детально.

В силу Ω -устойчивости потока $f^t : S_g \rightarrow S_g$ из класса G любой поток ϕ^t в некоторой окрестности $U(f^t)$ потока f^t имеет такое же, как и f^t , неблуждающее множество, по типу и количеству входящих в неблуждающее множество точек, поэтому мы сохраним обозначения этих точек. Каждый такой поток ϕ^t получается из потока f^t разрушением конечного числа связок (см. Рис. 4.1) и, соответственно, является Ω -устойчивым потоком. Таким образом, для него корректно определен четырехцветный граф Γ_{ϕ^t} и параметры θ_i , $i = 1, \dots, 2g - 1$.



Р и с у н о к 4.1

Поток из окрестности системы из класса G

Л е м м а 4.1 Пусть $\phi^t, \phi'^t \in U(f^t)$. Если графы $\Gamma_{\phi^t}, \Gamma_{\phi'^t}$ изоморфны и $\theta_i = \theta_i'$ для всех $i = 1, \dots, 2g - 1$, то потоки ϕ^t и ϕ'^t топологически сопряжены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 2.1, из изоморфности графов Γ_{ϕ^t} и $\Gamma_{\phi'^t}$ следует, что потоки топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма $h: S_g \rightarrow S_g$. Положим $p' = h(p)$ для любой точки $p \in \Omega_{f^t}$ и $c_i' = h(c_i)$ для любой c_i -кривой. Покажем, как модифицировать гомеоморфизм h до гомеоморфизма $H: S_g \rightarrow$

S_g , осуществляющего топологическую сопряженность. Везде далее будем использовать обозначения предыдущего раздела.

Шаг 1. Положим $\bar{h}_i = \zeta'_i h \zeta_i^{-1} : u_{\mu_i, \lambda_i} \rightarrow u_{\mu'_i, \lambda'_i}$. Не уменьшая общности, будем полагать, что \bar{h}_i сохраняет ориентацию координатных осей Ox, Oy (в противном случае можно линеаризующий гомеоморфизм заменить на его композицию с отображением симметрии относительно оси). Положим

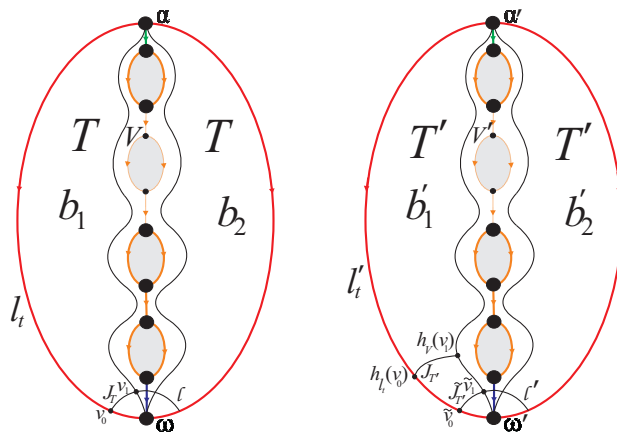
$$\rho_i = \frac{\mu'_i}{\mu_i}, \beta_i = \frac{\lambda'_i}{\lambda_i}.$$

Определим гомеоморфизм $\bar{H}_i : u_{\mu_i, \lambda_i} \rightarrow u_{\mu'_i, \lambda'_i}$ формулой $\bar{H}_i(\pm x, \pm y) = (\pm A_i x^{\rho_i}, \pm B_i y^{\beta_i})$, где $x \geq 0, y \geq 0, A_i, B_i$ – некоторые положительные константы. Непосредственно проверяется, что при любом выборе коэффициентов гомеоморфизм \bar{H}_i сопрягает потоки F_{μ_i, λ_i}^t и $F_{\mu'_i, \lambda'_i}^t$. Выберем константы A_i, B_i по следующему правилу:

1. $A_1 = B_1 = 1$;
2. $A_{i+1} = B_i^{\frac{\mu'_{i+1}}{\lambda_i}}$;
3. $B_{i+1} = A_i \cdot \frac{k'_i}{k_i^{\rho_i}}$, если хотя бы одна из неустойчивых сепаратрис седла σ_{i+1} является связкой, и $B_{i+1} = 1$ в противном случае.

Положим $H_i = \zeta_i'^{-1} h \zeta_i : U_i \rightarrow U'_i$. Из условия $\theta_i = \theta'_i$ (следовательно, $\beta_{i+1} = \rho_i$) и леммы 3.2 следует, что построенные отображения совпадают на пересечениях линеаризующих окрестностей. Обозначим через h_V гомеоморфизм, построенный на объединении седловых линеаризующих окрестностей и через V, V' само это объединение у потока f^t, f'^t соответственно.

Шаг 2. Построим гомеоморфизм в оставшихся частях поверхности. Рассуждения аналогичны доказательству основной теоремы в [7]. Обозначим $V_b = V \cap cl(b)$ область в b , где уже построен h_V (см. Рис. 4.2). Заметим, что h_V может быть очевидно продолжен на $cl(V_b)$ в силу непрерывности.



Р и с у н о к 4.2

Построение гомеоморфизма в области T

Обозначим $T = cl(b) \setminus V_b$. Аналогично- T' . Построим гомеоморфизм $h_T : T \rightarrow T'$.

Пусть ℓ и ℓ' – две измеримые замкнутые кривые без контакта, являющиеся границей некоторых окрестностей стоков ω и ω' соответственно (их существование следует из гиперболичности стоков), и, очевидно, общие для всех областей с ω, ω' соответственно в границе.

Обозначим t -кривую области b через l_t и области b' через l'_t . Пусть $\{v_0\} = \ell \cap l_t$ и $\{\tilde{v}_0\} = \ell' \cap l'_t$. Построим сопрягающий гомеоморфизм $h_{l_t}: l_t \rightarrow l'_t$ так, что если $z = f^{tz}(v_0)$, то $z' = h_{l_t}(z)$ при $z' = f^{t'z}(\tilde{v}_0)$ (см. рис. 4.2).

Пусть $J_T = \ell \cap T$ и пусть v_0, v_1 – концы дуги J_T , при этом $v_1 \in \partial V_b$. Аналогично дуга $\tilde{J}_{T'} = \ell' \cap T'$ ограничена точками \tilde{v}_0, \tilde{v}_1 , принадлежащими $l'_t, \partial V_{b'}$ соответственно. Положим $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ такими, что $f^{t_0}(\tilde{v}_0) = h_{l_t}(v_0)$, $f^{t_1}(\tilde{v}_1) = h_{l_t}(v_1)$ и положим $\rho: \tilde{J}_{T'} \rightarrow [0, 1]$ – гомеоморфизм такой, что $\rho(\tilde{v}_j) = j, j = 0, 1$. Пусть

$$J_{T'} = \{f^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{J}_{T'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Зададим произвольный гомеоморфизм $h_J: J_T \rightarrow J_{T'}$ так, что $h_J(v_0) = h_{l_t}(v_0)$ и $h_J(v_1) = h_{l_t}(v_1)$. Тогда любая точка z из T определяется единственным образом точкой z_0 такой, что $\{z_0\} = \mathcal{O}_z \cap J_T$ и значением времени $t_z \in \mathbb{R}$ таким, что $f^{t_z}(z_0) = z$. Определим гомеоморфизм $h_T: T \rightarrow T'$ формулой $h_T(f^{t_z}(z_0)) = f^{t_z}(h_J(z_0))$. Построим итоговый гомеоморфизм $h_b: cl(b) \rightarrow cl(b')$ так, что $h_b|_{cl(V)} = h_V$ и $h_b|_T = h_T$. Он, очевидно, совпадает с гомеоморфизмами на соседних областях.

Таким образом, $H: S_g \rightarrow S_g$ задается формулой $H(x) = h_b$ при $x \in b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Благодарности. Автор благодарит Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00022 мол_а, кроме необходимого условия основной теоремы, которое доказано как результат исследовательского проекта «Топология и хаос в динамике систем, слоений и деформации алгебр Ли (2018)» в НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Palis, “A Differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Astérisque*, **51** (1978), 335–346.
2. W. De Melo, S. J. van Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 415–462.
3. C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150–158.
4. В. Е. Круглов, Д. С. Малышев, О. В. Починка, “Многоцветный граф как полный топологический инвариант для Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Математический сборник*, **209**:1 (2018), 100–126.
5. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике: Пер. с англ.*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003.
6. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания”, *Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова*, **270** (2010), 198–219.
7. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces (accepted for publishing)”, *Dinamicheskie sistemy*, **8(36)**:1 (2018), 15–21.

Поступила 17.09.2018

MSC2010 34C20

On number of moduli for gradient surface height function flows

© V. E. Kruglov¹

Abstract. In 1978 J. Palis invented continuum topologically non-conjugate systems in a neighbourhood of a system with a heteroclinic contact; in other words, he invented so-called moduli. W. de Melo and C. van Strien in 1987 described a diffeomorphism class with a finite number of moduli. They discovered that a chain of saddles taking part in the heteroclinic contact of such diffeomorphism includes not more than three saddles. Surprisingly, such effect does not happen in flows. Here we consider gradient flows of the height function for an orientable surface of genus $g > 0$. Such flows have a chain of $2g$ saddles. We found that the number of moduli for such flows is $2g - 1$ which is the straight consequence of the sufficient topological conjugacy conditions for such systems given in our paper. A complete topological equivalence invariant for such systems is four-colour graph carrying the information about its cells relative position. Equipping the graph's edges with the analytical parameters — moduli, connected with the saddle connections, gives the sufficient conditions of the flows topological conjugacy.

Key Words: modulus of stability, gradient flow, topological conjugacy, four-colour graph, topological invariant

REFERENCES

1. J. Palis, “A Differentiable Invariant of Topological Conjugacies and Moduli of Stability”, *Astérisque*, **51** (1978), 335–346.
2. W. de Melo, S. J. van Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 415–462.
3. C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150–158.
4. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “Multicolour graph as a complete topological invariant for Ω -stable flows without periodic trajectories on surfaces”, *Matematicheskiiy sbornik*, **209**:1 (2018), 100–126 (In Russ.).
5. L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike [Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics]*, Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., Moscow-Izhevsk, 2003 (In Russ., transl. from Eng.).
6. T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, “Necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number of orbits of heteroclinic tangency”, *Trudy mat. inst. im. V.A. Steklova*, **270** (2010), 198–219 (In Russ.).
7. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces (accepted for publishing)”, *Dinamicheskie sistemy*, **8(36)**:1 (2018), 15–21.

Submitted 17.09.2018

¹Vladislav E. Kruglov, Post-Graduated Student, at Department of fundamental mathematics, trainee-researcher of the laboratory “Topological methods in dynamics”, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155 Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru