DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.395-407

УДК 514.7

Структура римановых слоений со связностью Эресмана

© **Н. И. Жукова**[1]

Аннотация. Показано, что структурная теория Молино для римановых слоений на компактных многообразиях и на полных римановых многообразиях обобщается на римановы слоения со связностями Эресмана. При этом никаких ограничений на коразмерность слоения и размерность многообразия не накладывается. Для любого риманова слоения (M, F), допускающего связность Эресмана, доказано, что замыкание любого слоя образует минимальное множество, а множество всех таких замыканий образует риманово слоение с особенностями $(M, \overline{F})$, причем в M существует связное открытое всюду плотное $\overline{F}$-насыщенное подмножество M_0, на котором индуцированное слоение $(M_0, \overline{F}|_{M_0})$ образовано слоями локально тривиального расслоения над некоторым хаусдорфовым гладким многообразием. Доказана также эквивалентность ряда свойств для римановых слоений (M, F), допускающих связность Эресмана. В частности, доказано, что равенство нулю структурной алгебры Ли слоения (M, F) эквивалентно тому, что пространство слоев естественным образом наделяется структурой гладкого орбифолда. Простроены примеры, показывающие, что для слоений с трансверсальной линейной связностью и конформных слоений аналогичные утверждения, вообще говоря, не верны.

Ключевые слова: риманово слоение, связность Эресмана для слоения, локальная устойчивость слоя, минимальное множество

1. Введение

Исследованию римановых слоений посвящены многочисленные статьи и монографии ряда авторов. Прежде всего, следует отметить работы Р. Германа [1], Б. Рейнхарта [2], А. Хефлигера [3], П. Молино [4] и Ф. Тондеура (Ph. Tondeuer). Теоремы о стабильности в смысле Риба и Эресмана некомпактных слоев римановых слоений, в том числе для слоений с особенностями, доказаны в работах автора [5] и [6].

Во всех перечисленных выше работах о римановых слоениях (M, F) предполагается либо компактность многообразия M, либо полнота ассоциированной трансверсально проектируемой римановой метрики g на M, называемой Б. Рейнхардтом метрикой, подобной расслаивающейся («bundle like metric») [2], либо (как минимум) трансверсальная полнота слоения, означающая, что натуральный параметр на каждой максимальной геодезической, ортогональной слоению, изменяется на всей числовой прямой.

Р. А. Блюченталь и Дж. Хебда ввели понятие связности Эресмана для гладкого слоения (M, F) коразмерности q на n-мерном гладком многообразии M, где $0 < q < n$. Связностью Эресмана для (M, F) называется такое q-мерное распределение на M, трансверсальное этому слоению, для которого определены переносы его интегральных кривых вдоль любых слоевых кусочно гладких кривых (строгое определение дано в параграфе 2.3.),

Цель данной работы – показать, что структурная теория Молино для римановых слоений на компактных многообразиях [4] и на полных римвновых многообразиях ([3] и [7]) обобщается на римановы слоения со связностью Эресмана, а также доказать эквивалентность ряда свойств для римановых слоений, допускающих связность Эресмана.

[1]**Жукова Нина Ивановна**, профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155 Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4553-559X, nzhukova@hse.ru

Подчеркнем, что любое трансверсально полное риманово слоение, как и риманово слоение на полном римановом многообразии (M, g) с ассоциированной метрикой g, допускает в качестве связности Эресмана ортогональное распределение $\mathfrak{M}$ размерности q, равной коразмерности слоения. Обратное утверждение неверно, как показывает Пример 1.

Таким образом, преимущество применения связности Эресмана состоит не только в большей общности по сравнению с указанными требованиями полноты, но и в том, что связность Эресмана носит дифференциально-топологический характер, в отличие от полноты, и не зависит от трансверсальной римановой метрики, фигурирующей в определении риманова слоения.

В параграфе 2.3. мы приводим определение и свойства слоеного расслоения с поднятым e-слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ над римановым слоением (M, F) и его свойства.

Применяя методы исследования трансверсально однородных слоений в смысле [8], а также метод псевдогрупп голономии и результаты работ [3], [7] и [9], докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1.1 *Пусть (M, F) — риманово слоение, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$, и $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ — его поднятое e-слоение. Тогда*

1) *замыкания слоев слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ являются слоями некоторого локально тривиального расслоения $\pi_b \colon \mathcal{R} \to W$ над гладким многообразием W;*

2) *слоение $(\overline{\mathcal{L}}, \mathcal{F}|_{\overline{\mathcal{L}}})$, индуцированное на замыкании $\overline{\mathcal{L}}$ слоя $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, является слоением Ли с всюду плотными слоями.*

Следующее определение корректно, то есть не зависит от выбора слоя $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$.

О п р е д е л е н и е 1.1 *Структурная алгебра $\mathfrak{g}_0$ слоения Ли с всюду плотными слоями $(\overline{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\overline{\mathcal{L}}})$ называется структурной алгеброй риманова слоения (M, F) со связностью $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$.*

Подчеркнем, что для компактных многообразий M данное определение структурной алгебря Ли риманова слоения со связностью Эресмана совпадает с определением структурной алгебря Ли, данным П. Молино [4].

Напомним, что подмножество многообразия M со слоением (M, F) называется F-насыщенным, если его можно представить как объединение некоторых слоев слоения. Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ многообразия M называется *минимальным множеством* слоения (M, F), если любой слой из $\mathcal{M}$ всюду плотен в $\mathcal{M}$.

Применяя Теорему 1.1 и результаты работы [10], докажем следующую структурную теорему.

Т е о р е м а 1.2 *Если риманово слоение (M, F) допускает связность Эреснана, то замыкание $\overline{L}$ каждого его слоя L является минимальным множеством и вложенным подмногообразием в M, а совокупность всех замыканий слоев образует риманово слоение с особенностями $(M, \overline{F})$. Существует связное открытое $\overline{F}$-насыщенное всюду плотное подмножество M_0 в M такое, что слоение $(M_0, \overline{F}_{M_0})$ образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией $p : M_0 \to B$ на хаусдорфово гладкое многообразие B.*

Понятие устойчивости слоев слоений введены основателями теории слоений Эресманом и его учеником Рибом.

Слой слоения (M, F) называется *собственным*, если он — вложенное подмногообразие в M. Слоение, все слои которого собственные, называется *собственным.* Слой L слоения (M, F) называется замкнутым, если L — замкнутое подмножество в M. Как известно, любой замкнутый и, в частности, компактный слой является собственным.

Определение 1.2 *Слой L слоения (M, F) коразмерности q называется локально устойчивым (в смысле Эресмана и Риба), если существует семейство насыщенных окрестностей $\{W_k | k \in \mathbb{N}\}$, обладающее следующими свойствами:*

1) существует такая субмерсия $f_1 : W_1 \to L$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ тройка (W_k, f_k, L), где $f_k = f_1|_{W_k}$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем q-мерным диском D^q, причем слои этого расслоения трансверсальны слоям слоения $(W_k, F|_{W_k})$;

2) для произвольной точки $x \in L$, множество $\{W_k \bigcap f_1^{-1}(x) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ — база топологии слоя $f_1^{-1}(x)$ в точке x.

Согласно известной теореме Риба [11], любой компактный слой слоения с конечной группой голономии локально устойчив.

Следующий критерий локальной устойчивости собственного слоя для римановых слоений со связностью Эресмана доказан нами в [6], Теорема 1.

Теорема 1.3 *Пусть L — слой риманова слоения (M, F), допускающего связность Эреснана. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(i) слой L – собственный;

(ii) слой L – замкнутый;

(iii) слой L локально устойчив.

Следующее утверждение указывает ряд специфических свойств римановых слоений со связностью Эресмана.

Теорема 1.4 *Пусть (M, F) — риманово слоение, допускающее связность Эресмана. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, F)$ равна нулю;

(ii) все слои слоения (M, F) замкнуты в M;

(iii) слоение (M, F) – собственное;

(iv) каждый слой слоения (M, F) локально устойчив в смысле Риба и Эресмана;

(v) существует собственный слой с конечной (ростковой) группой голономии;

(vi) пространство слоев M/F естественным образом наделяется структурой гладкого q-мерного орбифолда, причем фактор-отображение $f : M \to M/F$ является субмерсией орбифолдов.

Замечание 1.1 *Отметим, что если пространство слоев M/F слоения (M, F), допускающего связность Эресмана, естественным образом наделяется структурой гладкого q-мерного орбифолда, причем фактор-отображение $M \to M/F$ является субмерсией орбифолдов, то это слоение — риманово, все его слои замкнуты и локально устойчивы, а группы голономии – конечны.*

Замечание 1.2 *Р. Герман [1] первым доказал, что пространство слоев риманова слоения, все слои которого замкнуты, на полном римановом многообразии хаусдорфово и естественным образом наделяется структурой метрического пространства.*

2. Обозначения и основные понятия

2.1. Обозначения

Заметим, что для простоты под гладкостью мы понимаем гладкость класса C^{∞}, хотя фактически результаты верны при гладкости класса C^{r}, $r \geq 2$.

Через $\mathcal{F}ol$ обозначается категория слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого слоения. Через $A(M,F)$ обозначается группа автоморфизмов слоения (M,F) в категории $\mathcal{F}ol$.

Алгебра гладких функций на многообразии M обозначается $\mathfrak{F}(M)$. Гладкая функция называется базисной, если она постоянна на слоях слоения. Через $\Omega^0_b(M,F)$ обозначается подалгебра базисных функций алгебры $\mathfrak{F}(M)$.

Модуль векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{X}(M)$, а множество векторных полей, касательных к распределению $\mathfrak{M}$ на M, — через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$. Если $\mathfrak{M} = TF$ — распределение, касательное к слоению (M,F), то $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ обозначается также через $\mathfrak{X}_F(M)$. Сужение слоения (M,F) на открытое подмножество $U \subset M$ обозначается F_U. Пусть $k : N \to M$ — сюръективная субмерсия, причем на M задано распределение $\mathfrak{M}$. Тогда на N индуцировано распределение $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_u \,|\, u \in N\}$, где $\mathfrak{N}_u := \{Y \in T_uN \,|\, k(Y) \in \mathfrak{M}_{k(u)}\}$, которое будем обозначать $k^*\mathfrak{M}$.

Символ $\cong$ обозначает изоморфность объектов в соответствующей категории.

2.2. Римановы слоения

Пусть N – гладкое q-мерное многообразие, связность которого не предполагается. Пусть (M,F) — гладкое слоение произвольной коразмерности q на n-мерном многообразии M, где $0 < q < n$, заданное N-коциклом $\xi = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$. Это означает, что:

1) $\{U_i \,|\, i \in J\}$ – открытое покрытие многообразия M;

2) $f_i : U_i \to N$ – субмерсии в N со связными слоями, принадлежащими слоям слоения;

3) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству: $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на пересечении $U_i \cap U_j$.

Будем считать, что $\eta = \{V_i \,|\, V_i = f_i(U_i),\, i \in J\}$ – покрытие N. Поскольку субмерсии являются открытыми отображениями, η — открытое покрытие.

Если на многообразии N существует такая риманова метрика g^N, что все преобразования γ_{ij} являются изометриями соответствующих открытых подмножеств в (N, g^N), то (M,F) называется *римановым* слоением, заданным (N, g^N)-коциклом ξ.

Напомним, что q-мерное многообразие N называется *параллелизуемым*, если существует q гладких векторных полей $Y_1, ..., Y_q$ на N, образующих базис касательного векторного пространства T_xN в каждой точке $x \in N$. Векторные поля $Y_1, ..., Y_q$ называются параллелизацией N.

Если существует параллелизация $Y_1, ..., Y_q$ многообразия N такая, что дифференциал γ_{ij*} каждого преобразования γ_{ij} из N-коцикла $\xi = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in J}$, задающего слоение (M,F), сохраняют эту параллелизацию, то (M,F) называется *трансверсально параллелизуемым*, или e-слоением. Подчеркнем, что любое e-слоение является римановым.

Риманова метрика g на M называется трансверсально проектируемой относительно слоения (M,F), если $L_X g = 0$, где $L_X g$ — производная Ли от g вдоль произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}_F(M)$.

Как известно, имеет место следующая характеризация риманова слоения.

П р е д л о ж е н и е 2.1 *Слоение (M, F) является римановым тогда и только тогда, когда на M существует трансверсально проектируемая относительно (M, F) риманова метрика.*

З а м е ч а н и е 2.1 *Риманово слоение (M, F) является трансверсально полным в смысле Определения 1.1 тогда и только тогда, когда оно, рассматриваемое как картаново слоение, является полным в смысле* [10].

2.3. Слоеное расслоение над римановым слоением

Для произвольного риманова слоения (M, F) коразмерности q на n-мерном многообразии M определено расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$ трансверсальных ортогональных реперов, которое представляет собой главное H-расслоение, $H = O(q)$, с индуцированным слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, слои которого посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M, F) (см., например [10]). Предполагается, что группа H действует на $\mathcal{R}$ справа, и через R_a обозначается действие элемента $a \in H$ на $\mathcal{R}$.

Пусть $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ – полупрямое произведение подгруппы H и нормального делителя $\mathbb{R}^q$. Через $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ обозначим алгебры Ли групп Ли H и G соотверственно. На многообразии $\mathcal{R}$ определена также $\mathfrak{g}$-значная 1-форма $\tilde{\omega}$, причем выполняются условия:

(i) $\tilde{\omega}(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$;

(ii) $R_a^*\tilde{\omega} = Ad_G(a^{-1})\tilde{\omega}$ для всех $a \in H$;

(iii) отображение $\tilde{\omega}_u \colon T_u(\mathcal{R}) \to \mathfrak{g}$ $\forall u \in \mathcal{R}$ сюръективно, причем $\ker \tilde{\omega}_u = T_u F$;

(iv) слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является трансверсально параллелизуемым.

Слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется *поднятым.*

2.4. Связность Эресмана для слоения

Понятие связности Эресмана введено Блюменталем и Хебдой в [12].

Напомним терминологию, используемую нами в [10]. Пусть (M, F) — гладкое слоение коразмерности $q \geq 1$, и $\mathfrak{M}$ — q-мерное трансверсальное распределение.

Все рассматриваемые кривые предполагаются кусочно гладкими. Кривая называется *вертикальной,* если она лежит в одном слое слоения (M, F). Кривая называется *горизонтальной,* если все ее касательные вектора принадлежат распределению $\mathfrak{M}$. Другими словами, кусочно гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок, – интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$.

Вертикально-горизонтальной гомотопией называется кусочно гладкое отображение $H : I_1 \times I_2 \to M$, где $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$, для которого сужение $H_{|I_1 \times \{t\}}$, $t \in I_2$, — горизонтальная кривая, а сужение $H_{|\{s\} \times I_2}$, $s \in I_1$ — вертикальная кривая. Пара путей $(H_{|I_1 \times \{0\}}, H_{|\{0\} \times I_2})$ с общим началом называется *базой* вертикально-горизонтальной гомотопии H. Пара путей (σ, h) где $\sigma : I_1 \to M$ — горизонтальная, а $h : I_2 \to M$ — вертикальная кривая, называется *допустимой для вертикально-горизонтальной гомотопии.*

Распределение $\mathfrak{M}$ называется *связностью Эресмана для слоения* (M, F), если для любой допустимой пары путей (σ, h) существует вертикально-горизонтальная гомотопия с базой (σ, h). Если существует вертикально-горизонтальная гомотопия H с базой (σ, h), то такая гомотопия – единственная.

Путь $\widetilde{\sigma} := H_{|I_1 \times \{1\}}$ называется *переносом* пути σ вдоль h и обозначается $\sigma \overset{\sigma}{\to}> \widetilde{\sigma}$. Аналогично, путь $\widetilde{h} := H_{|\{1\} \times I_2}$ называется переносом пути h вдоль σ и обозначается через $\sigma \overset{h}{\to}> \widetilde{h}$.

З а м е ч а н и е 2.2 *Согласно Замечанию 2.1, трансверсально полное риманово слоение (M, F) можно рассматривать как полное картаново слоение, поэтому из* [10] *(Предложение 3) вытекает, что дополнительное по ортогональности распределение $\mathfrak{M}$ на многообразии (M, g) с адаптированной римановой метрикой является связностью Эресмана для слоения (M, F).*

2.5. Слоеные и трансверсальные векторные поля

Пусть (M, F) — слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Напомним, что векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ называется *слоеным*, если $[X, Y] \in \mathfrak{X}_F(M)$ для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$. Так как $T_xM = \mathfrak{M}_x \oplus T_xF$, то любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ однозначно представимо в виде суммы $X = X^{\mathfrak{M}} + X^F$, где $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, $X^F \in \mathfrak{X}_F(M)$. Если $X \in \mathfrak{X}(M)$ — слоеное векторное поле, то его проекция $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ называется *трансверсальным* векторным полем. Модуль трансверсальных векторных полей обозначается через $l(M, F)$ [4].

3. Доказательства теорем

3.1. Трансверсально параллелизуемые слоения со связностью Эресмана

Слоение (M, F) называется *однородным* [8], если группа автоморфизмов $A(M, F)$ в категории слоений $\mathcal{F}ol$ действует транзитивно на M. Как известно, транзитивность действия $A(M, F)$ на каждом слое слоения всегда имеет место.

Напомним, что подмножество многообразия со слоением назвается насыщенным, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев этого слоения. *Насыщением* $N(V)$ подмножества V называется объединение всех слоев, пересекающих V.

Сначала докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 3.1 *Пусть (M, F) — трансверсально параллелизуемое слоение со связностью Эресмана на n-мерном многообразии M и $q = codim(M, F)$. Тогда:*

(i) слоение (M, F) – трансверсально однородное;

(ii) замыкания слоев слоения (M, F) образуют минимальные множества слоения (M, F) и являются слоями субмерсии $\pi_{\mathfrak{b}}\colon M \to W$ на некоторое $q_{\mathfrak{b}}$-мерное гладкое многообразием W, где $0 \leq q_{\mathfrak{b}} \leq q$;

(iii) субмерсия $\pi_{\mathfrak{b}}\colon M \to W$ является проекцией локально тривиального расслоения;

(iv) слоение $(\overline{L}, F|_{\overline{L}})$, индуцированное на замыкании $\overline{L}$ слоя $L \in F$, является слоением Ли со всюду плотными слоями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (M, F) — трансверсально параллелизуемое слоение коразмерности q на n-мерном многообразии M со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Поскольку трансверсально параллелизуемое слоение является римановым слоением, на M определена трансверсально проектируемая метрика g, относительно которой распределение $\mathfrak{M}$

ортогонально слоям. Как показано Рейнхартом в [2], $\mathfrak{M}$ — вполне геодезическое распределение на римановом многообразии (M, g).

(i). Предположим, что векторные поля $X_i \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$, $i = 1, ..., q$, образуют трансверсальную параллелизацию слоения (M, F). Поскольку мы не предполагаем их полными, в окрестности U любой точки $x_0 \in M$, адаптированной к (M, F), они определяют локальные 1-параметрические группы локальных диффеоморфизмов $\varphi_t^{X_i}$. Уменьшая в случае необходимости U, не нарушая общности, можно считать, что $\varphi_t^{X_i}$ определены на U при любом $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ для всех $i = 1, ..., q$ и порождают вместе с $A(M, F)$ группу автоморфизмов $\hat{A}(M, F)$, транзитивно действующую на U.

Из существования связности Эресмана для (M, F) вытекает, что 1-параметрические группы локальных диффеоморфизмов $\varphi_t^{X_i}$ определены в насыщении $N(U)$ окрестности U при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Отсюда следует, что группа автоморфизмов $A(M, F)$ транзитивно действует на $N(U)$. Следовательно, каждая орбита группы $A(M, F)$ представляет собой открытое подмножество в M. Поэтому дополнение орбиты группы $A(M, F)$ состоит из открытых орбит и также открыто в M. Таким образом, каждая орбита группы $A(M, F)$ есть открыто-замкнутое подмножество в M. Благодаря связности M, многообразие M состоит из одной орбиты группы $A(M, F)$, и (M, F) — трансверсально однородное слоение в смысле [8].

(ii). Через $\mathfrak{X}_F(M)$ обозначается подалгебра алгебры Ли векторных полей, касательных к слоям слоения (M, F). Подчеркнем, что если $X \in \mathfrak{X}_F(M)$, то $X(f) = 0$ для любой функции $f \in \Omega_b^0(M, F)$, т. е. гладкой функции на M, постоянной на слоях слоения (M, F). Рассмотрим множество векторных полей

$$\mathfrak{X}_F^b(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \,|\, X(f) = 0 \ \ \forall f \in \Omega_b^0(M, F)\}.$$

При этом $\mathfrak{X}_F(M) \subset \mathfrak{X}_F^b(M)$.

Сохраняя обозначения из [8], положим по определению

$$E := \{E_x \,|\, x \in M\}, \quad E_x = \{X \in \mathfrak{X}_F^b(M)\}.$$

Однородность слоения (M, F) влечет постоянство размерности E_x, $x \in M$. Таким образом, E — гладкое распределение на M. Поскольку E инвариантно относительно скобки Ли векторных полей, согласно теореме Фробениуса, E интегрируемо и определяет слоение, которое обозначается через (M, F_b) и называется *базисным.* При этом $E = TF_b$. Пусть $q_b = codim(F_b)$ — коразмерность (M, F_b). Кроме того, $\mathfrak{X}_{F_b}(M) = \mathfrak{X}_F^b(M)$, следовательно, каждый слой слоения (M, F) содержится в некотором слое слоения (M, F_b), поэтому $0 \leq q_b \leq q$.

Используя те же аргументы, что и при доказательстве Теоремы 4.3 в [8], мы получим, что $A(M, F) \subset A(M, F_b)$ и, следовательно, (M, F_b) – также однородное слоение. Следовательно все его слои диффеоморфны. Кроме того, пространство слоев M/F_b — хаусдорфово гладкое q_b-мерное многообразие, которое обозначается через W и называется базовым, а фактор-отображение $\pi_b : M \to M/F_b = W$ является субмерсией, слои которой совпадают со слоями слоения (M, F_b). Отсюда вытекает тривиальность групп голономии всех слоев слоения (M, F_b).

Поскольку (M, F) — риманово слоение со связностью Эресмана, то согласно Предложению 2, доказанному нами в [9], псевдогруппа голономии $\mathcal{H}(M, F)$ является полной псевдогруппой локальных изометрий многообразия (N, g^N). Благодаря этому к (M, F) можно применить результаты А. Хефлигера [3] и Е. Салем [7], из которых следует, что базисное слоение (M, F_b) образовано замыканиями слоев слоения (M, F), причем каждый слой L слоения (M, F) всюду плотен в содержащем его слое $\mathcal{L}$ слоения (M, F_b). Следовательно, $\mathcal{L} = \overline{L}$ — минимальное множество слоения (M, F). Это завершает доказательство утверждения (ii).

(iii). В каждой точке $x \in M$ существует координатная окрестность U, адаптированная к обоим слоениям (M, F) и (M, F_b). Существуют q_b базисных функций $f_1, ..., f_{q_b}$, дифференциалы которых линейно независимы на U. При этом

$$E_x = \cap_{i=1}^{q_b} Ker(df_i)_x$$

для $x \in U$. Отсюда вытекает, что слоение $(U, F_b|_U)$ образовано слоями субмерсии $s : U \to \mathbb{R}^{q_b}$, где $s(y) = (f_1(y), ..., f_{q_b}(y))$, $y \in U$. Поскольку функции $f_1, ..., f_{q_b}$ постоянны на каждом слое слоения (M, F_b), то любой слой этого слоения, пересекающий U, пересекает U строго по одному локальному слою. Рассмотрим насыщение $N(U)$ окрестности U слоями слоения (M, F_b), тогда пространство слоев $V := N(U)/F_b = U/F_b \cong \mathbb{R}^{q_b}$. Обозначим через $k : N(U) \to N(U)/F_b = V$ фактор-отображение на пространство слоев.

Пусть $Z_1, ..., Z_{q_b}$ — гладкие векторные поля на многообразии V, образующие глобальный базис TV. Заметим, что существуют гладкие векторные поля $\overline{Z}_1, ..., \overline{Z}_{q_b} \in l(N(U), F_b|_{N(U)})$ такие, что $\overline{Z}_1, ..., \overline{Z}_{q_b} \in l(N(U), F_b|_{N(U)})$ и $k_*(\overline{Z}_i) = Z_i$, $1 \leq i \leq q_b$. При этом определено гладкое q_b-мерное распределение $\mathfrak{M}_b$ на $N(U)$ с глобальным базисом $\overline{Z}_i$, $1 \leq i \leq q_b$.

Используя то, что $\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для (M, F), причем каждый слой базисного слоения является минимальным множеством слоения (M, F), докажем, что $\mathfrak{M}_b$ — связность Эресмана для слоения $(N(U), F_b|_{N(U)})$. Применяя Теорему 1.3 к риманову слоению без голономии $(N(U), F_b|_{N(U)})$ со связностью Эресмана, мы видим, что оно образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией $s : N(U) \to V$. Из этого следует, что исходное слоение (M, F_b) образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией $\pi_b : M \to W$ на некоторое q_b-мерное многообразие W.

(iv). Учитывая доказанное выше, утверждение (iv) доказывается аналогично Теореме 4.9 в [8]. Доказательство завершено.

3.2. Доказательство Теоремы 1.1

Пусть (M, F) — риманово слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Рассмотрим слоеное расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$ над (M, F) с поднятым слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Нетрудно проверить, что индуцированное распределение $\mathfrak{N} := \pi^*\mathfrak{M}$ — связность Эресмана для слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Таким образом, поднятое слоение является трансверсально параллелизуемым слоением со связностью Эресмана, поэтому все утверждения Теоремы 1.1 вытекают из доказанной выше Теоремы 3.1. Доказательство завершено.

3.3. Доказательство Теоремы 1.2

Пусть (M, F) — риманово слоение, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$. Для того чтобы применить результаты из [10], будем рассматривать (M, F) как картаново слоение типа (G, H), где, как и выше, $H = O(q)$, $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$.

Согласно Теореме 1.1, замыкания $\overline{\mathcal{L}}_\alpha$ слоев $\mathcal{L}_\alpha$ поднятого слоения образуют локально тривиальное расслоение $\pi : \mathcal{R} \to W$ над некоторым базовым многообразием W. По аналогии с Теоремой 2 из [10] M докажем, что определено гладкое слоение с особенностями $(M, \mathcal{O})$, образованное образами $\pi(\overline{\mathcal{L}})$ замыканий слоев $\mathcal{L}$ поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Продолжая терминологию из [10], будем называть это слоение ореольным. Так же, как в [10], докажем, что любой его слой $\mathcal{O}(L)$— F-насыщенное множество, причем каждый слой L_α слоения (M, F), принадлежащий $\mathcal{O}(L)$, всюду плотен в $\mathcal{O}(L)$. Кроме того, пространство слоев $M/\mathcal{O}$ гомеоморфно пространству орбит W/H индуцированного действия группы $H = O(q)$ на базовом многообразии W, поэтому можно отождествить $M/\mathcal{O}$ с W/H. Отсюда вытекает, что пространство слоев $M/\mathcal{O}$, как и пространство орбит компактной группы

Ли W/H, является хаусдорфовым. Следовательно, каждый ореол замкнут в M и является минимальным множеством слоения (M, F).

Таким образом, для риманова слоения со связностью Эресмана выполняется равенство $\mathcal{O}(L) = \overline{L}$.

Из теории компактных групп преобразований известно, что в пространстве орбит W/H существует открытое всюду плотное связное подмножество V_0, являющееся гладким многообразием. Пусть $f : M \to M/\mathcal{O}$ — проекция на пространство слоев. Тогда $M_0 := f^{-1}(V_0)$ — связное открытое всюду плотное $\overline{F}$-насыщенное подмножество в M. Поскольку сужение $(M_0, \overline{F}_{M_0})$ — риманово слоение, все группы голономии которого тривиальны, а каждый слой является минимальным множеством слоения со связностью Эресмана, то те же аргументы, что и при доказательстве Теоремы 3.1, позволяют утверждать, что слоение $(M_0, \overline{F}_{M_0})$ образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией $f|_{M_0} : M_0 \to M_0/\mathcal{O} = V_0$. Доказательство завершено.

3.4. Доказательство Теоремы 1.4

Пусть (M, F) — риманово слоение, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$.

Предположим, что структурная алгебра этого слоения равна нулю: $\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$. Тогда из Теоремы 1.1 вытекает, что все слои поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ замкнуты.

Таким образом, (1) $\Rightarrow$ (2).

Из Теоремы 1.2 следует эквивалентность условий (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Как известно, любое гладкое слоение имеет слои с тривиальной группой голономии, поэтому (4) $\Rightarrow$ (5).

Предположим теперь, что выполняется (5), т. е. существует собственный слой с конечной группой голономии. Тогда согласно теореме о глобальной устойчивости, доказанной нами в [6] (Теорема 2), все слои этого слоения замкнуты и имеют конечную группу голономии, а пространство слоев слоения M/F естественным образом наделяется структурой гладкого q-мерного орбифолда. Заметим, что проекция на пространство слоев становится субмерсией орбифолдов. Это означает, что (5) $\Rightarrow$ (6).

Пусть выполняется (6), т. е. пространство слоев слоения M/F — гладкий орбифолд. Из хаусдорфовости орбифолда вытекает, что все слои слоения (M, F) замкнуты и, следовательно, собственные. Пусть L — слой с тривиальной группой голономии. Тогда любой слой $\mathcal{L}$ поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, лежащий над L, также собственный. Таким образом, риманово слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, допускающее связность Эресмана, имеет собственный слой с тривиальной группой голономии. Как отмечено выше, согласно теореме о глобальной устойчивости ([6], Теорема 2), все слои этого слоения замкнуты, следовательно, структурная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M, F)$ слоения (M, F) равна нулю. Таким образом, (6) $\Rightarrow$ (1). $\square$

4. Примеры

П р и м е р 4.1 *Пусть $M = \mathbb{E}^1 \times (\mathbb{E}^3 \setminus \{0\})$, тогда M — четырехмерное односвязное многообразие, представляющее собой риманово произведение евклидовой прямой $\mathbb{E}^1$ и открытого подмногообразия $\mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$ евклидова пространства $\mathbb{E}^3$. Подчеркнем, что M – неполное локальное евклидово многообразие. При этом $F = \{\mathbb{E}^1 \times \{z\} \,|\, z \in \mathbb{E}^3 \setminus \{0\}\}$ — риманово слоение, не являющееся трансверсально полным. Однако распределение $\mathfrak{M}$, касательное к ортогональному слоению $F^\perp$ коразмерности один, является интегрируемой связностью Эресмана для слоения (M, F).*

Этот пример показывает, что существование связности Эресмана для риманова слоения является более слабым условием, чем его полнота.

П р и м е р 4.2 *Определим действие группы целых чисел $\mathbb{Z}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ следующим образом:*

$$\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(n,(x,y)) = (x+n, \frac{1}{3^n}y),\ n \in \mathbb{Z}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку группа $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{R}^2$ свободно и собственно разрывно, то определено фактор-многообразие $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ с проекцией $k : \mathbb{R}^2 \to M$. На M индуцированы два слоения $F := \{k(\mathbb{R}^1 \times \{y\}) \,|\, y \in \mathbb{R}^1\}$ и $F^{\perp} := \{k(\{x\} \times \mathbb{R}^1) \,|\, x \in \mathbb{R}^1\}$, причем касательное распределение $\mathfrak{M} = TF^{\perp}$ — интегрируемая связность Эресмана для слоения (M,F). Подчеркнем, что единственный компактный слой этого слоения, диффеоморфный окружности, не локально устойчив в смысле Риба и Эресмана.

Заметим, что слоение (M,F) — трансверсально подобное, поэтому оно является слоением с трансверсальной линейной связностью. Это слоение собственное и имеет нулевую структурную алгебру Ли [10], *однако не все его слои являются замкнутыми, поэтому теорема, аналогичная Теореме 1.4, для него не выполняется, как и Теорема 1.3*

Этот пример показывает, в частности, что для слоений с трансверсальной линейной связностью пространство слоев собственного слоения не является орбифолдом, и не все слои локально устойчивы.

П р и м е р 4.3 *Этот пример использует конструкцию надстройки, подробное изложение которой можно найти, например, в* [9].

Пусть B_k — гладкое замкнутое трехмерное многообразие, гомеоморфное связной сумме $\sharp_{i=1}^{k}\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ k экземпляров произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Тогда $\pi_1(B_k, b) =< g_1, \ldots, g_k >$ — свободная группа ранга k. Через $Conf(\mathbb{S}^q)$ будем обозначать группу Ли всех конформных преобразований q-мерной сферы $\mathbb{S}^q$.

Пусть задано конечное множество непересекающихся замкнутых шаров $\mathcal{B}_1^+, \ldots, \mathcal{B}_k^+$, $\mathcal{B}_1^-, \ldots, \mathcal{B}_k^-$ в сфере $\mathbb{S}^q$ и такое конформное преобразование $\psi_i \in Conf(\mathbb{S}^q)$, что $\psi_i(int(\mathcal{B}_i^+)) = ext(\mathcal{B}_i^-)$. Предполагается, что для любых $\mathcal{B}_i^+$ и $\mathcal{B}_i^-$ существует диффеоморфизм сферы $\mathbb{S}^q$, переводящий эти шары в круглые шары. Группа Ψ с образующими $\psi_1, \ldots, \psi_k$ называется группой Шоттки. Как известно, группа Шоттки Ψ является свободной группой ранга k, т. е. $\Psi =< \psi_1, \ldots, \psi_k >$, и имеет минимальное множество $\Lambda(\Psi)$, гомеоморфное канторову подмножеству отрезка $[0,1]$. Следовательно, топологическая размерность $\Lambda(\Psi)$ равна нулю.

Определим изоморфизм групп $\rho_k : \pi_1(B_k, b) \to \Psi$, полагая $\rho_k(g_i) = \psi_i$, $i = \overline{1,k}$. Надстроечное слоение $(M_k, F_k) = Sus(\mathbb{S}^q, B_k, \rho_k)$, полученное надстройкой гомоморфизма

$$\rho_k : \pi_1(B_k, b) \to Conf(\mathbb{S}^q),$$

является полным конформным слоением и имеет глобальный аттрактор, представляющий собой исключительное минимальное множество [9].

Дискретность группы Шотки Ψ в группе Ли $Conf(\mathbb{S}^q)$ влечет равенство нулю структурной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0(M,F)$.

Этот пример показывает, в частности, что для конформных слоений, допускающих связность Эресмана с нулевой структурной алгеброй Ли, пространство слоев не хаусдорфово, и не существует аналогов Теорем 1.3 и 1.4.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041).

Н. И. Жукова. Структура римановых слоений со связностью Эресмана

Список литературы

1. R. Hermann, "The differential geometry of foliations", *Ann. of Math.*, **72**:3 (1960), 445–457.

2. B. Reinhart, "Foliated manifolds with bundle-like metrics", *Ann. of Math.*, **69**:3 (1959), 119–132.

3. A. Haefliger, "Pseudogroups of local isometries", *Res. Notes in Math.*, **131** (1985), 174–197.

4. P. Molino, *Riemannian foliations. Progress in Math. Vol. 73*, Boston; Basel, Birkhauser Boston, 1988, 339 p.

5. N. Zhukova, "On the stability of leaves of Riemannian foliations", *Ann. Global Anal. and Geom.*, **5**:3 (1987), 261–271.

6. N. I. Zhukova, "Local and global stability of leaves os conformal foliations", *Foliations 2012. Proceedings of the International Conference. Singapur, Word Scientific Press*, 2013, 215–233.

7. E. Salem, "Riemannian foliations and pseudogroups of isometries", *Application D in* [4], 265–296.

8. I. Moerdijk, J. Mrcun, *Introduction to foliations and Lie groupoids. Cambridge studies in advanced mathematics. Vol. 91*, New York, Cambridge University Press, 2003, 173 p.

9. N. I. Zhukova, "Global attractors of complete conformal foliations", *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–405.

10. N. I. Zhukova, "Minimal sets of Cartan foliations", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 105–135.

11. I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction. Translations of Math. Monographs. Vol. 87*, Providence, Rhode Island, AMS, 1992, 317 p.

12. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda, "Ehresmann connections for foliations", *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.

Поступила 14.09.2018

MSC2010 53C12, 57R30

Riemannian foliations with Ehresmann connection

© N. I. Zhukova[1]

Abstract. It is shown that the structural theory of Molino for Riemannian foliations on compact manifolds and complete Riemannian manifolds may be generalized to a Riemannian foliations with Ehresmann connection. Within this generalization there are no restrictions on the codimension of the foliation and on the dimension of the foliated manifold. For a Riemannian foliation (M, F) with Ehresmann connection it is proved that the closure of any leaf forms a minimal set, the family of all such closures forms a singular Riemannian foliation $(M, \overline{F})$. It is shown that in M there exists a connected open dense $\overline{F}$-saturated subset M_0 such that the induced foliation $(M_0, \overline{F}|_{M_0})$ is formed by fibers of a locally trivial bundle over some smooth Hausdorff manifold. The equivalence of some properties of Riemannian foliations (M, F) with Ehresmann connection is proved. In particular, it is shown that the structural Lie algebra of (M, F) is equal to zero if and only if the leaf space of (M, F) is naturally endowed with a smooth orbifold structure. Constructed examples show that for foliations with transversally linear connection and for conformal foliations the similar statements are not true in general.

Key Words: Riemannian foliation, Ehresmann connection, local stability of a leaf, minimal set

References

1. R. Hermann, "The differential geometry of foliations", *Ann. of Math.*, **72**:3 (1960), 445–457.
2. B. Reinhart, "Foliated manifolds with bundle-like metrics", *Ann. of Math.*, **69**:3 (1959), 119–132.
3. A. Haefliger, "Pseudogroups of local isometries", *Res. Notes in Math.*, **131** (1985), 174–197.
4. P. Molino, *Riemannian foliations. Progress in Math. Vol. 73*, Boston; Basel, Birkhauser Boston, 1988, 339 p.
5. N. Zhukova, "On the stability of leaves of Riemannian foliations", *Ann. Global Anal. and Geom.*, **5**:3 (1987), 261–271.
6. N. I. Zhukova, "Local and global stability of leaves os conformal foliations", *Foliations 2012. Proceedings of the International Conference. Singapur, Word Scientific Press*, 2013, 215–233.
7. E. Salem, "Riemannian foliations and pseudogroups of isometries", *Application D in* [4], 265–296.
8. I. Moerdijk, J. Mrcun, *Introduction to foliations and Lie groupoids. Cambridge studies in advanced mathematics. Vol. 91*, New York, Cambridge University Press, 2003, 173 p.
9. N. I. Zhukova, "Global attractors of complete conformal foliations", *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–405.

[1]**Nina I. Zhukova**, Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12, Bolshaya Pecherskaya St., Nizhni Novgorod 603155, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4553-559X, nzhukova@hse.ru

10. N. I. Zhukova, “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 105–135.

11. I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction. Translations of Math. Monographs. Vol. 87*, Providence, Rhode Island, AMS, 1992, 317 p.

12. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.

Submitted 14.09.2018