DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.384-394

УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида

© М. В. Донцова[1]

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида. Исследование разрешимости этой задачи в исходных координатах основано на методе дополнительного аргумента. Доказано существование локального решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида опирается на глобальные оценки.
Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка

1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции; $a_1(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ c_1(t),\ g_1(t)$ – известные функции; $a_2,\ g_2$ – известные константы.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{1.2}$$

Задача (1.1)–(1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

В статье [1] определены достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1), где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции,

$$a_1(t) = a_1,\ b_1(t) = b_1,\ b_2(t) = b_2,\ c_1(t) = c_1,\ g_1(t) = g_1;$$

$a_1,\ b_i,\ c_1,\ g_1,\ i = 1,2$ – известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ – известные константы, $(t,x) \in \Omega_T$ с начальными условиями (1.2).

[1]**Донцова Марина Владимировна**, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

В данной работе определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши и достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1.1)–(1.2) с помощью метода дополнительного аргумента.

2. Существование локального решения

С помощью метода дополнительно аргумента и преобразований получена следующая система интегральных уравнений [1–12]:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau, \tag{2.1}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau, \tag{2.2}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s (a_2w_1 + b_2(\tau)w_3)d\tau, \tag{2.3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s g_2w_2d\tau, \tag{2.4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1), \tag{2.5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{2.6}$$

Подставим (2.1)–(2.2) в (2.3)–(2.6), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau) + \int_0^s (a_2w_1(\tau,t,x) + b_2(\tau)w_3(\tau,t,x))d\tau, \tag{2.7}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_2(\tau,t,x))d\tau) + \int_0^s g_2w_2(\tau,t,x)d\tau, \tag{2.8}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau), \tag{2.9}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau). \tag{2.10}$$

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \le s \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\},$$

$$l = \max\{\sup_{[0,T]} a_1(t),\ \sup_{[0,T]} b_1(t),\ \sup_{[0,T]} b_2(t),\ \sup_{[0,T]} c_1(t),\ \sup_{[0,T]} g_1(t),\ |a_2|,\ |g_2|\},$$

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|,\ \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t,x)|,$$

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T; $\bar{C}^2(R)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на R; $C([0,T])$ – пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$.

Введем условия

$$\begin{aligned} a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T], \\ \varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \leq 0, \quad\ x \in R. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), имеющего такую же гладкость по x, как и начальные функции.

Теорема 2.1 *Пусть*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$$

и выполняются условия (2.11)*. Тогда для любого* $T \leqslant \min\left(\dfrac{1}{25C_\varphi l}, \dfrac{1}{10l}\right)$ *задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$*, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10).*

Теорема следует из выполнения условий трех лемм.

Лемма 2.1 *Если функции* $w_j(s,t,x)$*,* $j = \overline{1,4}$ *удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.7)–(2.10) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции* $u(t,x) = w_1(t,t,x)$*,* $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ *будут решением задачи Коши (1.1)–(1.2) на* Ω_{T_0}*,* $T_0 \leq T$*, где* T_0 *– константа, определяемая через исходные данные.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [2–8].

Лемма 2.2 *При выполнении условий*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$

$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T]$$

и

$$T \leqslant \min\left(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l}\right) \tag{2.12}$$

система интегральных уравнений (2.7)–(2.10) имеет единственное решение

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T).$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10) зададим равенствами $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.7)–(2.10) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$

$$w_{1n}(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau) + \int_0^s (a_2 w_{1n} + b_2(\tau)w_{3n})d\tau, \tag{2.13}$$

$$w_{2n}(s,t,x)=\varphi_2(x-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4n}(\tau,t,x)+g_1(\tau)w_{2n}(\tau,t,x))d\tau)+\int\limits_0^s g_2w_{2n}(\tau,t,x)d\tau, \quad (2.14)$$

$$w_{3n}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1n}+b_1(\tau)w_{3n})d\tau), \quad (2.15)$$

$$w_{4n}(s,t,x)=w_{1(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4n}+g_1(\tau)w_{2n})d\tau). \quad (2.16)$$

Докажем существование решения с помощью метода последовательных приближений для каждого фиксированного n. Нулевое приближение (при фиксированном n) определим равенствами: $w_{jn}^0=w_{j(n-1)},\ j=\overline{1,4}$. Для системы уравнений (2.13)–(2.16) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1}(s,t,x)=\varphi_1(x-\int\limits_0^t(a_1(\tau)w_{1n}^k+b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau)+\int\limits_0^s(a_2w_{1n}^k+b_2(\tau)w_{3n}^k)d\tau, \quad (2.17)$$

$$w_{2n}^{k+1}(s,t,x)=\varphi_2(x-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4n}^k(\tau,t,x)+g_1(\tau)w_{2n}^k(\tau,t,x))d\tau)+\int\limits_0^s g_2w_{2n}^k(\tau,t,x)d\tau, \quad (2.18)$$

$$w_{3n}^{k+1}(s,t,x)=w_{2(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1n}^k+b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau), \quad (2.19)$$

$$w_{4n}^{k+1}(s,t,x)=w_{1(n-1)}(s,s,x-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4n}^k+g_1(\tau)w_{2n}^k)d\tau). \quad (2.20)$$

Так же, как в [2], устанавливается, что при выполнении условия

$$T\leqslant\min\left(\frac{1}{20C_\varphi l},\frac{1}{4l}\right) \quad (2.21)$$

последовательные приближения (2.17)–(2.20) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.13)–(2.16), для которого выполняется $\|w_{jn}\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.21) справедливы оценки

$$||w_{1nx}^{k+1}||\le 4C_\varphi, ||w_{2nx}^{k+1}||\le 4C_\varphi,\ ||w_{3nx}^{k+1}||\le 6C_\varphi,\ ||w_{4nx}^{k+1}||\le 6C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.21) последовательные приближения $w_{jnx}^k,\ j=\overline{1,4}$, сходятся при $k\to\infty$, а значит, существуют производные $w_{jnx},\ j=\overline{1,4}$ и справедливы оценки

$$\|\partial_xw_{1n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_xw_{2n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_xw_{3n}\|\le 6C_\varphi,\ \|\partial_xw_{4n}\|\le 6C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.21) последовательные приближения, определяемые из системы (2.13)–(2.16), сходятся к непрерывному решению системы (2.7)–(2.10), для которого справедливы оценки $\|w_j\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.12) $w_{jnx}\to w_{jx}=\partial_xw_j,\ j=\overline{1,4}$, где функции ∂_xw_j являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_T. Справедливы оценки

$$\|\partial_xw_i\|\le 4C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\partial_xw_3\|\le 6C_\varphi,\ \|\partial_xw_4\|\le 6C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j=\overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

Л е м м а 2.3 *Пусть* $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\quad a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T])$, *тогда при выполнении условий (2.11), (2.12) функции* $w_j,\ j=\overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений (2.7)–(2.10), имеют непрерывные и ограниченные производные* $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial t},\ j=\overline{1,4}$ *на* Γ_T, *где* $T\leqslant\min\left(\dfrac{1}{25C_\varphi l},\dfrac{1}{10l}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.13)–(2.16) по x. Обозначим $\omega_j^n=w_{jnxx},\ j=\overline{1,4}$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\omega_1^n=-\varphi_1'\int\limits_0^t(a_1(\tau)\omega_1^n+b_1(\tau)\omega_3^n)d\tau+\int\limits_0^s(a_2\omega_1^n+b_2(\tau)\omega_3^n)d\tau+\\ +\varphi_1''\cdot(1-\int\limits_0^t(a_1(\tau)w_{1nx}+b_1(\tau)w_{3nx})d\tau)^2,\end{gathered}\tag{2.22}$$

$$\begin{gathered}\omega_2^n=-\varphi_2'\int\limits_0^t(c_1(\tau)\omega_4^n+g_1(\tau)\omega_2^n)d\tau+\int\limits_0^s g_2\omega_2^n d\tau+\\ +\varphi_2''\cdot(1-\int\limits_0^t(c_1(\tau)w_{4nx}+g_1(\tau)w_{2nx})d\tau)^2,\end{gathered}\tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}\omega_3^n=\omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1nx}+b_1(\tau)w_{3nx})d\tau)^2-\\ -w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t(a_1(\tau)\omega_1^n+b_1(\tau)\omega_3^n)d\tau,\end{gathered}\tag{2.24}$$

$$\begin{gathered}\omega_4^n=\omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4nx}+g_1(\tau)w_{2nx})d\tau)^2-\\ -w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t(c_1(\tau)\omega_4^n+g_1(\tau)\omega_2^n)d\tau.\end{gathered}\tag{2.25}$$

При выполнении условия (2.12) с учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\|\le 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$ получим $|\int\limits_s^t(a_1(\tau)w_{1n}+b_1(\tau)w_{3n})d\tau|\le tl(||w_{1n}||+||w_{3n}||)\le 4tlC_\varphi\le\dfrac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi}\le 0.16$, $|\int\limits_s^t(c_1(\tau)w_{4n}+g_1(\tau)w_{2n})d\tau|\le tl(||w_{4n}||+||w_{2n}||)\le 4tlC_\varphi\le\dfrac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi}\le 0.16$.

Зафиксируем точку $x_0\in R^1$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0}=\{x\,|x_0-0.16\le x\le x_0+0.16\}.$$

Возьмем $x_1,x_2\in\Omega_{x_0}$.

При выполнении условий (2.11)–(2.12) установлено, что справедливы неравенства: $|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|$, $|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|$, где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}(\tau,t,x) + b_1(\tau)w_{3n}(\tau,t,x))d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau,t,x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau,t,x))d\tau.$$

Установлена равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x в выбранной, произвольной точке x_0, т. е. на R. Равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x используется для доказательства сходимости последовательных приближений $\omega_j^n,\ j = \overline{1,4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'(\eta_1(0,t,x)) \int_0^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau + \int_0^s (a_2\tilde{\omega}_1^n + b_2(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau +$$

$$+\varphi_1'' \cdot (1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'(\eta_2(0,t,x)) \int_0^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau + \int_0^s g_2\tilde{\omega}_2^n d\tau +$$

$$+\varphi_2'' \cdot (1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2 - w_{2x}(s,s,\eta_1(s,t,x)) \int_s^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau,$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2 - w_{1x}(s,s,\eta_2(s,t,x)) \int_s^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau.$$

Докажем, что при выполнении условий (2.11)–(2.12) $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1,4}$ справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\| \le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3\| \le 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\| \le 3C_\varphi.$$

Далее докажем, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1,4}$ при $n \to \infty$.

Получим, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2},\ j = \overline{1,4}$ непрерывны и ограничены на Γ_T при выполнении условий (2.11)–(2.12).

Аналогично установим, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t},\ j = \overline{1,4}$ на Γ_T при выполнении условий (2.11)–(2.12).

3. Существование нелокального решения

Т е о р е м а 3.1 *Пусть*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T])$$

и выполняются условия (2.11). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем систему уравнений (1.1) по x. Обозначим $p(t,x) = \partial_x u(t,x), q(t,x) = \partial_x v(t,x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x p = -a_1(t)p^2 - b_1(t)pq + a_2 p + b_2(t)q, \\ \partial_t q + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x q = -g_1(t)q^2 - c_1(t)pq + g_2 q. \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Добавим к системе уравнений (2.1)–(2.6) два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a_1(s)\gamma_1^2 - b_1(s)\gamma_1\gamma_2(s,s,\eta_1) + a_2\gamma_1 + b_2(s)\gamma_2(s,s,\eta_1), \\ \dfrac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g_1(s)\gamma_2^2 - c_1(s)\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2). \tag{3.3}$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-a_1(\tau)\gamma_1^2 + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1) + a_2\gamma_1]d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g_1(\tau)\gamma_2^2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2]d\tau. \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогично тому, как это выполнено в [1; 5–7] доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так же, как в статье [1], установлено, что справедливы оценки

$$\|v\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \ \|u\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl\exp(|g_2|T)). \tag{3.5}$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a_1(\tau)\gamma_1 + b_1(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1) - a_2)d\tau) + \\ + \int\limits_0^s b_2(\tau)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a_1(\tau)\gamma_1 + b_1(\tau)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) - a_2)d\nu)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (g_1(\tau)\gamma_2 + c_1(\tau)\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2) - g_2)d\tau). \end{cases} \tag{3.6}$$

Из (3.6) при выполнении условий

$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T],\ \varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \leq 0, \quad x \in R$$

получим, что $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$, на Γ_T, значит,

$$\|\gamma_2\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|\gamma_1\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)),$$

следовательно,

$$\|\partial_x v\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|\partial_x u\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)). \tag{3.7}$$

Далее, так же, как в [5–7], выведем, что при всех t и x справедливы оценки

$$\left|\partial^2_{x^2} u\right| \leq E_{11}\ ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{3.8}$$

$$\left|\partial^2_{x^2} v\right| \leq E_{21}\ ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{11}\sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{3.9}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{21}$ – постоянные, определяемые через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для $u,\ v,\ \partial_x u,\ \partial_x v,\ \partial^2_{x^2} u,\ \partial^2_{x^2} v$ ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Взяв в качестве начальных значений $u(T_0, x),\ v(T_0, x)$, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, выбирая начальные значения $u(T_1, x),\ v(T_1, x)$, – на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, поскольку определяется величинами $\|\partial_x u\|$, $\|\partial_x v\|$, которые в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значениями $C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T))$, $C_\varphi \exp(|g_2|T)$ на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения $u(T_k, x), v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R)$,

$$|u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)),\ |v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T).$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)),\ |\partial_x v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T).$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8)–(3.9), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а

Список литературы

1. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида”, *Уфимский математический журнал*, **6**:4 (2014), 71–82.

2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. Спец. выпуск*, **1** (2006), 60–64.

4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.

5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико—математические науки*, **177**:3 (2013), 190–201.

6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 115–124.

7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2014), 116–130.

8. М. В. Донцова, “Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, **3** (2014), 21–36.

9. Т. А. Шемякина, “Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 127–131.

10. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

11. Т. А. Шемякина, “Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, **146**:2 (2012), 190–201.

12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

Поступила 18.09.2018

MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides

© **M. V. Dontsova**[1]

Abstract. The Cauchy problem for a system of first-order quasilinear equations with special right-hand sides is considered. The study of solvability of this system in the original coordinates is based on the method of additional argument. It is proved that the local solution of such system exists and that its smoothness is not lower than the smoothness of the initial conditions. For system of two equations non-local solutions are considered that are continued by finite number of steps from the local solution. Sufficient conditions for the existence of such non-local solution are derived. The proof of the non-local resolvability of the system relies on original global estimates.
Key Words: method of additional argument, global estimates, global estimates, Cauchy problem, first-order partial differential equations

References

1. M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides", *Ufa Mathematical Journal*, **6**:4 (2014), 68–80 (In Russ.).
2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations", *Doklady RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, "Method of an additional argument", *Vestnik KazNU. Series: Mathematics, mechanics, informatics. Spec. issue*, **1** (2006), 60—64 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The investigation of a so lvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite", *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 34–41 (In Russ.).
5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations", *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **177**:3 (2013), 190–201 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).
7. M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, **4** (2014), 116–130 (In Russ.).

[1]**Marina V. Dontsova**, Assistant, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod, 603950,Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

8. M. V. Dontsova, "The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, **3** (2014), 21–36 (In Russ.).

9. T. A. Shemyakina, "Conditions for the existence and diferentiability of solutions of Frankl in the hyperbolic case", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:2 (2011), 127–131 (In Russ.).

10. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, "Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument", *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

11. T. A. Shemyakina, "The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type", *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **146**:2 (2012), 130–140 (In Russ.).

12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, "Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument", *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

Submitted 18.09.2018