DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.378-383

УДК 517.9

О вложении инвариантных многообразий простейших потоков Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями

© **Е. Я. Гуревич**[1], **Д. А. Павлова**[2]

Аннотация. В работе изучается структура разбиения четырехмерного фазового пространства на траектории потоков Морса-Смейла, допускающих гетероклинические пересечения. А именно, рассматривается класс $G(S^4)$ потоков Морса-Смейла на сфере S^4 таких, что неблуждающее множество любого потока $f \in G(S^4)$ состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника, стока и двух седел. Блуждающее множество таких потоков содержит конечное число гетероклинических кривых, лежащих в пересечении инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. В работе описывается топология вложения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия таких потоков, что является первым шагом в решении проблемы топологической классификации. В частности, доказывается, что замыкания инвариантных многообразий седловых состояний равновесия, не участвующих в гетероклинических пересечениях, являются ручными 2-сферой и дугой. Эти многообразия являются аттрактором и репеллером потока. В множестве орбит, принадлежащих области притяжения аттрактора (отталкивания репеллера) строится секущая, являющаяся многообразием, гомеоморфным прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Изучается топология пересечения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия с этой секущей.

Ключевые слова: топологическая эквивалентность, потоки Морса-Смейла, гетероклинические кривые

1. Введение и формулировка результатов

Гладкий поток $f^t : M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется *потоком Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество Ω_{f^t} потока f^t состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий;
- инвариантные многообразия состояний равновесия и замкнутых траекторий пересекаются трансверсально[3].

Пусть $G(S^4)$ — класс потоков Морса-Смейла на сфере S^4 таких, что неблуждающее множество любого потока $f \in G(S^4)$ состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника α, стока ω и двух седел σ_i, σ_j индексов Морса $i, j \in \{1, 2, 3\}$ соответственно.

[1]**Гуревич Елена Яковлевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[2]**Павлова Дарья Александровна**, студентка НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8634-4143, dapavlova_1@mail.ru

[3]Напомним, что гладкие подмногообразия L, N многообразия M^n пересекаются *трансверально*, если либо $L \cap N = \emptyset$, либо в каждой точке пересечения $x \in L \cap N$ касательные пространства к L, N порождают касательное пространство к M^n.

Из формулы Пуанкаре-Хопфа следует, что $(-1)^i + (-1)^j = 0$, поэтому индекс Морса одного из седел равен 2, а второго — 1 или 3. Если $g^t \in G(S^4)$ – поток, для которого индексы Морса седел равны $2, 3$, то для него найдется поток $f^t \in G(S^4)$, имеющий седла индексов Морса 1 и 2 и такой, что $f^t = g^{-t}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что для произвольного потока $f^t \in G(S^4)$ индексы Морса седловых состояний равновесия равны 1 и 2.

Из трансверсальности пересечения инвариантных многообразий следует, что пересечение $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_2}$ пусто. Из работ [1–2] следует, что пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ непусто и состоит из конечного числа кривых, которые будем называть *гетероклиническими*.

Из теоремы С. Смейла (см. [3], Theorem 2.3) следует, что замыкание $cl\ W^u_{\sigma_1}$ ($cl\ W^s_{\sigma_2}$) многообразия $W^u_{\sigma_1}$ ($W^s_{\sigma_2}$) содержит, кроме самого многообразия $W^u_{\sigma_1}$ ($W^s_{\sigma_2}$), единственную точку ω (α). Таким образом, множество $A_{f^t} = cl\ W^u_{\sigma_1}$ ($R_{f^t} = cl\ W^s_{\sigma_2}$) является сферой размерности 1 (2), вложенной в S^4 гладко во всех точках, кроме точки ω (α). Мы доказываем следующие факты.

Теорема 1.1 *Сферы A_{f^t}, R_{f^t} являются локально плоскими в каждой точке*[4].

Результат предложения 1.1 контрастирует с теоремой 6 работы [4], где утверждается, что существуют многообразия размерности 4 и выше, допускающие градиентно-подобные потоки с неблуждающим множеством, состоящим в точности из четырех состояний равновесия: двух узлов и двух седел, такие, что замыкание инвариантного многообразия седловой точки коразмерности 2 является дико вложенной сферой.

Положим $V_{f^t} = S^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$.

Теорема 1.2 *Существует гиперповерхность без контакта $\Sigma_{f^t} \subset V_{f^t}$ такая, что:*

1. *Σ_{f^t} гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;*
2. *множество V_{f^t} гомеоморфно прямому произведению $\Sigma_{f^t} \times \mathbb{R}$;*
3. *ограничение потока f^t на множество V_{f^t} топологически эквивалентно потоку $f^t_0(s, r) = (s, r + t)$, где $s \in \Sigma_{f^t}, r \in \mathbb{R}$;*
4. *множество $W^s_{\sigma_i} \cap \Sigma_{f^t}$ является гладкой сферой $S^2_{f^t}$, не ограничивающей шар в Σ_{f^t}, множество $W^u_{\sigma_j} \cap \Sigma_{f^t}$ является гладкой замкнутой дугой $S^1_{f^t}$, индекс пересечения которой со сферой $S^2_{f^t}$ равен 1.*

2. Разложение сферы S^4 на ручки, индуцированное потоком $f^t \in G(S^4)$, и топология вложения его инвариантных мнгообразий

Напомним, что многообразие M размерности n получено из многообразия N с краем ∂N *приклеиванием k-ручки $H_k = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$*, если существует вложение $\varphi : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-1} \to \partial N$ такое, что M получено из дизъюнктного объединения $N \cup H_k$ отождествлением точек $x \in \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-1}$ и $\varphi(x)$.

Пусть $K \subset S^3$ — гладко вложенная простая замкнутая дуга (узел), $N(K)$ — ее трубчатая окрестность, $N = \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^2$ и $\psi : \partial\, N(K) \to \partial N$ — диффеоморфизм. Тогда говорят, что

[4]Замкнутое многообразие $X \subset M^n$ размерности m называется локально плоским в M^n в точке $x \in X$, если существует окрестность $U_x \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $h : U_x \to \mathbb{R}^n$ такой, что $h(X \cap \mathbb{R}^n$ является координатной гиперплоскостью $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$)

многообразие M^3, полученное из объединения $S^3 \setminus int\, N(K)$ и N отождествлением точек $x \in \partial\, N(K)$ и $\psi(x) \in N$, получено *хирургической операцией Дэна вдоль узла* K.

Напомним, что дважды дифференцируемая функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, то есть для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса, в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$. Число $k \in \{0, \dots, n\}$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки* p. Будем обозначать индекс критической точки через $ind(p)$. Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X = -grad\, \varphi$, называется *градиентным потоком*.

Из работы [5] вытекает следующее утверждение:

Предложение 2.1 *Для потока $f^t \in G(S^4)$ существует самоиндексирующаяся энергетическая функция — такая функция $\varphi : S^4 \to [0, 4]$, что:*

1. *функция φ является функцией Морса;*
2. *множество критических точек функции φ совпадает с неблуждающим множеством $\Omega(f^t)$ потока f^t;*
3. *$\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;*
4. *$\varphi(p) = ind(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.*

Непосредственно из определения функции φ следует, что для любой точки $p \in \Omega(f^t)$ число $ind(p)$ также совпадает с индексом Морса точки p, равным размерности ее неустойчивого многообразия.

Доказательство теоремы 1.1. В силу [3] (Theorem 2.3) для любого состояния равновесия p потока Морса-Смейла его устойчивое (неустойчивое) многообразие является гладким подмногообразием. Поэтому дуга $A_{f^t} = cl\ W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$ и сфера $R_{f^t} = cl\ W^s_{\sigma_2} = W^s_{\sigma_2} \cup \alpha$ являются гладко вложенными и, следовательно, локально-плоскими во всех точках, кроме точек ω, α. Из работы [6] следует, что замкнутая дуга в S^4 либо является локально плоской во всех своих точках, либо имеет более чем счетное множество точек, в которых нарушается условие локальной плоскостности. Из этого следует, что замкнутая дуга A_{f^t} является локально плоской и в точке ω.

Покажем, что двумерная сфера R_{f^t} является локально-плоской в точке α.

Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$. Положим $M_0 = \varphi^{-1}[0; 1 - \varepsilon]; M_1 = \varphi^{-1}[0; 1 + \varepsilon]; M_2 = \varphi^{-1}[0; 2 + \varepsilon]$, $M_4 = S^4$, $\Sigma_i = \partial M_i$. Из теории Морса (см., например, [7], теоремы 3.1, 3.2) следует, что многообразие M_0 является замкнутым шаром, многообразие M_k при $k \in \{1, 2\}$ получается приклеиванием k-ручки к M_{k-1}, многообразие M_4 получается приклеиванием 4-ручки к M_2.

Из этого следует, что многообразия Σ_0, Σ_2 являются 3-сферами, а Σ_1 диффеоморфно $S^2 \times S^1$. Из теоремы 3.2 из [7], примененной к функции φ^{-1}, следует, что многообразие $M_4 \setminus int\ M_1$ получено из $M_4 \setminus int\ M_2$ приклеиванием 2-ручки и многообразие $\Sigma_1 = \partial M_1 = \partial M_4 \setminus int\ M_1$ получено из сферы $\Sigma_2 = \partial M_4 \setminus int\ M_2$ при помощи хирургической операции Дэна вдоль замкнутой кривой $c = \Sigma_2 \cap W^s_{\sigma_2}$. Из [8] (теорема 3) следует, что кривая c тривиально вложена в S^3 (то есть ограничивает 2-диск).

Пусть a^t — поток в пространстве $\mathbb{R}^4$, заданный формулой $a^t(x_1,\dots,x_4) = ((\dfrac{1}{2})^t x_1,\dots,(\dfrac{1}{2})^t x_4)$, $\mathbb{S}^3_r = \{(x_1,\dots,x_4)\subset\mathbb{R}^4|\ x_1^2+\dots+x_4^2 = r^2\}$, $\mathbb{S}^1 = \{(x_1,\dots,x_4)\subset\mathbb{R}^4|\ x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$. Из [8] (теорема 1) следует, что существует гомеоморфизм $h:\Sigma_2\to\mathbb{S}^3_1$ такой, что $h(\Sigma_2\cap W^s_{\sigma_2}) = \mathbb{S}^1$. Для каждой точки $x\in\Sigma_2$ обозначим через l_x ее траекторию и для любой точки $y\in l_x$ положим $t_y = tg\dfrac{\pi(2+\varepsilon-\varphi(y)}{2}+1$, $H(y) = a^{t_y}(h(x))$. Гомеоморфизм $H: W^u_\alpha\setminus\alpha\to\mathbb{R}^4\setminus\{O\}$ переводит траектории потока $f^t|_{W^u_\alpha\setminus\alpha}$ в траектории потока $a^t|_{\{}\mathbb{R}^4\setminus\{O\}$ с сохранением ориентации на траекториях, множество $W^s_{\sigma_2}\setminus\sigma_2$ – на множество $Ox_1x_2\setminus\{O\}$ и продолжается по непрерывности на точку α. Следовательно, сфера $R_{f^t} = W^s_{\sigma_2}\cup\alpha$ вложена локально плоско в точке α.

Доказательство теоремы 1.2. Первые три утверждения леммы являются непосредственными следствиями утверждения 2.1. Действительно, если $\varphi: S^4\to[0,4]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция для потока f^t, то достаточно положить $\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(1,5)$.

Пересечение $W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t}$ является поверхностью без контакта для ограничения потока f^t на множество $W^s_{\sigma_1}\setminus\sigma_1$, поэтому $W^s_{\sigma_1}\setminus\sigma_1$ диффеоморфно прямому произведению $(W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t})\times\mathbb{R}$, и $(W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t})$ — деформационный ретракт для $W^s_{\sigma_1}\setminus\sigma$. Поскольку $W^s_{\sigma_1}\setminus\sigma_1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ и, следовательно, односвязно, то $W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t}$ также односвязно. Тогда $W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t}$ гомеморфно либо плоскости $\mathbb{R}^2$, либо двумерной сфере. В первом случае множество $W^s_{\sigma_1}\setminus\sigma_1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$, что невозможно, поэтому $W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t}$ гомеомофно сфере.

Положим $S^2_{f^t} = W^s_{\sigma_1}\cap\Sigma_{f^t}$. Сфера $S^2_{f^t}$ ограничивает шар $B^3\subset W^s_{\sigma_1}$ такой, что $\sigma_1\in int\ B^3$. Следовательно, коэффициент зацепления сферы $S^2_{f^t}$ и дуги A_{f^t} равен единице. Поэтому сфера S^2 не ограничивает никакого шара в Σ_{f^t} (т. к. в этом случае коэффициент зацепления сфер S^2 и A_{f^t} был бы равен нулю).

Аналогично доказывается, что множество $W^u_{\sigma_2}\cap\Sigma_{f^t}$ является замкнутой дугой $S^1_{f^t}$, имеющей с 2-сферой R_{f^t} коэффициент зацепления, равный единице. Пусть $N\subset\Sigma_{f^t}$ — замкнутая трубчатая окрестность дуги $S^1_{f^t}$. Поток f^t индуцирует гомеоморфизм $\psi:\Sigma_{f^t}\setminus int\ N\to\Sigma_2\setminus int\ \widetilde{N}$, где $\Sigma_2 = \varphi^{-1}(2,5)$, $\widetilde{N}\subset\Sigma_2$ — некоторая замкнутая окрестность дуги $W^s_{\sigma_2}\cap\Sigma_2$. По доказанному выше $\Sigma_2\setminus int\ \widetilde{N}$ является полноторием, следовательно, $\Sigma_{f^t}\setminus\int N$ также является полноторием, и существует гомеомофизм $h:\Sigma_{f^t}\to\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ такой, что $h(S^1_{f^t}) = \{x\}\times\mathbb{S}^1$, $x\in\mathbb{S}^{n-1}$. Так как сфера $h(S^2_{f^t})$ гомологична сфере $\mathbb{S}^2\times\{s\}$, $s\in\mathbb{S}^1$, и индекс пересечения является гомологическим и топологическим инвариантом, то индекс пересечения сферы $h(S^2_{f^t})$ и дуги $\{x\}\times\mathbb{S}^1$, а также индекс пересечения сферы $S^2_{f^t}$ и дуги $S^1_{f^t}$ равен единице.

Благодарности. Авторы благодарят В.С. Медведева и В.З. Гринеса за внимание к работе и плодотворные обсуждения. Работа, за исключением доказательства теоремы 1.2 выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041), доказательство теоремы 1.2 поддержано Программой фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2018 году.

Список литературы

1. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений”, *Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН*, **297** (2017), 201–210.

2. Е.Я. Гуревич, Д.А. Павлова, “О простейших потоках Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями на сфере S^n”, *Журнал СВМО*, **19**:2 (2017), 25–30.

3. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

4. E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Morse-Smale systems with few non-wandering points”, *Topology and its Applications*, **160**:3 (2013), 498–507.

5. K.R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

6. J. C. Cantrell, C. H. Edwards, “Almost locally flat imbeddings of minifolds”, *The Michigan Mathematical Journal*, **1965**:2, 217–223.

7. Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Oxford University Press, 2001.

8. C. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *Journal American Mathematical Society*, **2 (1989)**:2, 371–415.

Поступила 13.10.2018

MSC2010 37D15

On embedding of invariant manifolds of the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections

© **E. Y. Gurevich**[1], **D. A. Pavlova**[2]

Abstract. We study a structure of four-dimensional phase space decomposition on trajectories of Morse-Smale flows admitting heteroclinical intersections. More precisely, we consider a class $G(S^4)$ of Morse-Smale flows on the sphere S^4 such that for any flow $f \in G(S^4)$ its non-wandering set consists of exactly four equilibria: source, sink and two saddles. Wandering set of such flows contains finite number of heteroclinical curves that belong to intersection of invariant manifolds of saddle equilibria. We describe a topology of embedding of saddle equilibria's invariant manifolds; that is the first step in the solution of topological classification problem. In particular, we prove that the closures of invariant manifolds of saddle equlibria that do not contain heteroclinical curves are locally flat 2-sphere and closed curve. These manifolds are attractor and repeller of the flow. In set of orbits that belong to the basin of attraction or repulsion we construct a section that is homeomoprhic to the direct product $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. We study a topology of intersection of saddle equlibria's invariant manifolds with this section.

Key Words: topological equivalence, Morse-Smale flows, heteroclinic curves

References

1. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., "On the structure of the carrier variety for Morse Smale systems without heteroclinic intersections", *Trudy matematicheskogo instituta V. A. Steklov*, **297** (2017), 201–210 (In Russ.).

2. E.Y. Gurevich, D.A. Pavlova, "On the simplest Morse-Smale flows with heteroclinic intersections on the sphere S^n", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:2 (2017), 25–30 (In Russ.).

3. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

4. E. V. Zhuzhoma, V. S Medvedev., "Morse-Smale systems with few non-wandering points", *Topology and its Applications*, **160**:3 (2013), 498–507.

5. K.R. Meyer, "Energy Functions for Morse Smale Systems", *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

6. J. C. Cantrell, C. H. Edwards, "Almost locally flat imbeddings of minifolds", *The Michigan Mathematical Journal*, **1965**:2, 217–223.

7. Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Oxford University Press, 2001.

8. C. Gordon, J. Luecke, "Knots are determined by their complements", *Journal American Mathematical Society*, **2 (1989)**:2, 371–415.

Submitted 13.10.2018

[1]**Elena Y. Gurevich**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

[2]**Daria A. Pavlova**, student, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8634-4143, dapavlova_1@mail.ru