Математика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.364-377

УДК 513.88

О непрерывном аналоге метода Зейделя

© **И. В. Бойков**[1], **А. И. Бойкова**[2]

Аннотация. Работа посвящена построению и исследованию сходимости непрерывного метода Зейделя решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. Согласно непрерывному методу Зейделя, решение системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений сводится к решению систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет привлечь богатый арсенал численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений к решению систем алгебраических уравнений. Основным достоинством непрерывного аналога метода Зейделя по сравнению с классическим методом является то обстоятельство, что, при своей реализации для решения систем линейных алгебраических уравнений, он не требует, чтобы все элементы диагональной матрицы были отличны от нуля. Аналогичным преимуществом непрерывный аналог метода Зейделя обладает и при решении систем нелинейных уравнений.

Ключевые слова: системы алгебраических уравнений, метод Зейделя, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, запаздывание

1. Введение

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Для решения систем уравнений вида (1.1) часто применяется метод Зейделя [1]–[4], который заключается в следующем.

Система уравнений (1.1) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Последовательные приближения $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ находятся из решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}, i = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots. \tag{1.3}$$

[1]**Бойков Илья Владимирович**, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6980-933X, i.v.boykov@gmail.com

[2]**Бойкова Алла Ильинична**, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

Очевидно, что для разрешимости системы (1.3) дискретным методом Зейделя необходимо, чтобы $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, n$. Это является существенным недостатком метода, поскольку при решении больших систем уравнений требуется значительное время (возможно, сопоставимое со временем решения задачи) для приведения системы к каноническому виду (в котором все диагональные элементы отличны от нуля).

Метод Зейделя для решения систем нелинейных уравнений заключается в следующем.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.4}$$

Система (1.4) решается итерационным методом:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} + \gamma_i f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^k),\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.5}$$

где $k = 0, 1, \dots$, γ_i, $i = 1, 2, \dots; n$ – параметр, подбираемый из условия сходимости итераций (1.5).

Вопросы сходимости метода Зейделя исследовались для систем алгебраических уравнений в работах [1]– [3] , а для операторных уравнений в банаховых пространствах– в работе [4].

Приведем необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя.

Систему уравнений (1.1) запишем в виде

$$Bx + Cx = f,$$

где $B = \{b_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $b_{ij} = a_{ij}$ при $j \le i$, $i = 1, 2, \dots, n$; $b_{ij} = 0$ при $j > i$; $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $c_{ij} = 0$ при $j \le i$; $c_{ij} = a_{ij}$ при $j > i$.

Известно [2, с.364], следующее утверждение.

Теорема 1.1 [2]. *Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

были по модулю меньше 1.

Более удобное для проверки достаточное условие сходимости метода Зейделя имеет следующий вид.

Теорема 1.2 [2]. *Пусть при всех i*

$$\sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}| \le q|a_{ii}|,\ q < 1.$$

Тогда

$$\|x^{n+1} - x^*\|_3 \le q\|x^n - x^*\|_3,$$

где x^* – решение системы уравнений (1.1). *Здесь* $\|x\|_3 = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$.

В последнее время при решении различных вычислительных задач используется непрерывный операторный метод [5]. Его эффективность при решении нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений продемонстрирована в работе [6].

Представляет несомненный интерес распространение подхода, используемого в непрерывном операторном методе, на метод Зейделя. Важным преимуществом непрерывной модификации метода Зейделя является отсутствие требования отличия от нуля всех диагональных элементов (в линейном случае) и отсутствие требования существования отличных от нуля производных $\dfrac{\partial f_i(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$ в окрестности решения (в нелинейном случае).

Напомним основные моменты непрерывного операторного метода.

2. Непрерывный операторный метод

Рассмотрим уравнение

$$A(x)-f=0, \tag{2.1}$$

где $A(x)$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в X. Обозначим через x^* решение уравнения (2.1).

В работе [5] установлена связь между устойчивостью решений операторных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и разрешимостью операторных уравнений вида (2.1).

Приведем необходимые обозначения:

$$B(a,r)=\{z\in B:\|z-a\|\le r\},\ S(a,r)=\{z\in B:\|z-a\|=r\},$$

$$\operatorname{Re}K=K_R=(K+K^*)/2,\qquad \Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)/h.$$

Здесь B – банахово пространство; $a,z\in B$; K – линейный оператор, действующий из B в B; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма [7] оператора K; I – тождественный оператор.

Для наиболее употребительских пространств логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,n$, в n-мерном пространстве R_n векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ с нормой $\|x\|_1=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$, $\|x\|_2=[\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2]^{1/2}$, $\|x\|_3=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k|$

Логарифмическая норма матрицы A равна [8]:

$$\Lambda_1(A)=\max_j(a_{jj}+\sum_{i=1,i\ne j}^{n}|a_{ij}|),$$

$$\Lambda_2(A)=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),$$

$$\Lambda_3(A)=\max_i(a_{ii}+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|).$$

Здесь $\lambda_{\max}((A+A^T)/2)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A+A^T)/2$.

Уравнению (2.1) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(x(t))-f, \tag{2.2}$$

$$x(0)=x_0. \tag{2.3}$$

Т е о р е м а 2.1 [5]. *Пусть уравнение (2.1) имеет решение x^*, и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B, справедливо неравенство*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau))d\tau \le -\alpha,\ \alpha>0. \tag{2.4}$$

Тогда решение задачи Коши (2.2)– (2.3) сходится к решению x^* уравнения (2.1) при любом начальном приближении.

Т е о р е м а 2.2 [5]. *Пусть уравнение (2.1) имеет решение x^*, и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:*

1) при любом $t (t > 0)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \Lambda(A'(g(\tau))d\tau \le 0; \tag{2.5}$$

2) справедливо неравенство (2.4).

Тогда решение задачи Коши (2.3) сходится к решению уравнения (2.1).

З а м е ч а н и е 2.1 *В неравенстве (2.4) можно считать, что каждой дифференцируемой кривой $g(t)$ отвечает своя константа $\alpha_g > 0$.*

З а м е ч а н и е 2.2 *Из неравенств (2.4)–(2.5) следует, что логарифмическая норма $\Lambda(A'(g(\tau))$ может быть положительной при некоторых значениях τ; т. е. производная Фреше $A'(g(\tau))$ может вырождаться в оператор, тождественно равный нулевому.*

З а м е ч а н и е 2.3 *Решение модельного примера (приближенное решение нелинейного гиперсингулярного интегрального уравнения)* [6] *продемонстрировало сходимость итерационного процесса, основанного на непрерывном операторном методе, при обратимости в нуль производной Фреше на начальном приближении.*

3. Непрерывный аналог метода Зейделя для линейных алгебраических уравнений

Поставим системе алгебраических уравнений (2.1) в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j(t) + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j(t-h) - b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1}$$

в которую введен параметр запаздывания h; h – достаточно маленькое положительное число.

Пусть система уравнений (3.1) имеет единственное решение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$.

Найдем достаточные условия, при которых решение системы уравнений (3.1) сходится к решению системы уравнений (2.1) при любом начальном значении.

Исследование будем проводить в метрике пространства $\|x\|_3 = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$.

Сделаем замену переменных $x_j = u_j + x_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда система уравнений (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}u_j(t) + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j(t-h),\ i = 1, 2 \ldots, n. \tag{3.2}$$

Введем матрицы $B = \{b_{ij}\}$ и $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь $b_{ij} = a_{ij}$ при $j = 1, 2, \ldots, i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $b_{ij} = 0$ при остальных значениях i, j; $c_{ij} = a_{ij}$ при $j = i + 1, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $c_{ij} = 0$ при остальных значениях i, j.

В операторном виде система уравнений (3.2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = Bu(t) + Cu(t-h), \tag{3.3}$$

где $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$.

Пусть

$$u(t) = 0, \quad t \in [t_0 - h, t_0); \quad u(t_0) = u_0 -- \tag{3.4}$$

– начальное значение для уравнения (3.3).

Решение задачи Коши (3.3)–(3.4) при $t \geq t_0$ можно записать в виде

$$u(t) = e^{B(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{B(t-s)}Cu(s-h)\,ds. \tag{3.5}$$

Пусть выполнены условия:

1) $\Lambda(B) \leq -\chi$, $\chi > 0$;

2) $-\chi + \|C\| < -\chi_1$, $\chi_1 > 0$.

Вначале докажем устойчивость системы (3.3) при любом начальном условии.

Пусть $\|u(t_0)\| = \delta$, $\delta > 0$. Покажем, что при $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leq e^{-\chi_1(t-t_0)}\|u(t_0)\|. \tag{3.6}$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени T, $T \geq t_0$, неравенство (3.6) нарушается. Тогда $\|u(T)\| = e^{-\chi_1(T-t_0)}\|u(t_0)\|$ и $\|u(t)\| > e^{-\chi_1(T-t_0)}\|u(t_0)\|$ при $t > T$. Для определенности будем считать, что $|u_1(T)| = \|u(T)\|$.

Представим систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}u_j(t) + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\frac{u_j(T-h)}{u_1(T)}u_1(t) +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\left(u_j(t-h) - \frac{u_j(T-h)}{u_1(T)}u_1(t)\right),\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Систему (3.7) запишем в виде

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i} d_{ij}u_j(t) + g_1(t, u(t-h), u_1(t)),\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.8}$$

где $d_{i1} = a_{i1} + \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}\dfrac{u_j(T-h)}{u_1(T)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $d_{ij} = a_{ij}$, $j = 2, \ldots, i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $d_{ij} = 0$, $j = i + 1, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, n$; построение функций $g_i(t, u(t-h), u_1(t))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, очевидно.

Решение системы уравнений (3.8) при $t \geq T$ имеет вид

$$u(t) = e^{D(t-T)}u(T) + \int\limits_T^t e^{D(t-s)} g(s, u(s-h), u(s))\, ds, \tag{3.9}$$

где

$$g(s, u(s-h), u_1(s)) = (g_1(s, u(s-h), u_1(s)), \ldots, g_n(s, u(s-h), u_1(s))).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(D)(t-T)}\|u(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(D)(t-s)}\|g(s, u(s-h), u_1(s))\|\, ds. \tag{3.10}$$

Введем матрицу $\tilde{D} = \{\tilde{d}_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\tilde{d}_{i1} = a_{i1} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\tilde{d}_{ij} = a_{ij},\ j = 2, \ldots, i,\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\tilde{d}_{ij} = 0,\ j = i+1, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Нетрудно видеть, что $\Lambda(D) \leq \Lambda(\tilde{D}) \leq \Lambda(A)$, где $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, неравенство (3.10) можно усилить:

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|u(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\|g(s, u(s-h), u_1(s))\|\, ds. \tag{3.11}$$

Из структуры вектор-функции $g(s, u(s-h), u_1(s))$ следует, что существует такой промежуток времени $[T, T+\Delta T]$, в течение которого $\|g(s, u(s-h), u_1(s))\| \leq \varepsilon\|u(s)\|$, $\varepsilon + \Lambda(A) < 0$. Усиливая неравенство (3.11), имеем

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|u(T)\| + \int\limits_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\varepsilon\|u(s)\|\, ds. \tag{3.12}$$

Из (3.12) стандартным приемом [7]; [9] приходим к оценке

$$\|u(t)\| \leq e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)(t-T)}\|x(T)\|, \tag{3.13}$$

где $\varepsilon > 0$– произвольное число, такое, что $\Lambda(A) + \varepsilon < 0$. Поскольку $\Lambda(A) + \varepsilon < 0$, то из (3.13) следует, что в интервале $(T, T + \Delta T]$

$$\|x(t)\| < \|x(T)\|.$$

Получено противоречие, из которого следует, что при $t > t_0$ выполняется неравенство (3.6).

Отсюда вытекает устойчивость системы уравнений (3.3)в целом, из которой следует сходимость системы уравнений (2.2)– (2.3) к решению x^* системы уравнений (1.1).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1 *Пусть $\Lambda(A) \le -\chi$, $\chi > 0$. Тогда система уравнений* (1.1) *имеет единственное решение, к которому сходится непрерывный аналог метода Зейделя* (3.2).

З а м е ч а н и е 3.1 *В силу выбранной в работе метрики $\Lambda(B) + \|C\| = \Lambda(A)$.*

З а м е ч а н и е 3.2 *Величина задержки h влияет на скорость сходимости решения системы уравнений* (3.2) *к решению x^*; поэтому задержку следует выбирать достаточно малой.*

З а м е ч а н и е 3.3 *Преимущество непрерывного аналога метода Зейделя по сравнению с непрерывным операторным методом заключается в том, что фактически достаточные условия устойчивости в целом системы дифференциальных уравнений* (3.2) *обусловлены неравенством $\Lambda(D) < 0$, а не $\Lambda(A) < 0$, причем $\Lambda(D) \le \Lambda(A) < 0$.*

Последнее неравенство гарантирует применимость метода Зейделя для более широкого класса систем по сравнению с непрерывным операторным методом.

Представляет интерес скорость сходимости непрерывного метода к решению x^* системы уравнений (2.1).

Зафиксируем произвольное достаточно малое число ε^* такое, что $\Lambda(A) + \varepsilon^* < 0$, и покажем, что при $t \in [t_0, \infty)$

$$\|u(t)\| \le e^{(\Lambda(A)+\varepsilon^*)(t-t_0)}\|u(t_0)\|. \tag{3.14}$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени T_1, $T_1 \ge t_0$ неравенство (3.14) нарушается. Для определенности положим $|u_1(T_1)| = \exp\{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(T_1 - t_0)\|u(t_0)\|$.

Представим при $t \ge T_1$ систему уравнений (3.2) в виде (3.9). Переходя к нормам, получим неравенство (3.10), мажорируя которое, приходим к неравенству (3.11). В выражениях (3.9) – (3.11) значение T заменяем на T_1.

Из структуры вектор-функции $g(s, u(s-h), u_1(s))$ следует, что существует такой промежуток времени $[T_1, T_1 + \Delta T_1]$, что при $t \in [T_1, T_1 + \Delta T_1]$ $\|g(s, u(s-h), u_1(s))\| \le \varepsilon^*\|u(s)\|$.

Усиливая неравенство (3.11), приходим к неравенству

$$\|u(t)\| \le e^{\Lambda(A)(t-T_1)}\|u(T_1)\| + \varepsilon^* \int\limits_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\|u(s)\|\,ds,$$

из которого стандартными рассуждениями приходим к неравенству

$$\|u(t)\| \le e^{(\Lambda(A)+\varepsilon^*)(t-T_1)}\|u(T_1)\|.$$

Таким образом, получено противоречие и, следовательно, доказана справедливость неравенства (3.14) при $t \ge t_0$.

Из неравенства (3.14) следует асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (3.2) и оценка скорости сходимости

$$\|x(t) - x^*\| \le \exp\{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(t - t_0)\}\|x(t_0)\|,$$

где ε^* – как угодно малое положительное число.

4. Непрерывный аналог метода Зейделя для нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$a_i(x_1,\dots,x_n)=b_i,\ i=1,2,\dots,n. \tag{4.1}$$

Будем считать, что функции $a_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,n$ имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с коэффициентом A:

$$|D^j a_i(x_1^*,...,x_n^*)-D^j a_i(y_1^*,...,y_n^*)|\le A(|x_1^*-y_1^*|+...+|x_n^*-y_n^*|), j=1,\dots,n. \tag{4.2}$$

Здесь

$$D^k a_i(x_1,\dots,x_n)=\partial a_i(x_1,\dots,x_n)/\partial x_k,\ k=1,2.\dots,n.$$

Аналог метода Зейделя для решения системы уравнений (4.1) имеет вид

$$a_i(x_1^{(k+1)},\dots,x_i^{(k+1)},x_{i+1}^{(k)},\dots,x_n^{(k)})=b_i,\ i=1,2,\dots,n, \tag{4.3}$$

где $k=0,1,\dots$.

Для решения системы (4.3) на каждом шаге итерационного процесса можно использовать стандартные методы вычислительной математики.

Преимущество метода Зейделя в случае решения системы (4.2) перед методом Ньютона-Канторовича [10] заключается в том, что производная Фреше левой части системы уравнений (4.2) по переменным $x_j^{(k+1)}$, $j=1,2,\dots,i$ имеет вид диагональной матрицы. (Имеется в виду, что в j-строке левой части системы уравнений (4.2) значение $x_1^{(k+1)},\dots,x_{j-1}^{(k+1)},x_{j+1}^{(k)},\dots,x_n^{(k)}$ известны.)

Непрерывный аналог метода Зейделя для системы уравнений (4.1) имеет вид

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=a_i(x_1(t),\dots,x_i(t),x_{i+1}(t-h),\dots,x_n(t-h))-b_i,\ i=1,2,\dots,n, \tag{4.4}$$

где h – достаточно маленькое положительное число.

В качестве предыстории при решении системы дифференциальных уравнений (4.4) естественно положить

$$x_i(t)=0,\ t\in[-h,0],\ i=1,2,\dots,n. \tag{4.5}$$

В случае, если известно достаточно хорошее начальное приближение к решению системы уравнений (4.1), его можно взять в качестве начальных условий.

Пусть система уравнений (4.1) имеет решение $x^*=(x_1^*,\dots,x_n^*)$.Тогда

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt}=a_i(x_1^*(t),\dots,x_i^*(t),x_{i+1}^*(t-h),\dots,x_n^*(t-h))-b_i,\ i=1,2,\dots,n. \tag{4.6}$$

Для единообразия в обозначениях при проведении дальнейших выкладок полагаем $x_i^*(t)\equiv x_i^*$, $t\in[t_0,\infty)$, $i=1,2,\dots,n$.

Введем функции $u_i(t)=x_i(t)-x_i^*(t)$, $i=1,2,\dots,n$. Тогда

$$\frac{du_i(t)}{dt}=$$
$$=a_i(x_1^*(t)+u_1(t),\dots,x_i^*(t)+u_i(t),\ x_{i+1}^*(t-h)+u_{i+1}(t-h),\dots,x_n^*(t-h)+u_n(t-h))-$$
$$-a_i(x_1^*(t),\dots,x_i^*(t),x_{i+1}^*(t-h),\dots,x_n^*(t-h)), \tag{4.7}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Воспользовавшись формулой Тейлора, получим систему уравнений

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{i} D^k a_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) u_k(t) + \sum_{k=i+1}^{n} D^k a_i(x_1^*, \ldots, x_n^*) u_k(t-h)] +$$

$$+ g_i(t; x_1(t), \ldots, x_i(t); x_1^*, \ldots, x_i^*; x_{i+1}(t-h), \ldots, x_n(t-h); x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*), \qquad (4.8)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим, что функции

$$g_i(t; x_1(t), \ldots, x_i(t); x_1^*, \ldots, x_i^*; x_{i+1}(t-h), \ldots, x_n(t-h); x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*),$$

$i = 1, \ldots, n$ имеют сложный вид. Они выписаны в работе [11].

В случае, если тривиальное решение системы уравнений (4.7)–(4.8) устойчиво, то $\lim\limits_{t\to\infty}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, т. е. решение системы уравнений (4.7) сходится к решению системы уравнений (4.1).

Достаточные условия устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием исследованы в работе [11]. Повторяя рассуждения, приведенные в [11], придем к следующему утверждению.

Теорема 4.1 *Пусть функции $a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют непрерывные частные производные по переменным x_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие условию Липшица* (4.2). *Пусть система уравнений* (4.1) *имеет решение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Пусть выполняется неравенство*

$$D^i a_i(x_1^*(t), ..., x_n^*(t)) + \sum_{j=1}^{i-1} |D^j a_i(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))| +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{n} |D^j a_i(x_1^*(t-h(t)), ..., x_n^*(t-h(t)))| < -\chi < 0, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда решение системы уравнений (4.4) *сходится к решению системы уравнений* (4.1).

5. Модельные примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие эффективность непрерывного аналога метода Зейделя в случаях, когда стандартный метод Зейделя не применим.

Пример 5.1 *Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 0.5x_3 + 0.1x_4 = -2.1, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 0.5x_4 = -7, \\ 0.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0.1x_4 = -17.65, \\ -0.3x_1 - 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.25. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Точное решение системы: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$.

Решение системы (5.1) классическим методом Зейделя невозможно, т. к. $a_{44} = 0$.

Система (5.1) моделировалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + x_2(t-h_0) - 0,5x_3(t-h_0) + 0,1x_4(t-h_0) + 2.1, \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t) - x_3(t-h_0) + 0,5x_4(t-h_0) + 7, \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -0,5x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) - 0,1x_4(t-h_0) + 17.65, \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -0,3x_1(t) - 0,4x_2(t) + 0,2x_3(t) - 0.25. \end{cases} \tag{5.2}$$

Система (5.2) при $h_0 = 0,3$ решалась методом Эйлера с шагом $h = 0,3$ и начальными значениями $x_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Результат решения системы уравнений (5.1) непрерывным аналогом метода Зейделя приведен на Рис. 5.1.

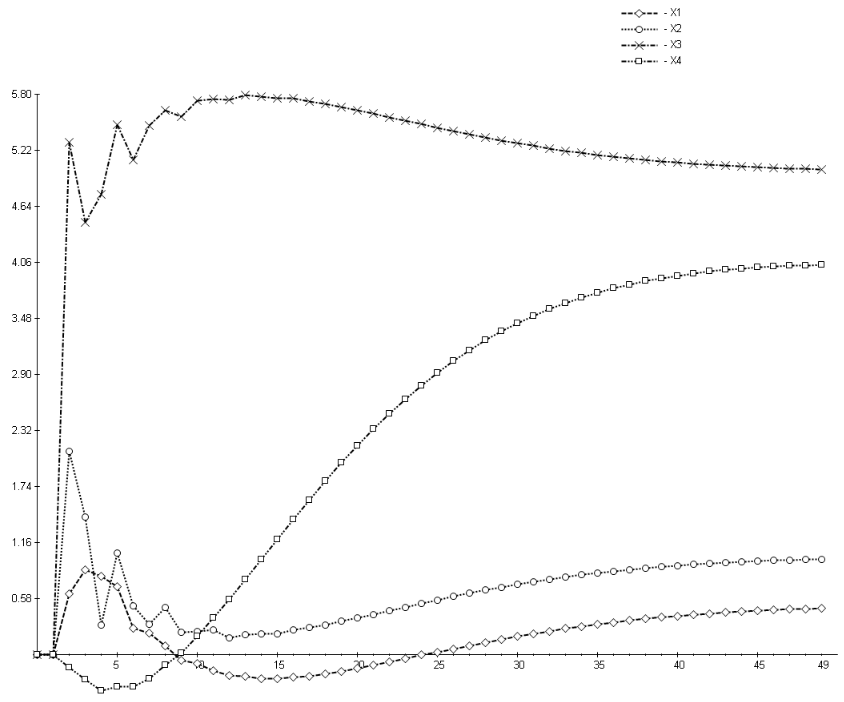

Рисунок **5.1**

Пример 5.2 *Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases} -5x_1^2 + x_2^2 - 0.5x_3^2 + 0.1x_4^2 = -1.134, \\ 2x_1^2 - 5x_3^2 - x_3^2 + 1.5x_4^2 = -0.375, \\ -0.5x_1^2 - 2x_2^2 + 0 \cdot x_3^2 - 0.1x_4^2 = -0.446, \\ -0.3x_1^2 - 0.4x_2^2 + 0.2x_3^2 + 0 \cdot x_4^2 = -0.121. \end{cases} \tag{5.3}$$

Точное решение системы: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.1$.

Решение системы (5.3) классическим методом Зейделя невозможно, т. к. $a_{33} = 0$, $a_{44} = 0$.

Система (5.3) моделировалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1^2(t) + x_2^2(t-h_0) - 0.5x_3^2(t-h_0) + 0.1x_4^2(t-h_0) + 1.134, \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1^2(t) - 5x_2^2(t) - x_3^2(t-h_0) + 1.5x_4^2(t-h_0) + 0.375, \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -0.5x_1^2(t) - 2x_2^2(t) + 0 \cdot x_3^2(t) - 0.1x_4^2(t-h_0) + 0.446, \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -0.3x_1^2(t) - 0.4x_2^2(t) + 0.2x_3^2(t) + 0 \cdot x_4^2(t) + 0.121. \end{cases} \tag{5.4}$$

Система (5.4) при $h_0 = 0,2$ решалась методом Эйлера с шагом $h = 0.2$ и с начальными условиями $x_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, 4$.

Результаты решения системы (5.3) непрерывным методом Зейделя приведены на Рис. 5.2.

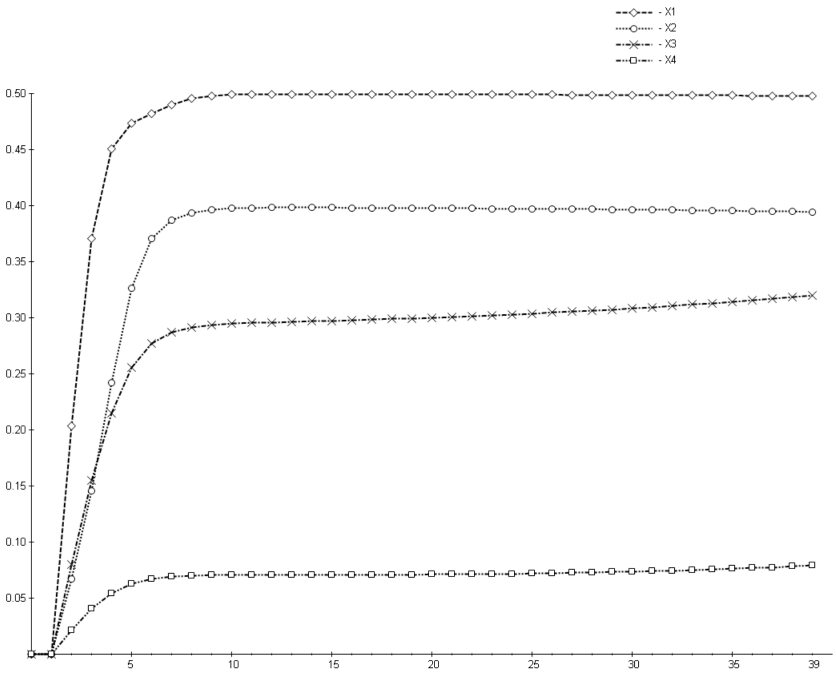

Рисунок **5.2**

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

Список литературы

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М., 1963, 734 с.

2. Н. С. Бахвалов, *Численные методы*, Наука, М., 1973, 632 с.

3. Д. Ортега, В. Рейнболт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975, 560 с.

4. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969, 456 с.

5. И. В. Бойков, “Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:9 (2012), 1308–1314.

6. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova. O. A. Baulina, “New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280–305.

7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.

8. К. Деккер, Я. Вервер, *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1988, 334 с.

9. И. В. Бойков, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Издательство Пензенского государственного университета, Пенза, 2008, 244 с.

10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с.

11. И. В. Бойков, “Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 435–457.

Поступила 1.11.2018

MSC2010 65F10, 65H10

On the continuous analogue of the Seidel method

© **I. V. Boikov**[1], **A. I. Boikova**[2]

Abstract. Continuous Seidel method for solving systems of linear and nonlinear algebraic equations is constructed in the article, and the convergence of this method is investigated. According to the method discussed, solving a system of algebraic equations is reduced to solving systems of ordinary differential equations with delay. This allows to use rich arsenal of numerical ODE solution methods while solving systems of algebraic equations. The main advantage of the continuous analogue of the Seidel method compared to the classical one is that it does not require all the elements of the diagonal matrix to be non-zero while solving linear algebraic equations' systems. The continuous analogue has the similar advantage when solving systems of nonlinear equations.

Key Words: systems of algebraic equations, Seidel method, systems of ordinary differential equations, delay

References

1. D.K. Faddeev, V.N. Faddeeva, *Computational methods of linear algebra*, Fizmatgiz, Moscow, 1963 (In Russ.), 734 p.

2. N.S.Bakhvalov, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ.), 632 p.

3. J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, NY., 1970.

4. M. A. Krasnoselsky , G.M. Vainikko , P.P. Zabreiko, Ya. B. Rutitsky, V.Ya. Stetsenko, *Approximate solution of operator equations*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.), 456 p.

5. I. V. Boikov, "On a continuous method for solving nonlinear operator equations", *Differential equations*, **48**:9 (2012), 1308-1314 (In Russ.).

6. I.V. Boykov , V.A. Roudnev , A.I. Boykova, O.A. Baulina, "New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations", *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280-305.

7. Yu.L. Daletsky , M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Nauka, Moscow, 1970 (In Russ.), 536 p.

8. K. Dekker, J. Verver, *Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations*, Mir, Moscow, 1988 (In Russ.), 334 p.

9. I.V. Boikov, *Stability of solutions of differential equations*, Publishing House of Penza State University, Penza, 2008 (In Russ.), 244 p.

10. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional analysis*, Nauka, Moscow, 1984 (In Russ.), 752 p.

[1]**Ilya V. Boikov**, Head of Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6980-933X, i.v.boykov@gmail.com

[2]**Alla I. Boikova**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6980-933X, allaboikova@mail.ru

11. I.V. Boikov, "Stability of steady-state solutions of systems of nonlinear nonautonomous delay differential equations", *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 427–449.

Submitted 1.11.2018