

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.327-337

УДК 519.67; 538.945

Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности© Н. Д. Кузьмичев¹, М. А. Васютин², А. Ю. Шитов³, И. В. Бурьянов⁴

Аннотация. В работе получены неоднородные дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников второго рода из синфазной (действительной) составляющей первой гармоники намагниченности в гистерезисном случае. На основе дифференциального уравнения 2-го порядка выполнено математическое моделирование средней дифференциальной восприимчивости для теоретической и экспериментальной зависимости действительной части первой гармоники намагниченности. Решение задачи Коши осуществлялось численно, методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для этого дифференциальное уравнение для восстановления средней восприимчивости сводилось к системе дифференциальных уравнений. На основе разработанной в работе методике была восстановлена средняя дифференциальная восприимчивость дискообразного поликристаллического сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ из экспериментально полученной первой гармоники намагниченности в интервале магнитных полей от 0 до 800 Э.

Ключевые слова: неоднородное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод Рунге-Кутты, намагниченность, средняя дифференциальная восприимчивость, высокотемпературный сверхпроводник, действительная часть первой гармоники намагниченности, мнимая часть первой гармоники намагниченности.

1. Введение

Известно, что магнитные свойства высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) обладают сложным поведением и разнообразием [1]–[5]. Так, слабые магнитные поля напряженностью $H \sim 1$ Э проникают в ВТСП, и их намагниченность является нелинейной функцией напряженности магнитного поля, и в больших полях обнаруживается

¹ Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

² Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

³ Шитов Альмир Юрьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, shishkin92@mail.ru

⁴ Бурьянов Игорь Валерьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, i.v.buryanov@gmail.com

гистерезис. Кроме того, захваченный образцом магнитный поток релаксирует. В связи с этим возникает необходимость в новой методике обработки экспериментальных данных по магнитным измерениям. Особый интерес представляют исследования магнитных свойств материалов путем обработки спектра гармоник сигнала отклика на модулированное магнитное поле. Амплитуды гармоник указанного спектра содержат богатую информацию об аналитических свойствах и механизме нелинейных и гистерезисных свойств намагниченности $M(H)$. Широко распространенным методом исследования магнитных свойств ВТСП является изучение отклика образца на внешнее постоянное и переменное магнитное поле. Для этого используется «2-х катушечный» метод, который описан, например, в работах [1]–[3]. Величина ε – ЭДС отклика пропорциональна скорости изменения намагниченности образца:

$$\varepsilon = -\mu_0 N S \cdot \frac{dM}{d\tau} \quad (1.1)$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, N – число витков приемной катушки, S – площадь сечения образца, τ – время и M – намагниченность образца. Намагниченность образца ВТСП зависит от величины текущего внешнего магнитного поля, от предыстории его состояния, от температуры и в общем случае от времени (релаксация) [1]–[4], т.е. $M = M(H, T, \tau)$.

2. Теоретические предпосылки

Пусть экспериментально исследуется гистерезисная зависимость намагниченности $M(H)$. При статическом и переменном воздействии зависимость M будет периодической функцией времени τ и в регистрирующем сигнале, содержащем информацию о зависимости, имеются высшие гармоники. Следуя работам [1]–[7], разложим $M(H)$ в ряд Тейлора в точке H_0 по $z = h \cdot \cos \omega\tau$, который преобразуется в ряд Фурье:

$$M(H) = M(H_0 + h \cdot \cos(t)) = \frac{M'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cdot [M'_n \cdot \cos(nt) + M''_n \cdot \sin(nt)] \quad (2.1)$$

В выражении (2.1) величина $t = \omega\tau$ есть безразмерное время. Ряды для амплитуд гармоник Фурье равны:

$$\begin{cases} M'_n(H_0, h) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2m+n} \langle M(H_0) \rangle^{(2m+n)}, \\ M''_n(H_0, h) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \Delta M(H_0)^{(p)} \cdot S_{p,n} \cdot \frac{h^p}{p!} \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь $\langle M(H) \rangle = [M_-(H) + M_+(H)]/2$ – средняя кривая намагниченности, $\langle M(H) \rangle^{(k)}$, $\Delta M(H)^{(k)}$ – производная от $\langle M \rangle$ или от $\Delta M(H)$ по H порядка k , $\Delta M(H) = [M_-(H) + M_+(H)]$ – разностная кривая намагниченности, $M_-(H)$ и $M_+(H)$ – ветви намагниченности в убывающем и возрастающем поле соответственно,

$$S_{p,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p!(n+p-2i-2)!!}{(p-i)!(p+n)!!}$$

Где при $n = 2k$, $p = 2m + 1$, а при $n = 2k + 1$, $p = 2m$. Например, $S(p, 0) = 0$, $S(p, 1) = 1/(p+1)$, $S(p, 2) = 2/(p+2)$, $S(p, 3) = (3p+1)/(p+1)(p+3)$ и т.д.

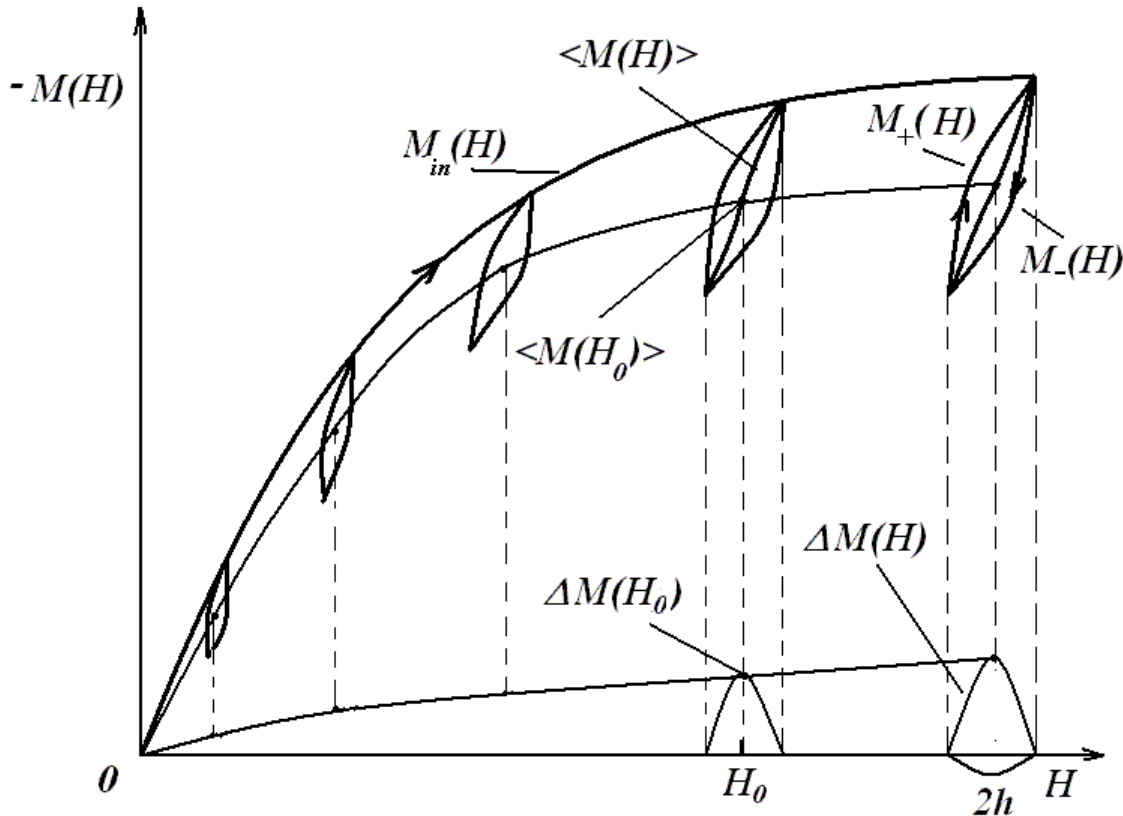
Для первой гармоники намагниченности имеем:

$$M_1'(H_0, h) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1} \langle M(H_0) \rangle^{(2m+1)}, \quad (2.3)$$

$$M_1''(H_0, h) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta M(H_0)^{(2m)} \cdot \frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \quad (2.4)$$

В отсутствие гистерезиса $\langle M(H) \rangle = M(H)$, а $\Delta M(H) = 0$. В этом случае $M_n'' = 0$.

На Рис. 2.1 для примера приведены различные ветви намагниченности для сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии.



Р и с у н о к 2.1

Кривые и ветви намагниченности сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии. Здесь: $M_{in}(H)$ – начальная кривая намагниченности, $\langle M(H) \rangle$ – средняя кривая намагниченности для текущей напряженности магнитного поля, $H = H_0 + h \cdot \cos(\omega\tau)$, $\Delta M(H)$ – разностная кривая намагниченности, $M_-(H)$ – ветвь намагниченности в убывающем поле, $M_+(H)$ – ветвь намагниченности в возрастающем поле, $\langle M(H_0) \rangle$ – зависимость средней кривой намагниченности при медленном сканировании значения статического поля H_0 , $\Delta M(H_0)$ – зависимость разностной кривой намагниченности от величины H_0 .

Для гистерезисного случая при значениях малых h в (2.3) и (2.4) оставим по два члена разложения:

$$M_1' \approx h \left. \frac{d\langle M(H) \rangle}{dH} \right|_{H_0} + \frac{h^3}{8} \cdot \left. \frac{d^3\langle M(H) \rangle}{dH^3} \right|_{H_0}, \quad (2.5)$$

$$M_1'' \approx \frac{2}{\pi} \left[\Delta M(H_0) + \frac{h^2}{6} \cdot \frac{d^2 \Delta M(H)}{dH^2} \Big|_{H_0} \right] \quad (2.6)$$

Как правило, первый член в формуле (2.6) много меньше второго члена. При малых значениях h квадратурная (мнимая) составляющая первой гармоники приблизительно равна $M_1'' \approx h^2 \cdot \Delta M(H_0)^{(2)}/3\pi$ и $|M_1'| \gg |M_1''|$. В силу отмеченной причины в модуль первой гармоники при малых h основной вклад вносит синфазная (действительная) часть, т.е. $M_1 = \sqrt{(M_1')^2 + (M_1'')^2} \approx M_1'$.

На основании формулы (2.5) можно получить дифференциальное уравнение для восстановления производной средней кривой намагниченности $d \langle M \rangle / dH$ при известной зависимости первой гармоники от постоянного поля $M_1'(H_0)$. Зависимость $M_1'(H_0)$ можно определить экспериментально путем исследования спектра гармоник намагниченности при помещении образца в переменное магнитное поле амплитудой h и постоянное поле напряженностью H_0 . Таким образом, для малых фиксированных амплитуд h формула (2.5) превращается в дифференциальное уравнение третьего порядка, которое сводится к уравнению второго порядка относительно $d \langle M \rangle / dH_0$. Для простоты введем обозначение $d \langle M \rangle / dH_0 \equiv X_c$, тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 X_c}{dH_0^2} + \frac{8}{h^2} \cdot X_c = \frac{8}{h^3} M_1'(H_0, h) \quad (2.7)$$

В уравнении (2.7) величину X_c назовем средней дифференциальной восприимчивостью, так она является производной по полю от средней намагниченности $\langle M \rangle$. При увеличении h необходимо учитывать следующий член разложения (2.3) и так далее. Это приводит к увеличению порядка дифференциального уравнения на два. Кроме того, средняя кривая намагниченности как видно из рис. 2.1 с ростом h сильнее отличается от начальной кривой намагниченности $M_{in}(H)$. Критерием применимости уравнения (2.7) является малость амплитуды 5-той гармоники по сравнению с первой, т.е.: $|M_1'| \gg |M_5'|$. При практическом восстановлении дифференциальной восприимчивости, кроме численного задания правой части уравнения (2.7) необходимо задавать начальные условия $X_c(H_{00})$ и $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$, т.е. поставить задачу Коши. В силу численного задания экспериментально определенной правой части уравнения (2.7) его необходимо решать численно путем сведения его к системе уравнений 2-го порядка. Таким способом определенную задачу Коши можно решать методом Рунге-Кутты 4-го порядка [8]. Другим методом решения уравнения (2.7) является использование аналитического решения, записанного в виде свертки с правой частью указанного уравнения (2.8):

$$X_c(H) = A \cdot \cos \left(\frac{2\sqrt{2}}{h} \cdot H \right) + B \cdot \sin \left(\frac{2\sqrt{2}}{h} \cdot H \right) + \frac{2\sqrt{2}}{h^2} \cdot \int_{H_{00}}^H M_1'(z, h) \cdot \sin \left(\frac{2\sqrt{2}}{h} \cdot (H - z) \right) dz \quad (2.8)$$

Где A и B являются постоянными определяемыми начальными условиями. Интеграл в правой части (2.8) в силу численного задания вычисляется численно.

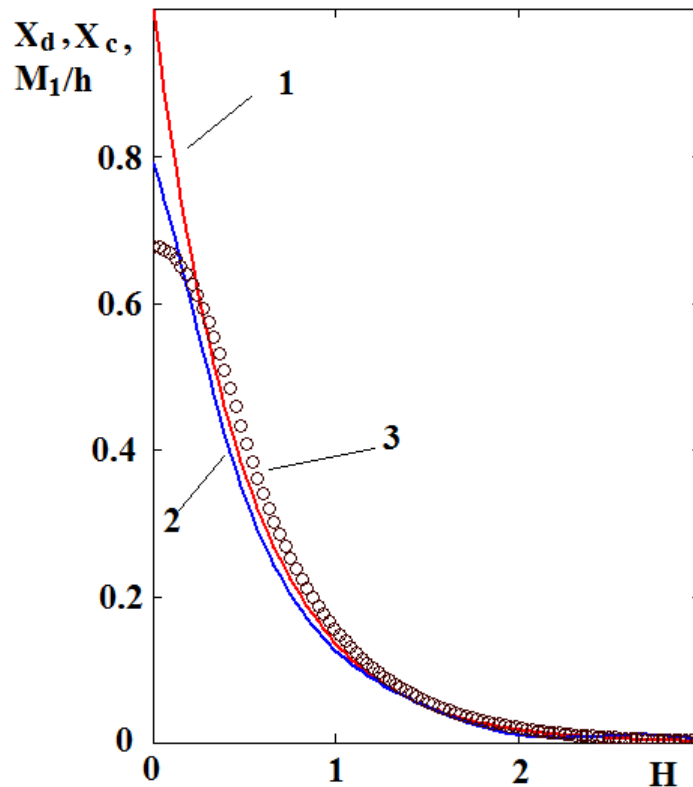
Рассмотрим развитую методику на примере зависимости средней кривой намагниченности часто используемой для описания магнитных свойств тонкого сверхпроводящего диска находящегося в критическом состоянии. Средняя намагниченность имеет вид [2]:

$$\langle M(H) \rangle = -M_0 \cdot \exp \left(\frac{-|H|}{H^*} \right) \left[\sinh \left(\frac{H}{H^*} \right) \right]$$

Первая гармоника намагниченности определялась по формуле:

$$M'_1(h, H_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \langle M(H_0 + h \cdot \cos(t)) \rangle \cos(t) dt \quad (2.9)$$

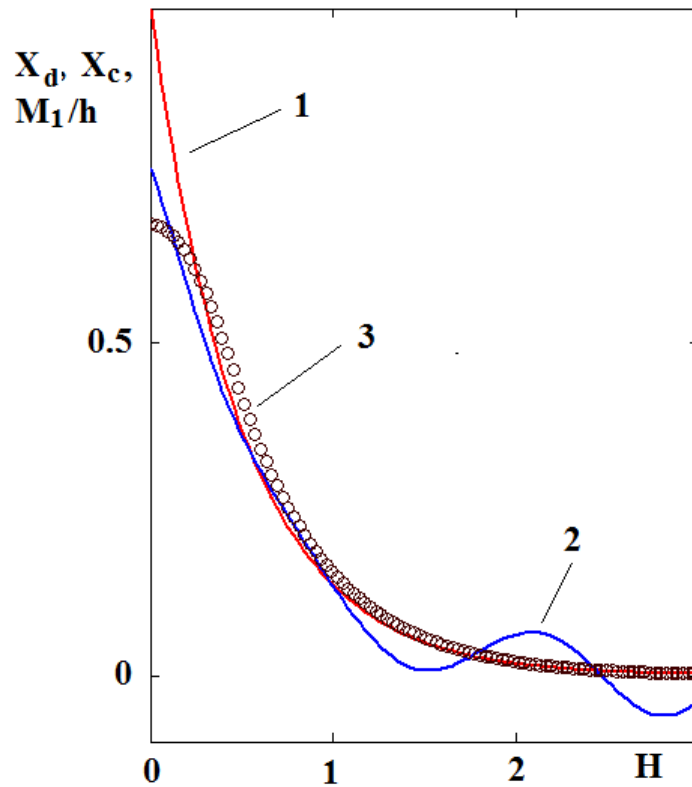
Математическое моделирование производилось в системе MathCad. Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости приведены на рис. 2.2. Уравнение (2.7) сводилось к системе 2-х дифференциальных уравнений и решалось численно методом Рунге-Кутты. Величина h равнялась $H^*/2$.



Р и с у н о к 2.2

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$. На рисунке: 1 – дифференциальная восприимчивость X_d , 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M'_1 (формула 2.9), 3 – $M'_1(H, h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^* , а X_c , X_d и $M'_1(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

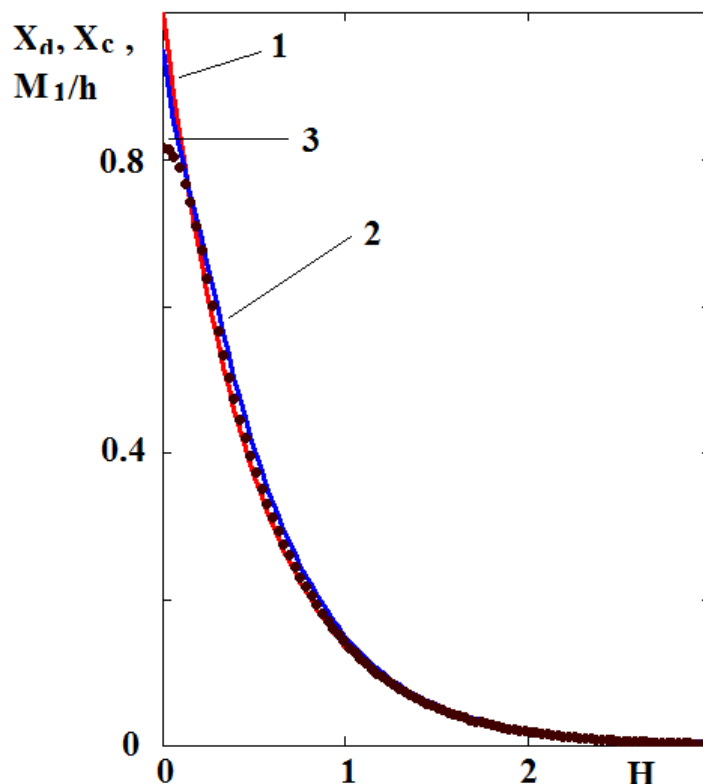
Из рисунка видно, что дифференциальная восприимчивость хорошо восстанавливается вдали от особенности находящейся в нуле поля. Для улучшения результатов необходимо уменьшать h или увеличивать степень дифференциального уравнения. То есть необходимо брать следующие члены ряда (2.3). Точность восстановления сильно зависит от выбора начальных условий $X_c(H_{00})$ и $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$. Для начала счета в качестве $X_c(H_{00})$ следует взять $M'_1(H_{00})/h$. Производную $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$ можно приближенно определить численно из зависимости $M'_1(H)$. Изменяя начальные условия добиваются наименьшего отклонения между кривыми $X_c(H)$ и M_1/h . Результаты вариации начальных условий приведены на рис. 2.3. Начальные условия для уравнения (2.7) отличаются от начальных условий, приводящих к оптимальному результату, представленному на рис. 2.2.



Р и с у н о к 2.3

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$; 1 – дифференциальная восприимчивость X_d , 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M_1' (формула 2.9), 3 – $M_1'(H, h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^* , а X_c , X_d и $M_1'(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

При уменьшении амплитуды модуляции в два раза $h = 0.25H^*$ точность восстановления увеличивается. Результаты приведены на рисунке 2.4. Из рисунка видно хорошее согласие восстановленной зависимости X_c с истинной (теоретической) зависимостью X_d .



Р и с у н о к 2.4

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.25H^*$. На рисунке:

1 – дифференциальная восприимчивость X_d , 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M_1' (формула 2.9), 3 – $M_1'(H, h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^* , а X_c , X_d и $M_1'(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

3. Восстановление средней дифференциальной восприимчивости поликристаллического высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях

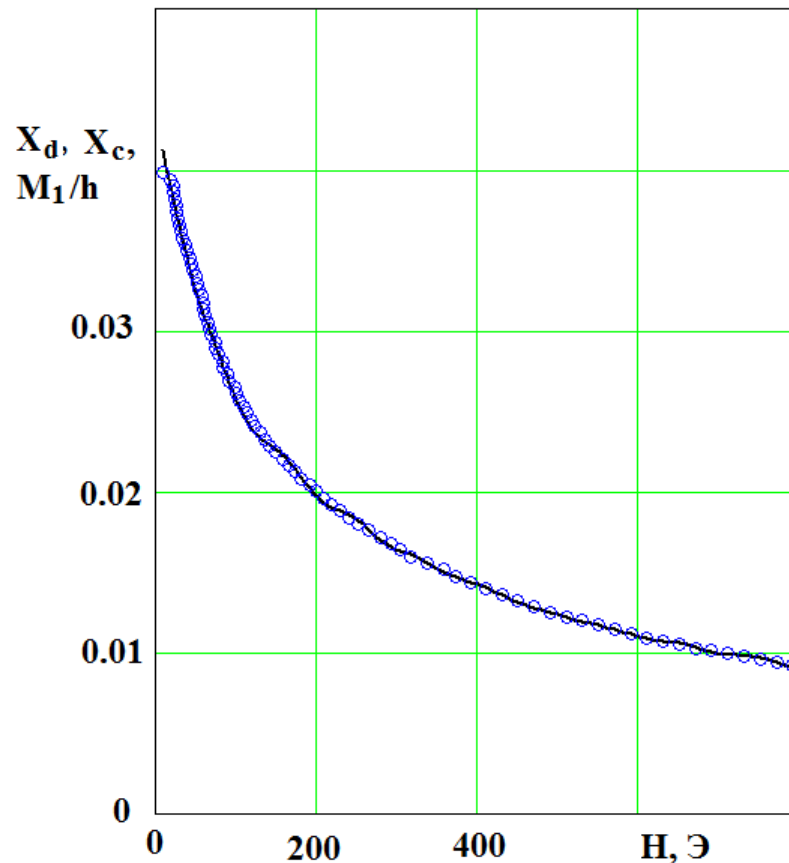
Измерения первой гармоники намагниченности поликристаллического ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ проводились с помощью «2-х катушечного» метода описанного во введении и более подробно в работах [2], [3] при температуре жидкого азота $T \approx 77K$. Внешнее магнитное поле создавалось двумя соленоидами для создания постоянного поля напряженностью H_0 и переменного поля напряженностью $h \cdot \cos(\omega t)$. Две приемные встречно направленные катушки находились внутри вышеуказанных соленоидов соосно. В одной из приемных катушек находился исследуемый образец ВТСП. Следуя формулам (1.1) и (2.1) получим для амплитуды синфазной составляющей первой гармоники ЭДС ε_1' измеряемой селективным вольтметром следующее выражение:

$$\varepsilon_1' = \mu_0 N S \omega M_1'(H_0, h) \quad (3.1)$$

Здесь $N = 500$ витков, $S \approx 3 \text{ см}^2$ и $\omega \approx 3400 \text{ с}^{-1}$. Введем коэффициент пропорциональности $k = 1/(\mu_0 SN\omega) \approx 1556 \text{ А}/(\text{м} \cdot \text{В})$. Таким образом, получаем, что первая гармоника намагниченности приблизительно равна:

$$M'_1 \approx 1556 \cdot \varepsilon'_1 (\text{А}/\text{м}) \quad (3.2)$$

Результаты математического моделирования приведены на рисунке 3.1. Из рисунка видно, что экспериментальные данные (кружки) и результаты восстановления (сплошная кривая) хорошо согласуются между собой.



Р и с у н о к 3.1

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости поликристаллического дискообразного ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ находящегося в критическом состоянии при температуре жидкого азота. Амплитуда модуляции составляла $h = 40 \text{ Э}$ (3184 А/м). Здесь кружками обозначены экспериментальные данные действительной части первой гармоники намагниченности нормированной на амплитуду модуляции h и сплошная кривая показывает результаты восстановления на основе уравнения (2.7).

4. Заключение

Таким образом, развитая методика на основе проведенного в работе математического моделирования с помощью неоднородного дифференциального уравнения (2.7) позволяет восстанавливать дифференциальную восприимчивость сверхпроводников. В работе также показано, что на основе выражений (2.3) и (2.4) можно построить неоднородные

дифференциальные уравнения более высоких порядков и увеличить точность восстановления. Рассмотренный метод восстановления можно применять для исследования нелинейных вольтамперных характеристик полупроводниковых структур и сверхпроводников, а также для исследования поляризации сегнетоэлектриков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Д. Кузьмичев, “Поведение намагниченности поликристаллических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях”, *ЖТФ*, **17**:7 (1991), 56–60.
2. Н. Д. Кузьмичев, “Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников”, *ЖТФ*, **64**:12 (1994), 63–74.
3. А. И. Головашкин, Н. Д. Кузьмичев, И. С. Левченко, Г. П. Мотулевич, “Нелинейные свойства магнитной восприимчивости керамик $Y-Ba-Cu-O$ в сверхпроводящем состоянии на низких частотах”, *ФТТ*, **31**:4 (1989), 233–235.
4. Н. Д. Кузьмичев, “Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции”, *ЖТФ*, **20**:22 (1994), 39–43.
5. Н. Д. Кузьмичев, “Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных”, *ЖТФ*, **37**:7 (1996), 124–127.
6. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Д. А. Шилкин, “Экспериментальное определение производной вольтамперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа”, *ФТП*, **50**:6 (2016), 830–833.
7. Н. Д. Кузьмичев, “Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 70–80.
8. В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников, *Численные методы*, Физматлит, М., 2006, 399 с.
9. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, **2**, Наука, М., 1974, 656 с.

Поступила 31.06.2018

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

Differential equations for recovery of the average differential susceptibility of superconductors from measurements of the first harmonic of magnetization

© N. D. Kuzmichev¹, M. A. Vasyutin², A. Yu. Shitov³, I. V. Buryanov⁴

Abstract. In the paper, inhomogeneous differential equations are obtained to reconstruct the average differential susceptibility of type-II superconductors from the in-phase (real) component of the magnetization's first harmonic in the hysteresis case. Basing on the second-order differential equation, mathematical modeling of the average differential susceptibility for the theoretical and experimental dependence of the real part of the magnetization's first harmonic is performed. The Cauchy problem was solved numerically by the Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy. To do this, the differential equation for the restoration of the average susceptibility was reduced to a system of differential equations. On the basis of the method developed in the work, the average differential susceptibility of a disc-shaped polycrystalline superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ was reconstructed from the experimentally obtained first harmonic of magnetization in interval of magnetic fields from 0 to 800 Oe.

Key Words: inhomogeneous differential equation, Cauchy problem, Runge-Kutta method, magnetization, average differential susceptibility, high-temperature superconductor, real parts of the first harmonic of magnetization, imaginary parts of the first harmonic of magnetization.

REFERENCES

1. N. D. Kuzmichev, "[Behavior of the magnetization of polycrystalline samples of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ in weak magnetic fields]", *JTF Publ.*, **17**:7 (1991), 56–60 (In Russ.).
2. N. D. Kuzmichev, "[Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: Analysis of the spectrum of harmonics of magnetization by the example of high-temperature superconductors]", *JTF Publ.*, **64**:12 (1994), 63–74 (In Russ.).
3. A. I. Golovashkin, N. D. Kuzmichev, I. C. Levchenko, G. P. Motulevich, V. V. Slavkin, "[Nonlinear properties of the magnetic susceptibility of Y-Ba-Cu-O ceramics in the superconducting state at low frequencies]", *FTT Publ.*, **31**:4 (1989), 233–235 (In Russ.).
4. N. D. Kuzmichev, "[Modulation technique for reconstructing the original dependencies and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes.]", *JTF Publ.*, **20**:22 (1994), 39–43 (In Russ.).
5. N. D. Kuzmichev, "[Estimates of errors of modulation recovery of the response function and its derivatives]", *JTF Publ.*, **37**:7 (1996), 124–127 (In Russ.).

¹ **Nikolay D. Kuzmichev**, Professor, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

² **Mikhael A. Vasyutin**, Docent, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

³ **Almir Yu. Shitov**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, shishkin92@mail.ru

⁴ **Igor V. Buryanov**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, i.v.buryanov@gmail.com

6. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “[Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure by means of the Fourier modulation analysis]”, *FTP Publ.*, **50:6** (2016), 830–833 (In Russ.).
7. N. D. Kuzmichev, “[Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the studied dependence]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13:2** (2011), 70–80 (In Russ.).
8. V. F. Formalev, D. L. Reviznikov, [*Numerical methods*], Fizmatlit, M., 2006 (In Russ.), 399 p.
9. V. I. Smirnov, [*The course of higher mathematics*], **2**, Nauka, M., 1974 (In Russ.), 656 p.

Submitted 31.06.2018