DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.304-317

УДК 517.9

Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

© **П. А. Шаманаев**[1], **О. С. Язовцева**[2]

Аннотация. В статье получены достаточные условия полиустойчивости по части переменных для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью. Доказательство полученных теорем основано на установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру. Для этого в банаховом пространстве строится оператор, связывающий решения нелинейной системы и ее линейного приближения. Данный оператор удовлетворяет условиям принципа Шаудера, следовательно, он имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Далее с использованием оценок ненулевых элементов фундаментальной матрицы получены условия, обеспечивающие переход свойств полиустойчивости тривиального решения системы линейного приближения на решения нелинейной системы, локально покомпонентно асимптотически эквивалентной своему линейному приближению. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных достаточных условий к исследованию полиустойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе в критическом случае, а также при наличии положительных собственных значений.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру, принцип Шаудера о неподвижной точке, устойчивость по части переменных, полиустойчивость.

1. Введение

В работе А. М. Ляпунова [1] было отмечено, что «можно рассматривать более общую задачу: об устойчивости того же движения, но по отношению не ко всем, а только к некоторым из определяющих его величин».

Позже, в 1938 г., к вопросу переноса теорем об устойчивости системы по всем переменным на случай части фазовых координат вернулся И. Г. Малкин [2]. Он указал (без доказательства) такие условия переноса.

В работе В. В. Румянцева [3] было проведено систематическое исследование задачи для конечномерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью на основе прямого метода Ляпунова, изложены основные определения и положения теории частичной устойчивости, доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных, приведены примеры практического применения этой теории к задачам механики.

[1] **Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[2] **Язовцева Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

Далее теория устойчивости по части переменных получила развитие в работах [4]-[9]. Частичная устойчивость в критическом случае рассмотрена в работах [10]-[12].

Работы [13]–[14] посвящены исследованию частичной устойчивости положений равновесия нелинейных систем на основе покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В работах [15]–[16] предложено развитие идей Е. В. Воскресенского о покомпонентной асимптотической эквивалентности в предположении, что между начальными точками исследуемых систем устанавливается соответствие только в окрестности нулевого положения равновесия; введено определение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, получены достаточные условия асимптотической устойчивости и устойчивости нулевых решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в форме векторных полиномов, в том числе в критическом случае.

В работе [17] введены определения полиустойчивости и полиустойчивости по отношению к части переменных, получены достаточные условия полиустойчивости нулевого решения на основании метода функций Ляпунова.

В настоящей работе представлены достаточные условия полиустойчивости по отношению к части переменных в смысле работы [17] нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью.

2. Основные определения и положения

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n), T \geq 0, f(t,0) \equiv 0.$

Будем считать, что у системы вида (2.1) из множества Ξ существует совокупность решений $x(t:t_0,x^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t:t_0,x^{(0)})$ и $y(t:t_0,y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0,x^{(0)})$ и $(t_0,y^{(0)})$ соответственно системы (2.1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \tag{2.2}$$

принадлежащей множеству Ξ.

Приведем определение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем из множества Ξ, развивающее идеи Е. В. Воскресенского из работ [13], [14].

Определение 2.1 [15] *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, если при фиксированном $t_0 \geq T$ существуют два отображения $P^{(1)}: V \to U$ и $P^{(2)}: U \to V$ такие, что для всех $i \in M_0$*

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,P^{(2)}x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{2.3}$$

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)) \tag{2.4}$$

при $t \to \infty$. Здесь $x_i(t:t_0,x^{(0)})$, $y_i(t:t_0,y^{(0)})$ — i-ые компоненты решений, для которых $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, U, $V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля, $\mu_i \in C([T,+\infty),[0,+\infty))$.

О п р е д е л е н и е 2.2 [15] *Будем говорить, что система* (2.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по переменным* x_i, $i \in M_0$, *если каждая компонента* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *любого решения* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (2.1) *обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty. \tag{2.5}$$

И наоборот, для любого набора чисел b_i, $i \in M_0$, *таких, что* $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, *существует решение* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (2.1) *для компонент* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *которого справедливы равенства* (2.5).

В работах [13]–[14] показано, что из покомпонентной асимптотической эквивалентности систем по Брауеру вообще говоря не следует сохранение свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения. Это верно и для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауеру.

Одним из условий сохранения свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения является требование равномерности $o(\mu_i(t))$ по начальным точкам $x^{(0)}$, $y^{(0)}$.

В работах [15]–[16] приведены условия, при выполнении которых для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем свойства полиустойчивости по части переменных сохраняются. Запишем эти условия в следующей форме.

Т е о р е м а 2.1 *Пусть*

1) справедливы равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t : t_0, x^{(0)}), \tag{2.6}$$

$$y_i(t : t_0, x^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t : t_0, y^{(0)}), \tag{2.7}$$

где $i \in M_0$, $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ *и* $\gamma_i(t : t_0, y^{(0)})$ *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно;*

2) $P^{(1)}(0) = 0$, $P^{(2)}(0) = 0$, *причем отображения* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *являются непрерывными в соответствующих областях определения.*

Тогда если у одной системы существует нулевое решение, устойчивое (асимптотически устойчивое) по i*-ым переменным,* $i \in M_0$, *и* $\mu_i(t)$ *– ограниченная (убывающая) функция при всех* $t \geq T$, *то вторая система имеет так же устойчивое (асимптотически устойчивое) по* i*-ым переменным нулевое решение,* $i \in M_0$*; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по* i*-ым переменным,* $i \in M_0$, *и* $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_i(t) = d_i, d_i \in R^1$, *то этим же свойством будут обладать и решения второй системы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у системы (2.2) существует нулевое решение устойчивое по переменным y_i, $i \in M_0$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$ такое, что из $||y^{(0)}|| < \delta_0$ следует

$$|y_i(t : t_0, y^{(0)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0. \tag{2.8}$$

Сопоставим начальным значениям $y^{(0)} \in V$ решений системы (2.2) начальные значения $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$ соответствующих решений системы (2.1). Тогда, учитывая условие 2) для отображения $P^{(1)}$, получим, что существует достаточно малое $\delta_1 > 0$ такое, что

$$||x^{(0)}|| = ||P^{(1)}y^{(0)}|| < \delta_1. \tag{2.9}$$

Поскольку $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$ и $\mu_i(t)$ – ограниченная функция при всех $t \geq T$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $||x^{(0)}|| < \delta_2$ будет выполняться

$$\mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0.$$

Тогда, оценивая равенство (2.6), получим:

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq |y_i(t : t_0, y^{(0)})| + \mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0. \tag{2.10}$$

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, заключим, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать δ такое, что из $||x^{(0)}|| < \delta$ следует справедливость (2.10), что и доказывает устойчивость по переменным $x_i,\ i \in M_0$ нулевого решения системы (2.1).

Учитывая оценку (2.10), из асимптотической устойчивости по переменным $y_i,\ i \in M_0$, нулевого решения системы (2.2) следует асимптотическая устойчивость по переменным $x_i,\ i \in M_0$, нулевого решения системы (2.1).

Пусть теперь решения системы (2.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{t\to+\infty} y_i(t : t_0, y^{(0)}) = b_i,\ b_i \in R^1, i \in M_0, \tag{2.11}$$

из (2.6) следует

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i, \quad b_i \in R^1, \quad i \in M_0.$$

Покажем теперь, что для любых чисел $b_i,\ i \in M_0$, таких, что $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (2.2) такое, что справедливо равенство (2.5).

Действительно, так как решения системы (2.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$, то для фиксированных чисел $b_i,\ i \in M_0$, таких что $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существуют компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (2.2) такие, что справедливы пределы (2.11). Тогда, переходя к пределу в равенствах (2.6) получим (2.5). Следовательно, система (2.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменным $x_i,\ i \in M_0$.

Аналогично доказывается, что при выполнении (2.7) из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения системы (2.1) по переменным x_i следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения системы (2.2) по переменным y_i; кроме того, из локального асимптотического равновесия по переменным $x_i,\ i \in M_0$, системы (2.1) следует локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$, системы (2.2).

Доказательство закончено.

3. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \tag{3.1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица; $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$; $f(0) \equiv 0$; $f(x) = colon(f_1(x), ..., f_n(x))$;

$$|f_j(x_1, ..., x_n)| \leq \psi_j(|x_1|, ..., |x_n|), \quad \forall\, x \in V \subseteq R^n,\ j = \overline{1, n}, \tag{3.2}$$

где $\psi_j \in C(R^n, R^n)$; $\psi_j(a_1, ..., a_n) \leq \psi_j(b_1, ..., b_n)$; $a_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть собственные значения λ_i $(i = \overline{1, n})$ матрицы A линейного приближения

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{3.3}$$

системы (3.1) имеют следующие вещественные части:

$$Re\ \lambda_1 = ... = Re\ \lambda_{l_1} = \Lambda_1,\ \ldots,\ Re\ \lambda_{l_{r-1}+1} = ... = Re\ \lambda_n = \Lambda_r,$$

где числа l_i, $i = \overline{1, r}$ образуют r непересекающихся множеств

$$N_1 = \{1, 2, \ldots, l_1\},\ N_2 = \{l_1 + 1, \ldots, l_2\},\ \ldots,\ N_r = \{l_{r-1} + 1, \ldots,\ l_r = n\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_r. \tag{3.4}$$

Заметим, что одно из чисел в неравенстве (3.4) может принимать нулевое значение.

Представим фундаментальную матрицу системы (3.3) в виде

$$Y(t - t_0) = [y^{(1)}(t - t_0), y^{(2)}(t - t_0), ..., y^{(n)}(t - t_0)],$$

где $y^{(j)}(t - t_0)$ – вектор-функции размерности n, представляющие собой линейно независимые решения системы (3.3), такие, что при $j \in N_k, k = \overline{1, r}$ справедливы неравенства [18]:

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \leq D_0 e^{(\Lambda_k + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \tag{3.5}$$

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \leq D_0 e^{(\Lambda_k - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \leq t_0, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon \geq 0$ – достаточно малое вещественное число. Заметим, что если алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения с вещественной частью Λ_k совпадают, то можно положить $\varepsilon = 0$.

Введем множества $K = \{(i, j) : i, j = \overline{1, n}\}$, $K_0 = \{(i, j) : y_{ij}(t - t_0) \equiv 0, \forall\, t, t_0 \geq T\}$.

Рассмотрим i-ую строку фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$. Учитывая (3.5) и (3.6), получим оценки для элементов i-й строки фундаментальной матрицы

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (i, j) \in K \backslash K_0, \tag{3.7}$$

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq D_0 e^{(\alpha_i - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad (i, j) \in K \backslash K_0, \tag{3.8}$$

где при фиксированном i в качестве β_i и α_i выбираются соответсвенно максимальное и минимальное из Λ_k в оценках (3.5) и (3.6), когда j пробегает по всем столбцам фундаментальной матрицы, содержащей ненулевые элементы $y_{ij}(t - t_0)$.

Сформулируем достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы (3.1).

Т е о р е м а 3.1 *Пусть интегралы*

$$I_{ij} = \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha_i + \varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1 + \varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2 + \varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n + \varepsilon)s}) ds, \quad (i, j) \in K \backslash K_0 \tag{3.9}$$

сходятся равномерно относительно c_i, $i = \overline{1, n}$, $c = (c_1, ..., c_n) \in D$. *Тогда системы* (3.1) *и* (3.3) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по*

Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}$, $i \in N$, *и нулевое решение системы* (3.1)

1) асимптотически устойчиво по тем переменным x_i, *для которых* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по тем переменным x_i, *для которых* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (3.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.*

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \leq c_i e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)},\ t \geq t_0,\ \varepsilon > 0,\ c_i \in R^1_+,\ i = \overline{1,n}\},$$

с нормой

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t \geq t_0} \left\{ |\varphi_i(t)| e^{-(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \right\}. \tag{3.10}$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s) f(\varphi(s)) ds, \tag{3.11}$$

где $y(t) = Y(t-t_0) y^{(0)}$.

Для компонент решения системы (3.3) воспользуемся оценками из работ [16], [18]

$$|y_i(t)| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(t-t_0)|\, |y_j^{(0)}| \leq D_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} ||y^{(0)}||, \quad t \geq t_0,\ i = \overline{1,n}.$$

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \leq c_0,\ c_0 \in R^1_+\}$.

Пусть $||\varphi||_\Omega \leq c_0$. Получим оценку для i-ой компоненты $(i \in N)$ оператора L при всех $t \geq t_0$

$$|(L\varphi)_i| \leq e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \left[D_0 ||y^{(0)}|| + D_0 \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1+\varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2+\varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n+\varepsilon)s}) ds \right].$$

Учитывая условие (3.8) и равномерную сходимость интегралов (3.9) по c_i, подберем t_0 такое, что при всех $t \geq t_0$

$$D \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1+\varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2+\varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n+\varepsilon)s}) ds \leq \theta < 1, \tag{3.12}$$

где $\theta = \theta(c_1, ..., c_n)$.

Зафиксируем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \leq \frac{1-\theta}{D_0} c_0. \tag{3.13}$$

Тогда из неравенств (3.12) -(3.13) получим

$$||L\varphi|| \leq c_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \leq c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L:\Omega_0\to\Omega_0$.

Аналогично работе [16] показывается, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0, и следовательно, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [19] о существовании неподвижной точки для уравнения

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi\in\Omega_0, \tag{3.14}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

Учитывая (3.11), запишем уравнение (3.14) в следующем виде:

$$\varphi(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)f(\varphi(s))ds. \tag{3.15}$$

Оператор L построен таким образом, что если в качестве $\varphi(t)$ в уравнении (3.15) взять решение $x(t:t_0,x^{(0)})$ системы (3.1) с начальными данными $x^{(0)}$, удовлетворяющими соотношению

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{\infty} Y(t_0-s)f(x(s:t_0,x^{(0)}))ds, \tag{3.16}$$

то $y(t)$ в уравнении (3.15) будет решением системы (3.3) с начальными данными $y^{(0)}$, вычисляемом так же по формуле (3.16). Справедливо и обратное: если $y(t)$ является решением системы (3.3), то $x(t)$ будет решением системы (3.1), причем их начальные данные будут связаны соотношением (3.16).

Существование отображения (3.16) следует из уравнения (3.15).

Следовательно, в качестве отображения $P^{(2)}$ можно взять

$$P^{(2)}x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0-s)f(x(s:t_0,x^{(0)}))ds. \tag{3.17}$$

Существование отображения $P^{(1)}$ такого, что $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$ доказывается аналогично работе [13].

Покомпонентая запись уравнения (3.15) имеет вид

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)f_j(x(s:t_0,x^{(0)}))ds,\ i=\overline{1,n}. \tag{3.18}$$

Из (3.12) и (3.15) получим

$$|x_i(t:t_0,x^{(0)}) - y_i(t:t_0,y^{(0)})| \le \theta e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t\le t_0, \tag{3.19}$$

где $i\in N$ и справедливо $y^{(0)} = P^{(2)}x^{(0)}$.

Тогда, согласно определению 1.1 из работы [16] системы (3.1) и (3.3) являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}, i\in N$.

Покажем справедливость соотношений (2.6) и (2.7). Сопоставляя равенства (2.6) и соотношение (3.18), получим

$$\mu_i(t)\delta_i(t:t_0,x^{(0)}) = -\sum_{j=1}^{n}\int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)f_j(x(s:t_0,x^{(0)}))ds. \tag{3.20}$$

Далее, учитывая оценки (3.19) и равномерную сходимость интегралов (3.9) по c_i ($i = \overline{1,n}$), заключим, что $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$.

Аналогично сопоставляя равенства (2.7) и соотношение (3.18), получим

$$\mu_i(t)\gamma_i(t : t_0, y^{(0)}) = -\sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(x(s : t_0, P^{(1)}y^{(0)}))ds, \tag{3.21}$$

и, следовательно, $\gamma_i(t : t_0, y^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $y^{(0)}$.

Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво по переменным x_i, $i \in N$, для которых $\beta_i < 0$; устойчиво по переменным x_i, $i \in N$, для которых $\beta_i = 0$ и алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, причем нулевое решение системы (3.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.

Доказательство закончено.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение полученных достаточных условий к исследованию устойчивости по части переменных положений равновесия нелинейных систем.

Пример 3.1 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -\dfrac{x^2 y}{1+z^2} \\ \dot{z} = z \end{cases}, \tag{3.22}$$

где x, y, z $\in R$ ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы по части переменных.

Собственными значениями матрицы линейного приближения системы (3.22) являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Фундаментальная матрица линейного приближения системы (3.22) имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 3.1 докажем равномерную сходимость интегралов (3.9). Используя оценки (3.7) и (3.8), из вида фундаментальной матрицы вычислим $\alpha = 0$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x,y,z) \equiv 0, \quad f_2(x,y,z) = -\frac{x^2 y}{1+z^2}, \quad f_3(x,y,z) \equiv 0.$$

из оценок (3.2) находим

$$\psi_1(u,v,w) = 0, \quad \psi_2(u,v,w) = -\frac{u^2 v}{1+w^2}, \quad \psi_3(u,v,w) = 0.$$

где $u = |x|$, $v = |y|$, $w = |z|$.

Из вида фундаментальной матрицы следует, что

$$K\backslash K_0 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Тогда несобственные интегралы (3.9) примут вид:

$$I_{11} = 0, \quad I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 e^{-s} ds}{1 + c_2^2 e^{2s}}, \quad I_{33} = 0.$$

Из равномерной сходимости интегралов I_{11}, I_{22}, I_{33} относительно c_i, $i = \overline{1,3}$, на основании теоремы 3.1 можно сделать вывод, что нулевое положение равновесия системы (3.22) асимптотически устойчиво по переменной x, устойчиво по переменной y. Кроме того, по переменной y оно имеет локальное асимптотическое равновесие.

Пример 3.2 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(x+1)(2z^2+z+8)}{z^2+3}, \\ \dot{y} = \dfrac{(x+1)^2(z+2)}{z^2+3}, \\ \dot{z} = -\dfrac{(z+2)(xy-z^2-3x+y-6)}{z^2+3}, \end{cases} \tag{3.23}$$

где $x, y, z \in R$ ставится задача об исследовании устойчивости положений равновесия системы по части переменных.

Положения равновесия системы (3.23) в пространстве R^3 образуют множество точек с координатами $(-1, c, -2)^T$, где $c \in R$.

Заменой

$$x = x_1 - 1, y = x_2 + c, z = x_3 - 2 \tag{3.24}$$

перейдем к исследованию нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2x_1 - \dfrac{x_1 x_3}{(x_3-2)^2+3}, \\ \dot{x_2} = \dfrac{{x_1}^2 x_3}{(x_3-2)^2+3}, \\ \dot{x_3} = x_3 - \dfrac{x_1(x_2+c-3)\,x_3}{(x_3-2)^2+3}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Линейным приближением для системы (3.25) будет система

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -2y_1, \\ \dot{y_2} = 0, \\ \dot{y_3} = y_3. \end{cases} .$$

Собственные значения матрицы в линейной части системы (3.25) равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, и, следовательно, фундаментальная матрица системы линейного приближения примет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Проверим условия выполнения теоремы 3.1 Для этого, используя оценки (3.7) и (3.8), вычислим $\alpha = \beta_1 = -2$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{{x_1}^2 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 \,(x_2 + c - 3)\, x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3},$$

из оценок (3.2) найдем

$$\psi_1(u, v, w) = \frac{uw}{(w - 2)^2 + 3},$$

$$\psi_2(u, v, w) = \frac{u^2 w}{(w - 2)^2 + 3},$$

$$\psi_3(u, v, w) = \frac{u\,(v + c - 3)\, w}{(w - 2)^2 + 3},$$

где $u = |x_1|$, $v = |x_2|$, $w = |x_3|$.

Определим множество $K \backslash K_0$ из вида фундаментальной матрицы:

$$K \backslash K_0 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}.$$

Тогда интегралы (3.9) примут вид:

$$I_{11} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1 e^{-2s} c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds,$$

$$I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1^2 e^{-4s} c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1^2 c_3 e^{-s}}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds,$$

$$I_{33} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1 e^{-2s} (c_2 - 3) c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 (c_2 - 3) c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds.$$

Поскольку интегралы I_{11}, I_{22}, I_{33} сходятся равномерно относительно c_i, $i = \overline{1,3}$, таких что $(c_1, c_2, c_3)^T$ принадлежит достаточно малой окрестности нуля, то условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда с учетом замены (3.24) каждое из положений равновесия $(-1, c, -2)^T$, $c \in R$ системы (3.23) является асимптотически устойчивым по переменной x и имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной y.

Список литературы

1. А. М. Ляпунов, *Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения*, Собр. соч., **2**, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1956, 272–331.

2. И. Г. Малкин, "Об устойчивости движения в смысле Ляпунова", *Мат. сб.*, **3**:1 (1949), 63–100.

3. В. В. Румянцев, “Об устойчивости движения по отношению к части переменных”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим.*, 1957, 9–16.

4. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.

5. В. И. Воротников, *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 271 с.

6. В. И. Воротников, “Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности”, *Автомат. и телемех.*, **3**:1 (1993), 3–62.

7. K. Peiffer, N. Rouche, “Liapounov’s second method applied to partial stability”, *J. Mecanique*, **8**:2 (1969), 323–334.

8. P. Fergola, V. Moauro, “On partial stability”, *Ricerche Mat.*, **19**:2 (1970), 185–207.

9. C. Corduneanu, “Some problems concerning partial stability”, *Meccanica Non-lineare Stability*, **6** (1971), 141–154.

10. В. Н. Щенников, “Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями”, *Дифференц. уравнения*, **20**:9 (1984), 1645–1649.

11. В. Н. Щенников, “О частичной устойчивости в критическом случае 2k чисто мнимых корней”, *Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики*, 1985, 46–50.

12. В. П. Прокопьев, “Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня”, *ПММ*, **39**:3 (1975), 422–426.

13. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

14. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та, Саранск, 1990, 224 с.

15. О. С. Язовцева, “Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных”, *Огарёв-online*, **13** (2017), Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

16. П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева, “Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:1 (2017), 102–115. DOI: 10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115.

17. А. Б. Аминов, Т. К. Сиразетдинов, “Метод функций Ляпунова в задачах полиустойчивости движения”, *Прикладная математика и механика*, **51**:5 (1987), 709–716.

18. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.

19. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 249 с.

Поступила 15.06.2018

MSC2010 34C20

The sufficient conditions for polystability of solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations

© **P. A. Shamanaev**[1] **O. S. Yazovtseva**[2]

Abstract. The article states the sufficient polystability conditions for part of variables for nonlinear systems of ordinary differential equations with a sufficiently smooth right-hand side. The obtained theorem proof is based on the establishment of a local componentwise Brauer asymptotic equivalence. An operator in the Banach space that connects the solutions of the nonlinear system and its linear approximation is constructed. This operator satisfies the conditions of the Schauder principle, therefore, it has at least one fixed point. Further, using the estimates of the non-zero elements of the fundamental matrix, conditions that ensure the transition of the properties of polystability are obtained, if the trivial solution of the linear approximation system to solutions of a nonlinear system that is locally componentwise asymptotically equivalent to its linear approximation. There are given examples, that illustrate the application of proven sufficient conditions to the study of polystability of zero solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations, including in the critical case, and also in the presence of positive eigenvalues.
Key Words: nonlinear ordinary differential equations, local componentwise Brauer asymptotic equivalence, the Shauder principle for a fixed point, stability with respect to a part of variables.

References

1. A. M. Lyapunov, *The investigation of one special cases of the problem of motion stability*, Sobr. soch., **2**, Izd-vo AN SSSR, M.-L., 1956, 272–331.
2. I. G. Malkin, "[On the stability of motion in the sense of Lyapunov]", *Mat. sb.*, **3**:1 (1949), 63–100 (In Russ.).
3. V. V. Rumyantsev, "[On motion stability with respect to a part of variables]", *Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat., Phiz., Astron., Khim.*, 1957, 9–16 (In Russ.).
4. V. V. Rumyantsev, *[Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.
5. V. I. Vorotnikov, *[Stability of dynamical systems with respect to a part of variables]*, Nauka Publ, Moscow, 1991 (In Russ.), 271 p.
6. V. I. Vorotnikov, "[Problems and methods of investigation of stability and stabilization with respect to a part of the variables: research directions, results, features]", *Avtomat. i telemekh.*, **3**:1 (1993), 3–62 (In Russ.).
7. K. Peiffer, N. Rouche, "Liapounov's second method applied to partial stability", *J. Mecanique*, **8**:2 (1969), 323–334.
8. P. Fergola, V. Moauro, "On partial stability", *Ricerche Mat.*, **19**:2 (1970), 185–207.

[1] **Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[2] **Olga S. Yazovtseva**, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

9. C. Corduneanu, “Some problems concerning partial stability”, *Meccanica Non-lineare Stability*, **6** (1971), 141–154.

10. V. N. Shchennikov, “Investigation of the stability with respect to part of the variables of differential systems with homogeneous right-hand sides”, *Differ. Uravn.*, **20**:9 (1984), 1645–1649 (In Russ.).

11. V. N. Shchennikov, “[On partial stability in the critical case of 2k pure imaginary roots]”, *Differentscialnye i integralnye uravneniya: metody topologicheskoy dinamiki*, 1985 (In Russ.).

12. V. P. Prokopyev, “[On stability with respect to some of the variables in the critical case of a single zero root.]”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39** (1975) (In Russ.).

13. E. V. Voskresenskiy, *[Asymptotic methods: theory and applications]*, SVMO Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.

14. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison methods in nonlinear analysys]*, Sarat. Univercity publ., Saransk, 1990 (In Russ.), 224 p.

15. O. S. Yazovtseva, “[The local component-wise asymptotic equivalence and its application to investigate for stability with respect to a part of variables]”, *Ogarev-online*, **13** (2017) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

16. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, “[The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19** (2017) (In Russ. DOI: 10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115).

17. A. B. Aminov, T. K. Sirazetdinov, “[The Lyapunov functions method in the problems of polystability of movements]”, *Appl. Maths. Mechs.*, **51**:5 (1987), 709–716 (In Russ.).

18. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *[The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

19. V. A. Trenogin, *[Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 249 p.

Submitted 15.06.2018