

УДК 517.925, 539.376

Об аналитическом решении одной задачи ползучести

© Е. Б. Кузнецов¹, С. С. Леонов²

Аннотация. В статье рассматривается аналитическое решение одной начальной задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей процесс разрушения металлических конструкций при неоднородном напряженно-деформированном состоянии в условиях ползучести. Подобные задачи возникают при расчете прочностных характеристик и оценке остаточных деформаций при проектировании ядерных реакторов, в строительной и аэрокосмической отраслях, машиностроении. Большое значение для практики имеет разрешимость используемой системы определяющих соотношений ползучести. Возможность получения точного аналитического решения позволяет значительно упростить как идентификацию характеристик ползучести, так и процесс исследования модели. С использованием теоремы Чебышева об интегрировании биномиального дифференциала получены необходимые и достаточные условия интегрируемости начальной задачи, накладываемые на параметры модели. Даны рекомендации по численному решению рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, длительная прочность, параметр поврежденности, биномиальный дифференциал, задача Коши, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Начиная со второй половины XX в. значительно возрос интерес к задачам определения деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций, работающих в условиях сложного напряженно-деформированного состояния при различных температурно-силовых воздействиях. Это связано с появлением новых задач в аэрокосмической отрасли (например расчет характеристик лопаток и дисков турбин авиационных двигателей), машиностроении, проектировании зданий и ядерных реакторов. Поэтому значительное место занимали и продолжают занимать исследования поведения металлов.

В большинстве случаев для исследования поведения металлов и других материалов (таких как бетон) в холодном состоянии достаточно учитывать только упругую и пластическую деформации. Однако при расчете конструкций, работающих при высоких температурах, необходим также учет ползучести материала.

Термином «ползучесть», согласно известной монографии Ю. Н. Работнова [1, с. 9], «будем называть всю совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время, явно или через посредство некоторых операторов». Более узкое определение дает Н. Н. Малинин: «напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну

¹ Кузнецов Евгений Борисович, профессор кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

² Леонов Сергей Сергеевич, доцент кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

сторону этого явления – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью или последствием, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией» [2, с. 241].

На рис. 1 приведены кривые, изображающие зависимости деформации от времени при различных напряжениях. На кривой $\varepsilon(t)$, соответствующей напряжению σ_2 , можно выделить три четко выраженных участка (стадии ползучести) [3, с. 20]:

- I – неустановившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести монотонно уменьшается до своего наименьшего значения,
- II – установившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести сохраняет постоянное наименьшее значение,
- III – участок ускоряющейся ползучести, предшествующий разрушению.

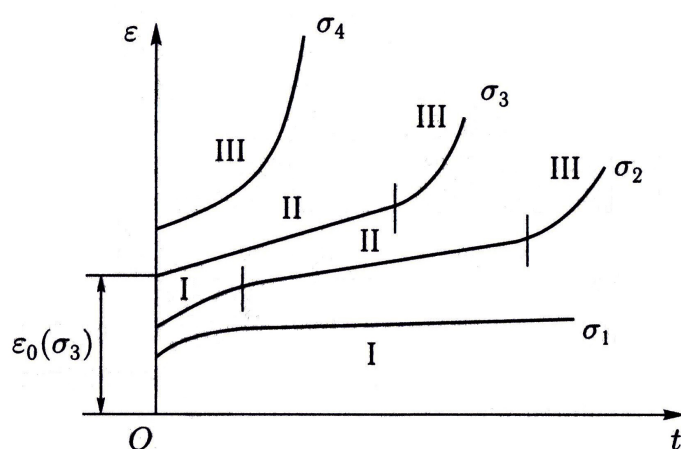


Рис. 1: Зависимости деформации ε от времени t

В предположении, что время нагружения до заданного значения напряжения мало по сравнению с длительностью испытания, кривые $\varepsilon(t)$ начинаются со значения деформации ε_0 , соответствующего мгновенному нагружению. Мгновенная деформация складывается из упругой ε^e и пластической ε^p составляющих. Разность между полной и мгновенной деформацией есть деформация ползучести ε^c (в дальнейшем верхний индекс c при обозначении деформации ползучести будет опускаться) [3, с. 19–20].

В зависимости от величины напряжения, на кривой $\varepsilon(t)$ могут отсутствовать некоторые стадии ползучести как это показано на рис. 1.

Довольно сложной задачей при расчете элементов конструкций на ползучесть и длительную прочность является выбор определяющих соотношений ползучести или критерия длительной прочности. В обзорах А. М. Локощенко [4]–[6] приведено множество определяющих соотношений и критериев длительной прочности для одномерных, плоских и пространственных задач ползучести. При описании прикладных задач большое значение имеет интегрируемость определяющих соотношений. Наличие аналитического решения значительно облегчает исследование рассматриваемой задачи, а также идентификацию характеристик ползучести (материальных констант, входящих в определяющие соотношения). Но в большинстве случаев определяющие соотношения ползучести являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и проинтегрировать их удастся лишь в частных случаях.

В данной статье для одного класса определяющих соотношений ползучести, описывающих одномерный процесс ползучести металлических конструкций при чистом растяжении с постоянной нагрузкой, даны необходимые и достаточные условия интегрируемости, в зависимости от значений материальных констант. Прежде чем переходить к постановке задачи и формулировке результатов, подробнее остановимся на используемых определяющих соотношениях ползучести.

2. Определяющие соотношения ползучести

Впервые ползучесть наблюдалась еще в начале XIX века в экспериментах К. Л. М. А. Навье (1826), Г. Г. Кориолиса (1830) и Л. Ж. Вика (1834). Но систематические исследования ползучести металлов начались только в 40-х годах прошлого века. В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов [7] и Ю. Н. Работнов [8] пришли к выводу, что использующихся в то время терминов механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций, вектор перемещений) недостаточно для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, названный кинетическим. Этот подход основан на использовании введенного параметра поврежденности ω . Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении параметр ω становится равным единице. Этот подход в дальнейшем был развит в монографии Ю. Н. Работнова [1] и получил название кинетической теории ползучести.

При использовании уравнений кинетической теории к расчету ползучести и длительной прочности конструкции задачи определения напряженно-деформированного состояния и длительной прочности совмещаются. Одним из наиболее распространенных подходов к моделированию процессов ползучести и разрушения металлических конструкций является использование уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [1, с. 363-364], которые в одномерном случае с одним скалярным параметром поврежденности можно записать в виде системы, состоящей из определяющего уравнения, связывающего деформацию ползучести ε с действующим напряжением σ , вида

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)} \quad (2.1)$$

и эволюционного уравнения, описывающего развитие поврежденности в конструкции, вида

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}. \quad (2.2)$$

Здесь t – время, T – температура, σ – в общем случае переменное действующее напряжение, функциональные зависимости, входящие в правые части уравнений (2.1) и (2.2), определяются по результатам эксперимента.

В случае постоянной температуры $T = \text{const}$, запишем уравнения (2.1) и (2.2) в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma)}{\Psi(\omega)}. \end{cases} \quad (2.3)$$

В качестве начальных условий для системы ОДУ (2.3) берутся однородные

$$\varepsilon(0) = 0, \quad \omega(0) = 0. \quad (2.4)$$

Искомые функциями в задаче (2.3)-(2.4) являются $\varepsilon(t)$ и $\omega(t)$, $\sigma(t, \varepsilon)$ – известная непрерывная функция времени и деформации ползучести, в частности постоянная величина. Решение задачи ищется в области $V = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$, где ε^* – значение деформации ползучести в момент разрушения, t^* – длительная прочность конструкции.

Отметим некоторые особенности системы (2.3). Рассматриваются процессы деформирования, для которых $\dot{\varepsilon} \geq 0$ и $\dot{\omega} \geq 0$, т. е. процессы деформирования и накопления повреждений в материале предполагаются монотонными. Функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ будем считать непрерывными, монотонными и положительными. Дополнительно будем полагать, что $f_1(\sigma) = \varphi(t) \cdot \psi_1(\varepsilon)$ и $f_2(\sigma) = \varphi(t) \cdot \psi_2(\varepsilon)$, где $\varphi(t)$, $\psi_1(\varepsilon)$ и $\psi_2(\varepsilon)$ являются положительными и непрерывными функциями своих аргументов. В качестве $\Psi(\omega)$ будем рассматривать неотрицательные функции, причем для неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, для которых стадия неустановившейся ползучести отсутствует, будем применять монотонно убывающие функции, такие что $\Psi(1) = 0$, а для упрочняющихся материалов немонотонные унимодальные функции, для которых $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(1) = 0$.

По аналогии со статьей [9] докажем, что при сделанных предположениях существует единственное решение задачи (2.3)-(2.4). Поделим первое уравнение системы (2.3) на второе и разделим переменные

$$\frac{\psi_2(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)} d\varepsilon = d\omega.$$

Интегрируя это соотношение, получим выражение для параметра поврежденности

$$\omega = \int_0^\varepsilon \frac{\psi_2(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)} d\varepsilon = H(\varepsilon). \quad (2.5)$$

Подставив выражение (2.5) в первое уравнение системы (2.3) и разделив переменные, получим соотношение

$$\frac{\Psi[H(\varepsilon)]}{\psi_1(\varepsilon)} d\varepsilon = \varphi(t) dt.$$

После его интегрирования, получим неявное выражение для деформации ползучести

$$\int_0^\varepsilon \frac{\Psi[H(\varepsilon)]}{\psi_1(\varepsilon)} d\varepsilon = \int_0^t \varphi(t) dt \quad \text{или} \quad G(\varepsilon) = \Phi(t).$$

Осталось показать, что существует обратная функция $G^{-1}(\tau)$. Отметим сначала, что производная $H'(\varepsilon) = \psi_2(\varepsilon)/\psi_1(\varepsilon) > 0$, т. е. между значениями деформации ползучести ε и параметра поврежденности ω существует взаимно однозначное соответствие. По теореме о неявной функции [10, с. 312] существует обратная функция $H^{-1}(\omega) = \varepsilon$. По аналогии можно получить и выражение для времени $t = \Phi^{-1}[G(\varepsilon)]$. Так как производная $G'(\varepsilon) = \Psi[H(\varepsilon)]/\psi_1(\varepsilon)$ положительна в открытой области $V_0 = \{(\varepsilon, \omega, t) \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon^*, 0 < \omega < 1, 0 < t < t^*\}$, то в ней существует обратная функция $G^{-1}(\tau)$. Учитывая, что начальный момент времени однозначно определяется начальными условиями, а момент разрушения значениями $\omega = 1$, $\varepsilon = \varepsilon^* = H^{-1}(1)$ и $t = t^* = \Phi^{-1}[G(\varepsilon^*)]$, можно продолжить обратную функцию $G^{-1}(\tau)$ на всю область V . Таким образом, выражение для деформации ползучести примет вид

$$\varepsilon = G^{-1}[\Phi(t)], \quad (2.6)$$

а длительная прочность конструкции вычисляется по формуле

$$t^* = \Phi^{-1} \{G [H^{-1}(1)]\}. \quad (2.7)$$

Решение задачи Коши (2.3)-(2.4) дается соотношениями (2.5)-(2.7). Но для получения аналитического решения нужно вычислить интегралы, входящие в них. Это удастся сделать не всегда, в особенности при громоздкой правой части системы (2.3). Проиллюстрируем процесс решения на задаче деформирования трубчатых образцов из нержавеющей стали X18H10T под действием постоянной одноосной растягивающей нагрузки при постоянной температуре в условиях ползучести вплоть до разрушения. Установим условия ее интегрируемости.

3. Постановка задачи растяжения образцов из стали X18H10T

Для описания растяжения образцов из нержавеющей стали X18H10T будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю.Н. Работнова вида (2.3), которые, в случае отсутствия упрочнения, запишем в форме [11]

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A \cdot \sigma^n}{(1 - \omega^r)^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B \cdot \sigma^n}{(1 - \omega^r)^n} \end{cases} \quad (3.1)$$

с начальными условиями (2.4). Здесь A , B , n , r – характеристики ползучести и разрушения конструкции. Из физического смысла задачи на характеристики ползучести накладываются ограничения

$$A > 0, B > 0, n > 0, r > 0. \quad (3.2)$$

Ограничимся также рассмотрением только таких физических процессов, для которых справедливо неравенство $A < B$.

При деформировании конструкции в условиях ползучести под действием постоянных нагрузок, введем гипотезу о равномерном распределении деформации по длине образца [11]. Тогда, в случае малых деформаций, выражение для напряжения примет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot (1 + \varepsilon(t)), \quad (3.3)$$

где σ_0 – начальное напряжение.

Учитывая соотношение (3.3), перейдем от системы (3.1) к

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{A \cdot \sigma_0^n \cdot (1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B \cdot \sigma_0^n \cdot (1 + \varepsilon)^n}{(1 - \omega^r)^n}. \end{cases} \quad (3.4)$$

При $\varphi(t) = \sigma_0^n = \text{const}$, $\psi_1(\varepsilon) = A \cdot (1 + \varepsilon)^n$, $\psi_2(\varepsilon) = B \cdot (1 + \varepsilon)^n$ и $\Psi(\omega) = (1 - \omega^r)^n$ задача (3.4), (2.4) совпадает по виду с задачей (2.3)-(2.4), а функции правых частей уравнений системы (2.3) удовлетворяют описанным выше требованиям. Это означает, что существует единственное решение задачи (3.4), (2.4) в рассматриваемой области, представимое в интегральном виде (2.5)-(2.7). Получим условия аналитического вычисления интегралов в соотношениях (2.5)-(2.7).

4. Аналитическое решение

Поделив первое уравнение системы (3.1) или (3.4) на второе можно получить связывающее деформацию ε и параметр ω соотношение

$$\varepsilon(t) = \frac{A}{B} \cdot \omega(t). \quad (4.1)$$

Но даже используя соотношение (4.1), аналитическое решение задачи (3.1), (2.4) или (3.4), (2.4) удастся получить далеко не при всех значениях параметров n и r . Уже при постоянном напряжении для задачи (3.1), (2.4) справедлива

Т е о р е м а 4.1 *Задача (3.1), (2.4) при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели n и r удовлетворяют одному из следующих условий*

1. n - натуральное число;
2. $1/r$ - натуральное число;
3. $1/r + n$ - натуральное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В известной работе П. Л. Чебышева по интегрированию иррациональных дифференциалов [12] даются необходимые и достаточные условия выражения интеграла от биномиального дифференциала

$$\int x^m (a + bx^k)^p dx \quad (4.2)$$

конечной комбинацией элементарных функций. Они состоят в следующем

1. p - целое число;
2. $\frac{m+1}{k}$ - целое число;
3. $\frac{m+1}{k} + p$ - целое число.

Учитывая выражение (4.1), решение задачи (3.1), (2.4) при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ сводится к интегрированию задачи Коши

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B \cdot \sigma_0^n}{(1 - \omega^r)^n}, \quad \omega(0) = 0,$$

решение которой, в свою очередь, сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{\omega} (1 - \omega^r)^n d\omega. \quad (4.3)$$

Для интеграла (4.3) $m = 0$, $p = n$, $k = r$, $a = 1$, $b = -1$. Из условий Чебышева и положительности параметров задачи, получим утверждение теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для задачи (3.4), (2.4) приходится накладывать более строгие ограничения на значения параметров n и r . Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.2 Задача (3.4), (2.4) интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели n и r удовлетворяют одному из следующих условий:

1. n - натуральное число;
2. r - натуральное число;
3. $1/r$ - натуральное число.

При этих условиях существует аналитическое решение задачи (3.4), (2.4) даваемое выражением (4.1)

$$\varepsilon(t) = (A/B) \cdot \omega(t)$$

и равномерно сходящимися функциональными рядами

- для натуральных r

$$t = \frac{1}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{(1 - \omega^r)^n}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha_k}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{\omega^{k \cdot r}}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega, \quad (4.4)$$

- для дробных r

$$t = \frac{1}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{(1 - \omega^r)^n}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\beta_k}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot (A/B)^k \cdot \int_0^\omega \omega^k \cdot (1 - \omega^r)^n d\omega. \quad (4.5)$$

Здесь $\alpha_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ и $\beta_k = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем второе уравнение системы (3.4)

$$\int_0^\omega \frac{(1 - \omega^r)^n}{(1 + \varepsilon)^n} d\omega = B \cdot \sigma_0^n \cdot t. \quad (4.6)$$

Рассмотрим случай натурального r .

Используя соотношение (4.1), заменим в интеграле, входящем в (4.6), ε на $(A/B) \cdot \omega$

$$\int_0^\omega \frac{(1 - \omega^r)^n}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega = B \cdot \sigma_0^n \cdot t. \quad (4.7)$$

Разложим числитель подынтегрального выражения (4.7) в ряд Маклорена [13, с. 138–141]

$$(1 - \omega^r)^n = 1 - n \cdot \omega^r + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \omega^{2r} + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k \cdot \omega^{k \cdot r} + \dots, \quad (4.8)$$

где $\alpha_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Тогда подынтегральное выражение, входящее в (4.7), примет вид

$$\frac{(1 - \omega^r)^n}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \alpha_k \cdot \frac{\omega^{k \cdot r}}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n}. \quad (4.9)$$

Учитывая, что $(A/B) \cdot \omega \geq 0$, для $\omega \in [0; 1]$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\left| \alpha_k \cdot \frac{\omega^{k \cdot r}}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} \right| \leq |\alpha_k|.$$

Константы, ограничивающие сверху члены функционального ряда в (4.9), являются членами биномиального ряда

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \alpha_k \cdot x^k + \dots$$

при $x = 1$. Для задачи (3.4), (2.4) рассматриваются только $n > 0$, а значит, числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

сходится абсолютно [14, с. 405–406]. Тогда и ряд, составленный из модулей

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k|,$$

будет сходиться. Таким образом, по признаку Вейерштрасса [13, с. 101–102] функциональный ряд в (4.9) будет сходиться равномерно на отрезке $\omega \in [0; 1]$.

Почленно интегрируя правую и левую часть равенства (4.9), запишем интеграл, входящий в соотношение (4.7), в виде

$$\int_0^{\omega} \frac{(1-\omega^r)^n}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \alpha_k \cdot \int_0^{\omega} \frac{\omega^{k \cdot r}}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} d\omega. \quad (4.10)$$

Для того, чтобы интеграл, стоящий слева в выражении (4.10), вычислялся аналитически необходимо и достаточно, чтобы все интегралы, стоящие справа, вычислялись аналитически. Применим к ним условия Чебышева. Тогда возможны три случая

1. n - натуральное число;
2. $k \cdot r + 1$ - натуральное число;
3. $k \cdot r + 1 - n$ - натуральное число.

При этом, последние два случая должны выполняться для любых $k = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что аналитическое вычисление интеграла при натуральных значениях r возможно при любых значениях n . При этих условиях существует решение в виде равномерно сходящегося на отрезке $\omega \in [0; 1]$ ряда вида (4.4).

Рассмотрим случай дробного r .

В этом случае функция $(1-\omega^r)^n$ не может быть разложена в ряд (4.8). Поступим другим образом. Разложим выражение $\frac{1}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n}$ в ряд Маклорена

$$\begin{aligned} \frac{1}{[1 + (A/B) \cdot \omega]^n} &= 1 - n \cdot (A/B) \cdot \omega + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot (A/B)^2 \cdot \omega^2 + \dots + \\ &+ (-1)^k \cdot \beta_k \cdot (A/B)^k \cdot \omega^k + \dots, \end{aligned}$$

где $\beta_k = \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}$.

Тогда подынтегральное выражение в (4.7) примет вид

$$\frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \beta_k \cdot (A/B)^k \cdot \omega^k \cdot (1-\omega^r)^n. \quad (4.11)$$

Поскольку $\omega \in [0; 1]$, то выражение $\omega^k \cdot (1-\omega^r)^n < 1$ для любых $k, n, r > 0$. Из этого следует следующая оценка членов функционального ряда (4.11)

$$\beta_k \cdot (A/B)^k \cdot \omega^k \cdot (1-\omega^r)^n < \beta_k \cdot (A/B)^k.$$

Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \cdot (A/B)^k \quad (4.12)$$

получается из степенного ряда

$$\frac{1}{[1-x]^n} = 1 + n \cdot x + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \beta_k \cdot x^k + \dots \quad (4.13)$$

при $x = A/B$. Ряд (4.13) сходится абсолютно при $x = A/B < 1$, а значит и ряд (4.12) сходится абсолютно. Таким образом, функциональный ряд (4.11) сходится равномерно на отрезке $\omega \in [0; 1]$ для любых значений r и n .

Почленно интегрируя правую и левую часть равенства (4.11), получим

$$\int_0^\omega \frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \beta_k \cdot (A/B)^k \cdot \int_0^\omega \omega^k \cdot (1-\omega^r)^n d\omega. \quad (4.14)$$

Для того, чтобы стоящий слева в (4.14) интеграл вычислялся аналитически, необходимо и достаточно, чтобы все интегралы, стоящие справа, вычислялись аналитически. По условиям Чебышева это возможно только в трех случаях

1. n - натуральное число;
2. $\frac{k+1}{r}$ - натуральное число;
3. $\frac{k+1}{r} + n$ - натуральное число.

Учитывая, что последние два случая должны выполняться для всех значений $k = 0, 1, 2, \dots$, интеграл (4.7) вычисляется аналитически только при натуральном n или $1/r$. При этих условиях существует решение в виде равномерно сходящегося на отрезке $\omega \in [0; 1]$ ряда вида (4.5).

Дополняя выражение (4.4) или (4.5) для t выражением (4.1) для ε - получим решение задачи (3.4), (2.4).

Получить аналитические зависимости деформации ползучести ε и времени t от параметра поврежденности ω как аргумента удастся только при указанных значениях параметров n и r . При необходимости можно получить зависимость ω и t от ε . При этом, согласно выражению (4.1), характер сходимости рядов (4.4) и (4.5) не изменяется, также и условия, накладываемые на параметры n и r , остаются неизменными.

Осталось показать, что построить зависимость ω и ε от t можно только при указанных ограничениях на параметры задачи. Пусть такая зависимость построена

$$\omega = \varphi(t), \quad \varepsilon = \psi(t).$$

Из выражения (4.1) получим

$$\varepsilon = (A/B) \cdot \omega = (A/B) \cdot \varphi(t) = \psi(t).$$

Таким образом, решение задачи (3.4), (2.4) определяется только одной функцией $\varphi(t)$. Поскольку зависимость ω от t является монотонной, то существует обратная функция

$$t = \varphi^{-1}(\omega).$$

Так как помимо задаваемых рядами (4.4) и (4.5) решений нет, то обратная функция $\varphi^{-1}(\omega)$ должна совпадать с одним из них. И других решений быть не может.

Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 4.1 Подчеркнем, что результаты теоремы 4.2 доказаны в предположении $A < B$. Можно ли их обобщить на случай $A \geq B$? Легко видеть, что при натуральных значениях r результаты теоремы 4.2 справедливы для любых значений A и B . Для произвольных значений $r > 0$ это не так. При $A = B$ рассматриваемые в доказательстве ряд (4.5) будет равномерно сходиться лишь на открытом полуинтервале $\omega \in [0; 1)$, а при $\omega = 1$ равномерная сходимость будет только для $0 < n \leq 1$. При $A > B$ результаты будут аналогичными случаю $A = B$, за исключением длины отрезка равномерной сходимости – $\omega \in [0; B/A]$. Таким образом, можно утверждать, что для описания произвольно больших деформаций задача (3.4), (2.4) малоприменима.

5. Выводы и заключение

В статье исследована возможность аналитического решения задачи деформирования образцов из стали X18H10T при постоянных одноосной растягивающей нагрузке и температуре в условиях ползучести, описываемой системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова с однородными начальными условиями. Для данной задачи получены необходимые и достаточные условия интегрируемости, накладываемые на материальные константы. Согласно полученным результатам, аналитическое решение возможно только при натуральных значениях материальных констант n и r , а также натуральном значении $1/r$. Но при указанных значениях параметров n и r с удовлетворительной точностью удается описать только очень узкий круг задач. В частности, в статье [11] для задачи чистого растяжения трубок из стали X18H10T с внешним диаметром 12 мм, толщиной стенки 0.5 мм и рабочей длиной 70-100 мм при постоянных растягивающей нагрузке (в диапазоне напряжений $\sigma_0 = 39.2-78.5$ МПа) и температуре 850 °С получены параметры $n = 3.2$ и $r = 2.1$. Эта задача, как и большинство задач ползучести такого вида, не могут быть проинтегрированы. Поэтому основным инструментом решения задач ползучести являются численные методы.

Но и численное решение задач ползучести сопряжено со значительными трудностями. На рис. 1 видно, что при приближении к моменту разрушения скорость деформации ползучести возрастает, стремясь к бесконечности. Тоже происходит и на стадии упрочнения в окрестности начального момента времени. Это означает, что при описании всех трех стадий ползучести определяющие соотношения ползучести имеют две предельные особые

точки. Традиционные явные методы решения задач Коши могут пропускать момент разрушения за счет накапливаемой погрешности, но не могут преодолеть предельную особую точку в начальный момент времени, что делает их малоэффективными для данного класса задач. Использование же специальных методов решения жестких и плохо обусловленных задач, в том числе и неявных методов, гораздо более трудоемко.

Наиболее эффективным методом численного решения плохо обусловленных задач является метод продолжения решения по наилучшему аргументу, известный также как метод наилучшей параметризации и *arc length method*. Он состоит в замене исходного аргумента задачи на новый, отсчитываемый по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Главным свойством наилучшего аргумента является то, что преобразованная к нему задача имеет наилучшую обусловленность и не имеет особенностей. Преобразованная к наилучшему аргументу задача может быть решена любыми методами решения задачи Коши, в том числе и явными. В дальнейших работах будет рассмотрено численное решение рассматриваемой задачи растяжения образцов из стали X18H10T с использованием метода продолжения решения по аргументам различного вида и показаны его преимущества по сравнению с традиционными явными методами.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №16-08-00943а и 18-38-00424мол_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, М., 2014, 752 с.
2. Н. Н. Малинин, *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Машиностроение, М., 1975, 400 с.
3. А. М. Локощенко, *Ползучесть и длительная прочность металлов*, Физматлит, М., 2016, 504 с.
4. А. М. Локощенко, “Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор)”, *Прикладная механика и техническая физика*, **53**:4 (2012), 149–164.
5. А. М. Локощенко, “Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор)”, *Известия РАН. Механика твердого тела*, **3** (2012), 116–136.
6. А. М. Локощенко, “Результаты исследований ползучести и длительной прочности металлов в Научно-исследовательском институте механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (к юбилею Ю. Н. Работнова)”, *Прикладная механика и техническая физика*, **55**:1 (2014), 144–165.
7. Л. М. Качанов, “О времени разрушения в условиях ползучести”, *Изв. АН СССР. Отд. технических наук*, **8** (1958), 26–31.
8. Ю. Н. Работнов, “О механизме длительного разрушения”, *Вопросы прочности материалов и конструкций.*, Изд-во АН СССР, М., 1959, 5–7.
9. Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов, “Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:6 (2018), 914–933.

10. Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных*, Дрофа, М., 2003, 720 с.
11. А. М. Локощенко, С. А. Шестериков, “Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении”, *Прикладная механика и техническая физика*, **21**:3 (1980), 155–159.
12. П. Л. Чебышев, “Об интегрировании иррациональных дифференциалов”, *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. 2. Математический анализ*, Изд-во АН СССР, М., 1947, 52–69.
13. Н. Н. Воробьев, *Теория рядов*, Наука, М., 1979, 408 с.
14. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II*, Физматлит, М., 2003, 864 с.

Поступила 11.07.2018

MSC2010 34A12, 34A34

On the analytical solution of one creep problem

© E. B. Kuznetsov¹, S. S. Leonov²

Abstract. The analytical solution of one initial value problem for the system of two ordinary differential equations describing the fracture process of metal structures in deflected mode at creep conditions is considered in the paper. Similar problems arise when calculating the strength characteristics and estimating residual deformations in the design of nuclear reactors, in building and aerospace industries and in mechanical engineering. The solvability of the creep constitutive equations' system is of great practical importance. The possibility of obtaining an exact analytical solution makes it possible to significantly simplify both the identification of creep characteristics and the process of model examination. Necessary and sufficient integrability conditions imposed on the parameters of the model are obtained for the initial problem using Chebyshev's theorem on the integration of a binomial differential. The recommendations for the numerical solution of the considered problem are given.

Key Words: creep, fracture, long-term strength, damage parameter, binomial differential, initial problem, system of ordinary differential equations.

REFERENCES

1. Yu. N. Rabotnov, [*Creep problems in structural members*], Nauka, Moscow, 2014 (In Russ.), 752 p.
2. N. N. Malinin, [*Applied theory of plasticity and creep*], Mashinostroyeniye, Moscow, 1975 (In Russ.), 400 p.

¹ Evgenii B. Kuznetsov, Professor, Department of Dynamic Systems Modeling, Moscow Aviation Institute (4 Volokolamskoye highway, Moscow 125993, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

² Sergey S. Leonov, Associate Professor, Department of Dynamic Systems Modeling, Moscow Aviation Institute (4 Volokolamskoye highway, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6077-0435>, powerandglory@yandex.ru

3. A. M. Lokoshchenko, [*Creep and long-term strength of metals*], Fizmatlit, Moscow, 2016 (In Russ.), 504 p.
4. A. M. Lokoshchenko, “Application of kinetic theory to the analysis of high-temperature creep rupture of metals under complex stress (review)”, *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **53**:4 (2012), 599–610.
5. A. M. Lokoshchenko, “Long-term strength of metals in complex stress state (a survey)”, *Mechanics of Solids*, **3** (2012), 116–136.
6. A. M. Lokoshchenko, “Results of studying creep and long-term strength of metals at the Institute of Mechanics at the Lomonosov Moscow State University (To Yu. N. Rabotnov’s Anniversary)”, *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **55**:1 (2014), 118–135.
7. L. M. Kachanov, “[On the time of failure under creep conditions]”, *Izvestiya AN SSSR. Otdeleniye tekhnicheskikh nauk*, **8** (1958), 26–31 (In Russ.).
8. Yu. N. Rabotnov, “[On the long-term fracture mechanism]”, *Voprosy prochnosti materialov i konstruksiy*, AN SSSR Publ., Moscow, 1959, 5–7 (In Russ.).
9. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, “Examples of parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:6 (2018), 881–897 (In Russ.).
10. L. D. Kudryavtsev, [*Course of mathematical analysis. Vol. 2. Series. Differential and integral calculus of functions of several variables*], Drofa, Moscow, 2003 (In Russ.), 720 p.
11. A. M. Lokoshchenko, S. A. Shesterikov, “Method for description of creep and long-term strength with pure elongation”, *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **21**:3 (1980), 414–417.
12. P. L. Chebyshev, “[On the integration of irrational differentials]”, *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 2. Matematicheskiy analiz*, AN SSSR Publ., Moscow, 1947, 52–69 (In Russ.).
13. N. N. Vorobyev, [*Theory of series*], Nauka, Moscow, 1979 (In Russ.), 408 p.
14. G. M. Fikhtengolts, [*Course of differential and integral calculus. Vol. II*], Fizmatlit, Moscow, 2003 (In Russ.), 864 p.

Submitted 11.07.2018