Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.215-224

УДК 62-50

Двухкритериальные задачи оптимальной виброзащиты упругих конструкций

© **Д. В. Баландин [1], Е. Н. Ежов [2], И. А. Федотов [3]**

Аннотация. В многокритериальной постановке рассматривается новый класс задач оптимальной виброзащиты упругих объектов, критериями в которых являются максимальные деформации упругого объекта защиты и максимальная деформация виброизолирующего устройства. Задача состоит в поиске линейной обратной связи, характеризующей виброизолятор и минимизирующей по Парето указанные критерии. Для решения данного класса задач применяется подход, основанный на результатах современной теории управления с применением свертки Гермейера и техники линейных матричных неравенств. Выписывается система линейных матричных неравенств, из решения которой могут быть получены элементы искомой матрицы обратной связи. Подробно рассмотрена двукритериальная задача оптимальной виброзащиты многоэтажного высотного здания от сейсмических воздействий. На плоскости критериев построено множество Парето, а также проведено сравнение «идеального» Парето оптимального изолятора, т. е. управляющего устройства, обратная связь которого предполагает наличие текущей информации обо всех переменных состояния рассматриваемой механической системы, с оптимальными изоляторами активных и пассивного типов, имеющих более простую структуру управляющего устройства. Показано, что «активные» виброизоляторы не намного лучше пассивных, но все они заметно уступают «идеальному» виброизолятору.
Ключевые слова: оптимальная виброзащита, многокритериальные задачи, линейные матричные неравенства, свертка Гермейера.

1. Введение

Вопросы расчета и конструирования устройств, обеспечивающих эффективную защиту сложных конструкций, приборов, аппаратуры и самого человека от вредного воздействия вибраций и вместе с тем обладающих ограниченными размерами, продолжают оставаться в фокусе внимания ученых и инженеров [1]-[6]. Такие устройства в инженерной практике называются виброизоляторами. Известно [7], что задачу виброзащиты удобно рассматривать как задачу автоматического управления, регулятором в которой выступает виброизолятор. К числу основных показателей, характеризующих виброизоляторы,

[1] **Баландин Дмитрий Владимирович**, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7727-5924, dbalandin@yandex.ru

[2] **Ежов Егор Николаевич**, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5434-7075, ezhovegor@gmail.com

[3] **Федотов Игорь Анатольевич**, директор малого инновационного предприятия ООО "РЕХЭЯ" (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23, к. 8), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3912-8971, optimal.control@gmail.com

относят величину, определяющую максимальный ход этого устройства, и максимальные деформации или напряжения, которые возникают в защищаемом объекте. Выбор подходящего виброизолирующего устройства представляет собой поиск определенного компромисса между этими двумя важнейшими показателями: чем меньше максимальный ход виброизолятора, тем больше максимальные деформации или максимальные напряжения, и наоборот. С учетом этого обстоятельства представляется целесообразным поставить двукритериальную задачу, в которой требуется синтезировать управление (выбрать виброизолятор), минимизирующий по Парето указанные показатели качества. Вполне возможна ситуация, когда в защите объекта участвуют одновременно несколько виброизолирующих устройств, тогда вместо двукритериальной задачи уместно рассмотреть многокритериальную. В данной статье излагается общий подход к решению многокритериальных задач виброзащиты многомассовых упругих объектов с позиций современной теории управления. В качестве примера подробно обсуждается двукритериальная задача сейсмозащиты высотного здания, в которой выбором виброизолятора требуется минимизировать в смысле Парето два показателя: максимум из максимальных межсекционных деформаций и максимальное смещение здания относительно фундамента. Рассматриваемая задача осложняется тем, что внешнее сейсмическое воздействие заранее неизвестно, поэтому синтез виброизолирующего устройства проводится в расчете на «наихудшее» (наиболее опасное) воздействие из некоторого класса воздействий.

2. Постановка задачи

Рассматривается механическая система, состоящая из материальных тел, связанных между собой и с телом, называемым далее основание, упругими и диссипативными элементами. Предполагается, что механическая система подвергается неконтролируемым воздействиям кинематического или динамического типа и управляющим воздействиям. Механическая система описывается линейными дифференциальными уравнениями:

$$M\ddot{q} + R\dot{q} + Kq = Pv + Qu, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \tag{2.1}$$

где вектор $q \in R^n$ определяет обобщенные координаты материальных тел, образующих систему; M, R, K - квадратные симметричные матрицы, определяющие инерционные диссипативные и упругие свойства механической системы; $v = v(t)$ – вектор-функция, задающая неконтролируемые внешние воздействия; u – вектор управляющих воздействий.

Для оценки качества переходных процессов в системе введем в рассмотрение следующие функционалы:

$$J_i(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_k \{\sup_{t \geq 0} |z_i^k(t)|\}}{\|v\|_2}, \ i = 1, \ldots, N, \tag{2.2}$$

где z_i^k - компоненты управляемых векторных выходов системы, представляющие собой скалярные линейные комбинации обобщенных координат q, скоростей $\dot{q}$, и управляющих воздействий u; $\|v\|_2$ - L_2 - норма внешнего воздействия, т. е. квадратный корень из интеграла в пределах от 0 до ∞ от квадрата модуля вектор-функции $v(t)$. Такая форма представления функционалов позволяет оценить максимальные деформации и максимальные усилия в различных элементах механической системы при отсутствии конкретных данных о внешних воздействиях. Целью управления u, формируемого в форме обратной связи по состоянию, т. е. в виде линейной комбинации обобщенных координат и скоростей, является уменьшение значений данных функционалов. Как правило, указать управляющее воздействие, которое приводило бы к «одновременному» уменьшению всех функционалов, не представляется возможным, поэтому целесообразна постановка многокритериальной задачи, которая заключается в поиске управляющих воздействий, обеспечивающих такой компромисс между значениями функционалов, что каждый из них не может быть уменьшен без увеличения хотя бы одного из оставшихся. В задачах виброзащиты такая постановка вопроса представляется естественной, поскольку уменьшение деформации в отдельных частях системы приводит к увеличению усилий в других её частях и наоборот.

Описанная постановка оптимизационной задачи называется многокритериальной, а получаемые решения (коэффициенты обратной связи в законе управления)– оптимальными по Парето. Следует заметить, что получение решений многокритериальных задач и построение Парето– оптимальных решений до настоящего времени является одной из наиболее трудных математических задач в теории оптимизации и оптимального управления.

3. Метод решения многокритериальной задачи оптимального управления

Для решения поставленной задачи воспользуемся результатами статей [8]-[10], в которых введенные выше функционалы трактуются как обобщенные операторные H_2 - нормы линейной системы. Вводя обозначение $x = \left(q^T, \dot{q}^T\right)^T$, перепишем систему (2.1) в виде управляемой линейной системы

$$\dot{x} = Ax + B_v v + B_u u, \ x(0) = 0, \tag{3.1}$$

где матрицы A, B_v, B_u формируются из матриц M, R, K, P, Q следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ M^{-1}K & M^{-1}R \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}P \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}Q \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Будем представлять управление u в форме обратной связи по состоянию, т. е. в виде $u = \Theta x$, тогда система (3.1) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{x} = A\left(\Theta\right)x + B_v v, \ x(0) = 0, \tag{3.3}$$

где матрица замкнутой системы $A\left(\Theta\right) = A + B_u\Theta$. Управляемый выход z системы (3.3) представим в виде

$$z = Cx + Du = \left(C + D\Theta\right)x = C\left(\Theta\right)x \tag{3.4}$$

со скалярными m компонентами $z^k = C^{(k)}x + D^{(k)}u = C^{(k)}\left(\Theta\right)x, \ k = 1, \ldots, m$. Согласно [8], справедливо следующее соотношение

$$J\left(\Theta\right) = \sup_{v\in L_2}\frac{\max_k\{\sup_{t\geq 0}|z^k(t)|\}}{\|v\|_2} = d_{\max}^{1/2}\left(C\left(\Theta\right)YC^T\left(\Theta\right)\right), \tag{3.5}$$

где $d_{\max}$ обозначает максимальный диагональный элемент матрицы, а симметрическая неотрицательно определенная матрица Y является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A\left(\Theta\right)Y + YA^T\left(\Theta\right) + B_vB_v^T = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, указан способ вычисления функционала $J\left(\Theta\right)$, а именно: для заданной матрицы обратной связи Θ сначала требуется решить матричное уравнение Ляпунова

(3.6), а затем для найденной матрицы Y найти максимальный диагональный элемент матрицы $C(\Theta)YC^T(\Theta)$. Далее для нахождения матрицы обратной связи, при которой достигается минимум функционала (3.5) ,требуется минимизировать по всем элементам матрицы Θ правую часть выражения (3.5). Такая процедура оказывается довольно трудно выполнимой, особенно в случаях, когда число элементов матрицы Θ достаточно велико. В статьях [10], [11] предложен альтернативный и весьма эффективный способ решения этой задачи, основанный на использовании линейных матричных неравенств [12]. Согласно данным источникам, для нахождения искомой матрицы Θ, минимизирующей функционал (3.5), достаточно минимизировать скалярную переменную γ^2 при ограничениях, выражаемых линейными матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_uZ + Z^TB_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & YC^{(k)T} + Z^TD^{(k)T} \\ C^{(k)}Y + D^{(k)}Z & \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \ldots, m \tag{3.7}$$

относительно неизвестных матриц Y, Z и скалярной переменной γ^2. Заметим, что в этих выражениях неравенства понимаются как соответствующая знакоопределенность блочных матриц, находящихся слева от знаков неравенств. Данная оптимизационная задача эффективно решается численно с использованием пакета MATLAB. В результате были найдены матрицы Y_*, Z_* и искомая матрица обратной связи $\Theta = Z_*Y_*^{-1}$.

Рассмотрим теперь многокритериальную задачу оптимального управления с N критериями

$$z_1 = C_1(\Theta)x, \ldots, z_N = C_N(\Theta)x. \tag{3.8}$$

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений, т. е. матриц обратной связи

$$\Theta_P = arg\min_{\Theta}\{J_i(\Theta), i = 1, \ldots, N\}, \tag{3.9}$$

минимизирующих векторный критерий с компонентами

$$J_i(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_k\{\sup_{t\geq 0}|z_i^k(t)|\}}{\|v\|_2}, \ i = 1, \ldots, N, \ k = 1, \ldots, m_i. \tag{3.10}$$

Для решения этой задачи применим свертку Гермейера [13] и сформируем из функций $J_i(\Theta)$ новую целевую скалярную функцию:

$$J_\alpha(\Theta) = \max_{0\leq i\leq N}\{J_i(\Theta)/\alpha_i\}, \tag{3.11}$$

где α_i - произвольные положительные числа. В отличие от линейной свертки, где в случае двух критериев линия уровня представляет собой прямую линию с наклоном, определяющимся отношением α_1/α_2, линией уровня свертки Гермейера является угол, границы которого определяются прямыми $y = \alpha_1$, $x = \alpha_2$. Использование свертки Гермейера в общем случае при решении задачи оптимизации позволяет получить как эффективные решения в смысле Парето, так и слабо эффективные. Таким образом, использование свертки Гермейера в результате даст множество, которое заведомо содержит множество решений, оптимальных в смысле Парето. Поставим далее задачу минимизации функции $J_\alpha(\Theta)$ по элементам матрицы Θ для любого набора параметров α_i. Если представить управляемый выход системы в виде $z = \bar{C}(\Theta)\, x$, где $\bar{C}(\Theta) = \left(\alpha_1^{-1} C_1^T(\Theta), \dots, \alpha_N^{-1} C_N^T(\Theta)\right)^T$, то задача минимизации $J_\alpha(\Theta)$ сводится к минимизации максимального диагонального элемента матрицы $\bar{C}(\Theta)\, Y \bar{C}^T(\Theta)$:

$$\min_{\Theta} d_{\max}\left(\bar{C}(\Theta)\, Y \bar{C}^T(\Theta)\right), \ A(\Theta)\, Y + Y A^T(\Theta) + B_v B_v^T = 0. \tag{3.12}$$

В терминах линейных матричных неравенств задача принимает следующий вид [10]: минимизировать γ^2 при ограничениях, выражаемых линейными матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & Y C_i^{(k)T} + Z^T D_i^{(k)T} \\ C_i^{(k)} Y + D_i^{(k)} Z & \alpha_i^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0,$$
$$k = 1, \dots, m_i \ i = 1, \dots, N \tag{3.13}$$

относительно неизвестных матриц Y, Z и скалярной переменной γ^2. Согласно [10], решив оптимизационные задачи для положительных параметров α_i, получим множество решений, заведомо содержащее решение исходной многокритериальной задачи, т. е. множество Парето.

4. Оптимальная сейсмоизоляция высотного здания

Рассмотрим задачу оптимальной сейсмоизоляции высотного здания. Механическая система, моделирующая колебания высотного здания при сейсмическом воздействии на фундамент, представляет собой цепочку материальных точек (этажи здания), связанных последовательно диссипативными и упругими элементами. При этом одна из двух крайних точек цепочки связана посредством виброизолятора с фундаментом (основанием), совершающим движение под действием землетрясения (Рис. 4.1). После приведения к безразмерному виду (см. например, [14]– [15]) математическая модель такой системы имеет следующий вид:

$$\ddot{\xi} + \beta K \dot{\xi} + K\xi = pv(t) + qu, \ \xi(0) = 0, \ \dot{\xi}(0) = 0, \tag{4.1}$$

где $\xi = col\,(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – координаты материальных точек относительно основания; $v(t)$ – внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания; u – управляющее воздействие, развиваемое виброизолятором; β – положительный параметр, характеризующий диссипативные свойства механической системы; положительно определенная симметрическая матрица K и векторы p и q задаются следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

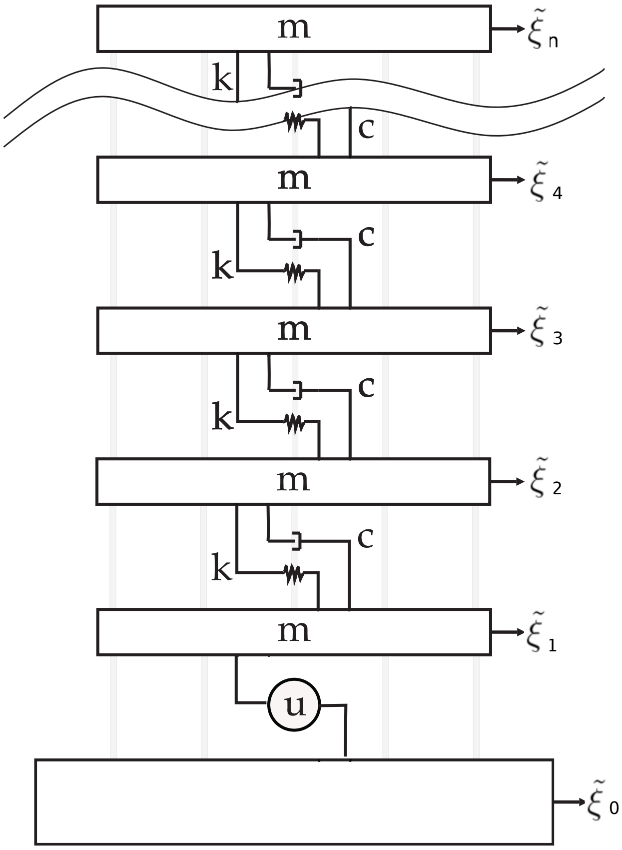

Рисунок **4.1**

Схема n-этажного здания как многомассовой упругой системы

Приведем систему (4.1) к канонической форме управляемой системы (3.1), полагая $x = \left(\xi^T, \dot{\xi}^T\right)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -K & -\beta K \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ p \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ q \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Функционалы, характеризующие качество виброизоляции многомассовой упругой системы, запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} J_1(u) = \sup_{v\in L_2} \frac{\sup_{t\geq 0}|x_1(t)|}{\|v\|_2}, \\ J_2(u) = \sup_{v\in L_2} \frac{\max\{\sup_{t\geq 0}|x_2(t)-x_1(t)|, \ldots \sup_{t\geq 0}|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\}}{\|v\|_2}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Первый функционал характеризует смещение первого этажа относительно основания, а второй определяет деформацию многомассовой системы. Задача управления будет состоять в нахождении параметров обратной связи Θ управления (виброизолятора), минимизирующего по Парето функционалы (4.4). Заметим, что рассматриваемые функционалы обладают следующим свойством: выбор параметров обратной связи, приводящий к уменьшения одного из них, например, максимального смещения первого этажа относительно основания, влечет увеличение значения другого функционала, определяющего максимальную деформацию системы (высотного здания). Таким образом, естественный подход к задаче виброизоляции заключается в поиске компромисса между значениями максимального смещения объекта относительно основания и максимальной деформации самого упругого объекта, что приводит к двукритериальной задаче оптимального управления.

Приведем результаты решения двукритериальной задачи для $n = 10, \beta = 0.1$. Рассмотрим случай «идеального виброизолятора», когда измерению доступно полное состояние управляемой системы, т. е. в формировании обратной связи участвуют как координаты, так и скорости всех материальных точек механической системы. На Рис. 4.2 кривая 1 (сплошная линия) представляет множество оптимальных по Парето значений функционалов $\{J_1, J_2\}$ для указанного случая. Очевидно, что на практике полное состояние механической системы вряд ли доступно измерению, тем не менее найденное решение позволяет получить оценку снизу для оптимальных значений функционалов.

Далее рассмотрим случай, когда обратная связь формируется на основе только текущего значения переменной x_1 и скорости ее изменения $\dot{x}_1$ (переменная x_{11}). Фактически данный случай соответствует пассивному виброизолятору с упругим и демпфирующим элементами. На Рис. 4.2 кривая 2 (штриховая линия), расположенная выше «предельной» кривой 1, соответствует Парето- оптимальным значениям функционалов $\{J_1, J_2\}$ в классе пассивных виброизоляторов. Кривые 3 (пунктирная линия) и 4 (штрих-пунктирная линия) отвечают случаям, когда к пассивному виброизолятору добавлена «активная» составляющая, т. е. дополнительно измеряется не только смещение второго этажа относительно первого (кривая 3)но и смещение третьего этажа относительно второго (кривая 4). Анализ кривых показывает, что «активные» виброизоляторы (кривые 3 и 4) не намного превосходят пассивные (кривая 2), но все эти три изолятора заметно уступают «идеальному виброизолятору» (кривая 1).

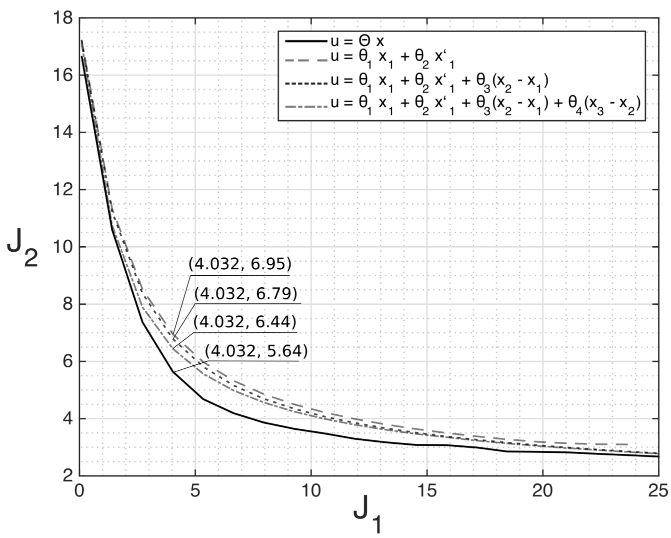

Рисунок **4.2**

Множество Парето на плоскости критериев для разных типов виброизолятора

5. Заключение

В статье приводятся результаты изучения многокритериальных задач оптимальной виброзащиты упругих объектов. В качестве критериев были выбраны обобщенные операторные H_2-нормы системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику защищаемого от внешних воздействий объекта. Изложена общая схема решения многокритериальной задачи оптимального управления, основанная на свертке Гермейера и технике линейных матричных неравенств. В двукритериальной задаче оптимальной виброизоляции высотного здания от сейсмических воздействий на плоскости критериев было построено множество Парето, а также проведено сравнение «идеального» Парето- оптимального виброизолятора с оптимальными изоляторами активного и пассивного типов. Показано, что «активные» виброизоляторы не намного превосходят пассивные, но все эти изоляторы заметно уступают «идеальному» виброизолятору.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №16-01-00606 и №18-41-520002).

Список литературы

1. I. G. Buckle, R. L. Mayes, "Seismic isolation: history, application, and performance –a World View", *Earthquake Spectra*, **6**:2 (1990), 161–201.
2. D. Karnopp, "Active and semi-active vibration isolation", *J. Mech. Des.*, **117:B** (1995), 177–185.
3. D. V. Balandin , N. N. Bolotnik, Pilkey W. D. Pilkey, "Review: optimal shock and vibration isolation", *Shock and Vibration*, **5**:2 (1998), 73–87.
4. D.V. Balandin, N.N. Bolotnik, W.D. Pilkey, *Optimal protection from impact, shock, and vibration*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.
5. R.A. Ibrahim, "Recent advances in nonlinear passive vibration isolators", *Journal of Sound and Vibration*, **314**:3–5 (2008), 371–452.
6. S. J. Patil, G. R. Reddy, "State of art review – base isolation systems for structures", *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, **2**:7 (2012), 438–453.
7. М. З. Коловский, *Автоматическое управление виброзащитными системами*, Наука, М., 1976, 317 с.
8. D.A. Wilson, "Convolution and Hankel operator norms for linear systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, **34** (1989), 94–97.
9. M. A. Rotea, "The generalized H_2 control problem", *Automatica*, **29**:2 (1993), 373–385.
10. Д. В. Баландин, М. М. Коган, "Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты", *Автоматика и телемеханика*, **8** (2017), 76-–90.
11. D.V. Balandin, M.M. Kogan, "Pareto optimal generalized H_2 control and optimal protection from vibration", *IFAC-PapersOnLine*, **50**:1 (2017), 4442–4447.
12. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*, Наука, М., 2007, 281 с.
13. Ю.Б. Гермейер, *Введение в теорию исследования операций*, Наука, М., 1971, 384 с.
14. H. Nishimura, A. Kojima, "Seismic isolation control for a buildinglike structure", *IEEE Control Systems*, **19:6** (1999), 38–44.

15. D. Balandin, M. Kogan, “LMI-based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations”, *Structural Control and Health Monitoring*, **12:2** (2005), 213–224.

Поступила 26.04.2018

MSC2010 34C20

Two-criteria problems for optimal protection of elastic structures from vibration

© **D. V. Balandin** [1], **E. N. Ezhov**[2], **I. A. Fedotov**[3]

Abstract. In a multi-objective formulation with criteria such as the maximal deformation of the elastic object to be protected and maximal deformations of the protection devices, a new class of optimal vibration protection problems is considered. The mathematical problem is to find a linear feedback control minimizing the above criteria in Pareto sense. A general approach to solving these problems based on results of modern control theory using linear matrix inequalities technique is presented. A system of linear matrix inequalities for obtaining the desired gain matrix is derived. An example of a solution of two-criteria problem for a multistorey building under seismic disturbances is given. Pareto set on the plane of the criteria is constructed. The «ideal» Pareto optimal isolator and optimal isolators of active and passive types are compared as well. It is shown that the «active» vibration isolators are not much better than the passive one, but all these isolators are noticeably inferior to the «ideal» vibration isolator.
Key Words: optimal vibration protection, multi-criteria problem, linear matrix inequalities, Germeyer convolution.

References

1. I. G. Buckle, R. L. Mayes, “Seismic isolation: history, application, and performance – a world view”, *Earthquake Spectra*, **6**:2 (1990), 161–201.

2. D. Karnopp, “Active and semi-active vibration isolation”, *J. Mech. Des.*, **117:B** (1995), 177–185.

3. D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, W. D. Pilkey, “Review: optimal shock and vibration isolation”, *Shock and Vibration*, **5**:2 (1998), 73–87.

4. D.V. Balandin, N.N.Bolotnik, W.D. Pilkey, *Optimal Protection from impact, shock, and vibration*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001, 72 p.

5. R.A. Ibrahim, “Recent advances in nonlinear passive vibration isolators”, *Journal of Sound and Vibration*, **314**:3-5 (2008), 371–452.

[1] **Dmitry V. Balandin**, Professor, Department of Differential Equations and Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7727-5924, dbalandin@yandex.ru

[2] **Egor N. Ezhov**, Ph.D Student, Department of Differential Equations and Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5434-7075, ezhovegor@gmail.com

[3] **Igor A. Fedotov**, CEO Ltd «REHEYA» university spin-off (8 bld., 23 Gagarin St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Ph.D (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3912-8971, optimal.control@gmail.com

6. S. J.Patil, G. R.Reddy, "State of art review – base isolation systems for structures", *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, **2**:7 (2012), 438–453.

7. M.Z. Kolovskiy, *"Automatic control of vibroprotection systems"*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 317 p.

8. D.A. Wilson, "Convolution and Hankel operator norms for linear systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, **34** (1989), 94—97.

9. M. A. Rotea, "The generalized H_2 control problem", *Automatica*, **29**:2 (1993), 373–385.

10. D.V. Balandin, M.M. Kogan, "Pareto optimal generalized H_2 Control and vibroprotection problems", *Automation and Remote Control*, **78:8** (2017), 1417– 1429.

11. D.V. Balandin, M.M. Kogan, "Pareto optimal generalized H_2 control and optimal protection from vibration", *IFAC-PapersOnLine*, **50**:1 (2017), 4442–4447.

12. D.V. Balandin, M.M. Kogan, *"Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities"*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russ.), 281 p.

13. Y.B. Germeyer, *"Introduction to theory of operations research"*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 384 p.

14. H. Nishimura, A. Kojima, "Seismic isolation control for a buildinglike structure", *IEEE Control Systems*, **19:6** (1999), 38–44.

15. D. Balandin, Kogan M. Kogan, "LMI-Based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations", *Structural Control and Health Monitoring*, **12:2** (2005), 213–224.

Submitted 26.04.2018