DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.206-214

УДК 517.95

Об одной оценке в пространстве Соболева, порождаемой вырождающимся эллиптическим оператором второго порядка, определённой в полуплоскости

© **Г. А. Смолкин** [1]

Аннотация. Рассматривается эллиптический оператор, который определен в полуплоскости и вырождается вдоль нормали к границе этой полуплоскости. Уточнены результаты, полученные автором ранее. Построено разбиение единицы двойственной переменной, позволяющее "заморозить"производные по ортогональному направлению к множеству вырождения и осуществить гладкое продолжение функции на всю плоскость. Показано, что это продолжение и "стандартное"продолжение, подробно изученное Л.Н. Слободецким, достаточно для получения необходимой априорной оценки. При этом неравенства доказываются при помощи преобразования Фурье по части переменных и неравенства Шварца. Установлено, что Соболевская норма производных второго порядка функции будет конечной, если ее сужение на границу полуплоскости и ее образ, порождающим действием на эту функцию изучаемым оператором принадлежат пространствам Соболева с показателями 3, 2 соответственно. Полученные результаты можно распространить на более широкий класс операторов, могут быть применены при изучении краевых задач для вырождающихся эллиптических и квазиэллиптических операторов, заданных в полупространствах.

Ключевые слова: вырождающийся эллиптический оператор, преобразование Фурье, пространства Соболева, априорные оценки.

1. Введение

В статье использованы элементы теории псевдодифференциальных операторов, различные классы которых подробно описаны в книгах [1], [2]. Как и в [3] используются следующие обозначения

$$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ \xi=(\xi_1,\xi_2) - \text{точки плоскости } R^2;\ x\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2,$$
$$\lambda(t)=(1+|t|^2)^{1/2},\ \ \partial_k^j=\frac{\partial^j}{\partial x_k^j},\ i^2=-1,\ D_k^j=i^{-j}\frac{\partial^j}{\partial x_k^j},\ \ k=1,2;\ j=1,2,\ldots;$$
$$\widetilde{w}(\xi)=\int e^{-ix\xi}w(x)dx,\ \widetilde{w}(\xi_1,x_2)=\int e^{-ix_1\xi_1}w(x)dx_1,\ \widetilde{w}(x_1,\xi_2)=\int e^{-ix_2\xi_2}w(x)dx_2-$$

преобразования Фурье функции $w(x)$ по переменным x, x_1, x_2 соответственно. При этом

$$w(x)=(2\pi)^{-2}\int e^{ix\xi}\widetilde{w}(\xi)d\xi,\ \text{если}\ \int|\widetilde{w}(\xi)|d\xi<\infty;$$

[1] **Смолкин Георгий Александрович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5964-9814, smolkinga@yandex.ru

Скалярное произведение $(w(x), W(x))$, функции $A(x,D)w$, $A(x,D_1)w$ $A(x,D_2)w$ и нормы $\|w(x)\|$, $\|w(x)\|_{x_2>0}$ определяются равенствами

$$(w(x), W(x)) = \int w(x)\overline{W}(x)dx = \int\int w(x_1,x_2)\overline{W}(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

$$A(x,D)w = (2\pi)^{-2}\int e^{ix\xi}A(x,\xi)\widetilde{w}(\xi)d\xi,$$

$$A(x,D_1)w = (2\pi)^{-1}\int e^{ix_1\xi_1}A(x,\xi_1)\widetilde{w}(\xi_1,x_2)d\xi,$$

$$A(x,D_2)w = (2\pi)^{-1}\int e^{ix_2\xi_2}A(x,\xi_2)\widetilde{w}(x_1,\xi_2)d\xi,$$

$$\|w(x)\|^2 = (w(x), w(x)),\ \|w(x)\|^2_{x_2>0} = \int_{x_2>0}|w(x)|^2dx.$$

соответственно.

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C, быть может с индексами. Всюду ниже $u(x) \in C_0^\infty(K)$, K - компакт из R^2. Определим

$$P(x,D) = D_1^2 + x_1^2D_2^2,\ f(x) = P(x,D)u,$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ \\ f(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} u(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ \\ u(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$h(t) \in C_0^\infty(R),\ 0 \leq h(t) \leq 1;\ h(t) = 1, \text{ если } |t| \leq 1;\ h(t) = 0, \text{ если} |t| \geq 2.$$

Введем разбиение единицы двойственной переменной ξ_1. Пусть

$$g_k(t) = h(t-k)/\sum_{j=0}^{\infty}h(t-j),$$

$$\Psi_k(\xi_1) = g_k(\ln((1+|\xi_1|^2)^{1/2}),\ k = 0,1,\ldots\ .$$

Очевидно, что в каждой точке $\xi_1 \in R$ пересекается конечное число носителей функций $\Psi_k(\xi_1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(\xi_1) = 1,$$

$$e^{-2}(1+|\xi_1|^2)^{1/2} \leq e^k \leq e^2(1+|\xi_1|^2)^{1/2}, \tag{1.1}$$

если $\xi \in supp\ \Psi_k(\xi)$.

2. Априорные оценки

Пусть

$$v_1 = v_1(x) \equiv \begin{cases} u(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ 2\sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k})\Psi_k(D_1)u(x_1,0) - u(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Л е м м а 2.1 *Для любой постоянной $\varepsilon > 0$ существует константа, не зависящая от u и такая, что справедливо неравенство*

$$\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2^2 v_1(x)\| \leq$$
$$\leq C(\varepsilon)(\|(\lambda^2(D_1)+\lambda(D_2))f(x)\|_{x_2>0} + \|\lambda^3(D_1)u(x_1,0)\| + \|u(x)\|_{x_2>0}) \tag{2.2}$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C(\varepsilon) = \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из работ [3], [4] следует

$$\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))\lambda^2(\xi_2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)\|^2 \leq C(\varepsilon^{-1}J_0 + \varepsilon^{-3}J_1 + \varepsilon^{-4}J_2 +$$
$$+\|v_1(x)\|^2 + \varepsilon\|\lambda^{3/2}(D_2)D_1 v_1(x)\|^2 + \varepsilon^2\|\lambda^2(D_2)v_1(x)\|^2), \tag{2.3}$$

где

$$J_0 = \int \lambda^{3/2}(\xi_2)|\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 d\xi_2,$$
$$J_1 = \int \lambda^{1/2}(\xi_2)|D_1\widetilde{F}_1(0,\xi_2|^2 d\xi_2,$$
$$J_2 = \int\int h^2(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)/2)|D_1^2\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2,$$
$$\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2) = (D_1^2 + x_1^2\xi_2^2)\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2).$$

Оценим интегралы J_0, J_1, J_2. Из равенства

$$D_1^j F_1(0,x_2) = D_1^j F(0,x_2) + D_1^j F_0(0,x_2), \quad j = 0,1,$$

где

$$D_1^j F_0(0,x_2) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \geq 0 \\ 2\sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) D_1^{j+2}\Psi_k(D_1)U(0) - 2D_1^j F(0,x_2), \text{ если } x_2 < 0 \end{cases}$$

следует

$$J_j \leq C\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2)(|D_1^j\widetilde{F}(0,\xi_2)|^2 + |D_1^j\widetilde{F}_0(0,\xi_2)|^2)d\xi_2. \tag{2.4}$$

Нетрудно доказать (см. [3]) неравенство:

$$\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2)|D_1^j\widetilde{F}(0,\xi_2)|^2 d\xi_2 \leq C\|(D_1^2 + \lambda(D_2))f(x)\|^2_{x_2>0}. \tag{2.5}$$

Далее, согласно работе [5], имеем

$$\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2)|D_1^j\widetilde{F}_0(0,\xi_2)|^2 d\xi_2 \le$$

$$\le C(\int_{x_2<0}\int_{y_2<0}|D_1^jF_0(0,x_2)-D_1^jF_0(0,y_2)|^2/|x_2-y_2|^{1-j+3/2}dx_2dy_2+$$

$$+\int_{x_2<0}|D_1^jF_0(0,x_2)|^2/|x_2|^{-j+3/2}dx_2)\le C(I_1+I_2+I_3), \tag{2.6}$$

где

$$I_1=\int|\lambda^{3/4-j/2}(D_2)\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})D_1^{j+2}\Psi_kU(0)|^2dx_2,$$

$$I_2=\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|D_1^j\widetilde{F}(0,\xi_2)|^2d\xi_2,$$

$$I_3=\int|D_1^jF(0,x_2)-\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})D_1^{j+2}\Psi_k(D_1)U(0)|^2/|x_2|^{3/2-j}dx_2.$$

Оценим интегралы I_1, I_3. Из соотношений

$$\begin{aligned} I_1 &\le C\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\int\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})\xi_1^{j+2}\widetilde{\Psi_kU}(\xi_1,0)d\xi_1dx_2|^2d\xi_2= \\ &= C\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})dx_2|^2d\xi_2|\int\xi_1^{j+2}\widetilde{\Psi_kU}(\xi_1,0)d\xi_1|^2, \end{aligned}$$

$$\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})dx_2|^2d\xi_2=$$

$$=\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})dx_2\int e^{iy_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(y_2e^{2k})dy_2d\xi_2\le$$

$$\le 2\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})dx_2\int e^{iy_2\xi_2}\sum_{l=k}^{\infty}h(y_2e^{2l})dy_2|d\xi_2\le$$

$$\le C\int\lambda^{3/2-j}(\xi_2)|\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2e^{2k})dx_2|d\xi_2\sum_{l=k}^{\infty}e^{-2l}\le$$

$$\le C\int|\int e^{-ix_2\xi_2}\sum_{k=0}^{\infty}h(x_2)\lambda^{3/2-j}(\xi_2e^{2k})dx_2|d\xi_2\sum_{l=k}^{\infty}e^{-2l}\le$$

$$\le C\sum_{k=0}^{\infty}e^{3k-2kj}\sum_{l=k}^{\infty}e^{-2l}$$

получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\le C\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}e^{(l-k)j+5(k-l)/2}\|D_1^3\Psi_kU(x_1,0)\|\|D_1^3\Psi_lU(x_1,0)\|\le \\ &\le C\|\lambda^3(D_1)U(x_1,0)\|^2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Очевидно

$$I_3 \le I_{31} + I_{32},$$

где

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j} dx_2, \\ W(x_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k})(D_1^j \Psi_k F(0,x_2) - \Psi_k D_1^{j+2} U(0)), \\ I_{32} &= \int |\sum_{k=0}^{\infty} (1 - h(x_2 e^{2k})) D_1^j \Psi_k F(0,x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j} dx_2 \le \\ &\le C\|\lambda^2(D_1)F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая равенство $W(0) = 0$, получаем

$$\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j} dx_2 \le C \int |W(x_2) D_2 W(x_2)|/|x_2|^{1/2-j} dx_2 \le$$

$$\le C(\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j} dx_2)^{1/2} (\int |D_2 W(x_2)|^2 |x_2|^{1/2+j} dx_2)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\int |W(x_2)|^2/|x_2|^{3/2-j} dx_2 \le C \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 W(x_2)|^2 dx_2 \le$$

$$\le C(\int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^j \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1|^2 dx_2 +$$

$$+ \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1|^2 dx_2) \le C(Z_1 + Z_2 + Z_3).$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int |x_2|^{1/2+j} | \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^j D_2 \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1|^2 dx_2 \le \\ &\le C\|\lambda(D_2)F(x)\|^2, \\ Z_2 &= \int |x_2|^{1/2+j} | \int \sum_{k=0}^{\infty} \xi_1^j \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1 D_2 h(x_2 e^{2k})|^2 dx_2 \le \\ &\le C\|\lambda^2(D_1)F(x)\|^2, \\ Z_3 &= \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1|^2 dx_2 \le \\ &\le C\|\lambda^3(D_1)u(x_1, 0)\|^2. \end{aligned}$$

Очевидно

$$J_2 \le C(\int\int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)/2) D_1^2 \widetilde{F}_1(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 + \|D_1^2 f(x)\|^2_{x_2>0}), \tag{2.8}$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \geq 0 \\ 2P(x,D)\sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k})\Psi_k(D_1)u(x_1,0), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

Нетрудно доказать неравенство

$$\int\int |h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)/2)D_1^2\widetilde{F}_1(x_1,\xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \leq C\|\lambda^3(D_1)u(x_1,0)\|^2.$$

Отсюда и из (2.3) - (2.8) следует доказательство леммы.

Т е о р е м а 2.1 *Существует постоянная C, не зависящая от $u(x) \in C_0^\infty(K)$ и такая, что*

$$\begin{aligned} \|D_2^2 u(x)\|_{x_2>0} &\leq C(\|(D_1^2 + \lambda(D_2))P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} + \\ &+\|\lambda^3(D_1)u(x_1,0)\| + \|u(x)\|_{x_2>0} + \|D_2 u(x)\|_{x_2>0}). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|D_1^4 v_1(x)\|^2 &\leq (D_1^4 v_1(x), D_1^4 v_1(x)) + (x_1 D_1^3 D_2 v_1(x), x_1 D_1^3 D_2 v_1(x)) \leq \\ &\leq (D_1^2(D_1^2 + x_1^2 D_2^2)v_1(x), D_1^4 v_1(x)) + C\|D_1^2 D_2 v_1(x)\|^2. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Справедливо также (см. [3]) неравенство

$$\|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} \leq C(\|\lambda(D_2)P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} + \|u(x)\|_{x_2>0} + \|D_2 D_1^2 u(x)\|_{x_2>0}). \quad (2.10)$$

Для оценки $\|D_2 D_1^2 u(x)\|_{x_2>0}$ положим

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ -u(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} D_2 u(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ -D_2 u(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$z_0(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \geq 0 \\ 2\sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k})\Psi_k(D_1)u(x_1,0), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x_2 \geq 0 \\ -f(x_1,-x_2), \text{ если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_2 \geq 0 \\ 2D_2\sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k})\Psi_k(D_1)u(x_1,0), \text{ если } x_2 < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0} \leq C\|D_1^2v(x)\| \leq$$
$$\leq C(\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_1^2v(x)\| + \|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_1^2v(x)\|), \quad (2.11)$$

Из равенства $v_2(x) = D_2v_1(x) - z(x)$ следует

$$\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_1^2v(x)\| \leq \varepsilon\|D_1^4v_1(x)\| + C_1\varepsilon\|D_2^2v_1(x)\| +$$
$$+\varepsilon^{-1}\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2^2v_1(x)\| + C_2\|\lambda^3(D_1)u(x_1,0)\|. \quad (2.12)$$

Очевидно

$$\|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_1^2v(x)\| \leq$$
$$\leq \|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_1^2D_2\lambda^{-1}(D_2)v(x)\| + \|D_1^2\lambda^{-1}(D_2)v(x)\|. \quad (2.13)$$

Поскольку

$$1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)) \leq C\varepsilon(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)))x_1\lambda^{1/2}(\xi_2),$$

то

$$\|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_1^2D_2\lambda^{-1}(D_2)v(x)\|^2 \leq$$
$$\leq C\varepsilon^2((\lambda^{-1/2}(\xi_2)D_1^3\xi_2\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2), \lambda^{-1/2}(\xi_2)D_1^3\xi_2\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2)) +$$
$$+(x_1\lambda^{-1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\widetilde{v}(x_1,\xi_2), x_1\lambda^{-1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\widetilde{v}(x_1,\xi_2))).$$

Отсюда, из (2.9)-(2.13) и равенств

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_1(x_1,\xi_2) &= \widetilde{v}_0(x_1,\xi_2) + \widetilde{z}_0(x_1,\xi_2),\\ F_1(x) &= D_1^2v_0(x) + x_1^2D_2v(x)\end{aligned}$$

получаем

$$\|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} \leq C(\|(D_1^2+\lambda(D_2))P(x,D)u(x)\|_{x_2>0} + \|u(x)\|_{x_2>0} +$$
$$+\varepsilon^{-1}\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2^2v_1(x)\| + \|\lambda^3(D_1)u(x_1,0)\|).$$

Таким образом, выбирая ε достаточно малым и используя вышеприведённую лемму, получаем доказательство теоремы.

Список литературы

1. Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, Москва, 1984, 360 с.

2. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1985, 472 с.

3. Г. А. Смолкин, “Об одной априорной оценке для эллиптического оператора второго порядка, вырождающегося вдоль оси координат, перпендикулярной к границе полуплоскости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:3 (2017), 64-72.

4. Г. А. Смолкин, "Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Купцова-Хермандера", *Дифференциальные уравнения*, **40**:2 (2004), 242-250.

5. Л. Н. Слободецкий, "Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных", *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, **197** (1958), 54-112.

Поступила 12.03.2018

MSC2010 35G93

On an estimate in the Sobolev space generated by the second order degenerate elliptic operator defined in the half-plane

© **G. A. Smolkin** [1]

Abstract. The article considers an elliptic operator that is defined in the half-plane and degenerates along the normal to the boundary of the half-plane. The results obtained by the author earlier are made more precise. A partition of unity of a dual variable is constructed that allows to «freeze» the derivatives along the orthogonal direction to the degeneracy set and to carry out a smooth continuation of the function to the whole plane. It is shown that this and the «standard» continuations examined in detail by L.N. Slobodetsky, is sufficient for obtaining the necessary a priori estimate. Moreover, the inequalities are proved by the Fourier transform with respect to the part of variables and by the use of Schwartz inequality. It is established that the Sobolev norm of the function's second order derivatives will be finite if its restriction to the boundary of the half-plane and function's image both belong to the Sobolev spaces with indicators 3, 2, respectively. The results obtained can be spread to a wider class of operators; also they may be used in the research of boundary value problems for the degenerate elliptic and quasi-elliptic operators defined in half-spaces.

Key Words: degenerate elliptic operator, Fourier transform, Sobolev space, a priori estimates.

References

1. Yu. V. Egorov, *Lineynye differentsial'nye uravneniya glavnogo tipa [Linear differential equations of principal type]*, Moscow, Nauka Publ., 1984 (In Russ.), 360 p.

2. M. Teylor, *Psevdodifferentsial'nye operatory [Pseudodifferential operators]*, Moscow, Mir Publ., 1985 (In Russ.), 472 p.

3. G. A. Smolkin, "[About an a priori estimate for the second order elliptic operator degenerate alog coordinate axis orthogonal to semi-plane boundary]", *Zhurnal SVMO*, **19**:3 (2017), 64-72 (In Russ.).

4. G. A. Smolkin, "[A priori estimates associated with differential operators of type Kuptsov-Hermander]", *Differ. Uravn. [Differential equations]*, **40**:2 (2004), 242-250 (In Russ.).

[1] **Georgy A. Smolkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5964-9814, smolkinga@yandex.ru

5. L. N. Slobodetskiy, “[Generalized spaces of SL Sobolev and their applications to boundary-value problems for differential equations in partial derivatives]”, *Uch. app. Leningr. ped. in-ta*, **197** (1958), 54-112. (In Russ.).

Submitted 12.03.2018