DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.175-186

УДК 517.929.4

Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием

© **У. П. Зараник[1], С. Е. Купцова[2], Н. А. Степенко[3]**

Аннотация. В работе исследуется предельное поведение решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В частности, рассматривается случай, когда у решений системы существует нулевое предельное положение, которое может не являться инвариантным множеством рассматриваемой системы. Вводится понятие асимптотического положения покоя для траекторий систем с запаздыванием. На базе второго метода Ляпунова (с помощью подхода Разумихина, в котором предлагается исследовать поведение решений системы при помощи построения классической функции Ляпунова, но оценку ее производной вдоль решений системы проводить не на всем множестве интегральных кривых, а на некотором его подножестве) были получены достаточные условия, при выполнении которых исходная система имеет асимптотическое положение покоя, а также асимптотическое положение покоя в целом.С целью демонстрации применения полученных результатов приводятся примеры нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, имеющих асимптотическое положение покоя, на которых продемонстрировано применение полученных результатов.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, нелинейные системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, асимптотическое положение покоя, функция Ляпунова, подход Разумихина.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом широко применяются для описания и моделирования различных динамических процессов, в которых необходимо учитывать зависимость скорости процесса не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. Развитие теории устойчивости движений систем дифференциально-разностных уравнений, берущее начало в работах Н. Н. Красовского [1], Р. Беллмана и К. Л. Кука [2], Дж. Хейла [3] и В. И. Зубова [4]–[5],до настоящего времени является актуальной темой исследований. В предложенной работе затрагивается вопрос появления в системах дифференциально-разностных уравнений асимптотических положений покоя. Понятие асимптоттического положения покоя для систем дифференциальных уравнений было введено В. И. Зубовым [6] в связи с необходимостью изучения таких движений, которые имеют предельное поведение при неограниченном возрастании времени, причем сами

[1] **Зараник Ульяна Петровна**, старший преподаватель кафедры теории управления,ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7604-4999, zaranik_u@list.ru

[2] **Купцова Светлана Евгеньевна**, доцент кафедры теории управления,ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0168-3256, sekuptsova@yandex.ru

[3] **Степенко Николай Анатольевич**, доцент кафедры теории управления,ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9532-8831, nick_st@mail.ru

предельные множества не являются инвариантными множествами исходных дифференциальных уравнений. Исследование таких движений для систем дифференциальных уравнений проводилось в работах [7]–[10], для систем разностных уравнений — в работах [11]–[12]. В настоящей работе это понятие распространяется на системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Основным методом исследования качественного поведения решений систем дифференциальных уравнений является второй метод Ляпунова. Для дифференциально-разностных уравнений данный метод разделяется на два подхода. В первом, который получил название метод Красовского, в качестве функциий Ляпунова для исследования устойчивости уравнений предлагается использовать функционалы Ляпунова-Красовского. Во втором методе уравнения движения исследуются при помощи классической функции Ляпунова, но производная этой функции в силу системы оценивается не на всем множестве интегральных кривых, а на некотором его подмножестве. Этот метод получил название метода Разумихина [13]–[14]и именно он применялся в данной работе для исследования поведения решений систем дифференциально-разностных уравнений.

2. Основные определения и обозначения

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h)), \tag{2.1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ — неизвестный n-мерный вектор; $h > 0$ — запаздывание; $f(t,x,y) = (f_1, \ldots, f_n)^\top$ — n-мерная вектор-функция, относительно которой мы предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, т.е. для любого числа $H > 0$ найдется число $L = L(H) \geq 0$ такое, что для любых n-мерных векторов x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$, удовлетворяющих условию $\|x\| \leq H$, $\|\bar{x}\| \leq H$, $\|y\| \leq H$, $\|\bar{y}\| \leq H$ и для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$\|f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})\| \leq L\big(\|x-\bar{x}\| + \|y-\bar{y})\|\big).$$

Под $\|z\|$ здесь и далее понимается евклидова норма вектора.

Придерживаясь терминологии из [15], обозначим через $PC\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ n-мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода, через $x(t,t_0,\varphi)$ — решение системы (2.1), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $x(t,t_0,\varphi) \equiv \varphi(t-t_0)$ при $t \in [t_0-h, t_0]$, $\varphi \in PC\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$. Здесь и далее предполагаем, что $t_0 \in \mathbb{R}^1_+$, где $\mathbb{R}^1_+ = \big\{t \in \mathbb{R}^1 \bigm| t \geq 0\big\}$. Известно [3], что при выполнении условий, наложенных на правую часть системы, найдется $\beta > 0$ такое, что $x(t,t_0,\varphi)$ будет продолжимо, по крайней мере, на множество $[t_0-h, t_0+\beta]$, причем $x(t,t_0,\varphi)$ будет непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_0+\beta]$.

Под состоянием системы в момент $t \geq t_0$ будем понимать сегмент решения $x(t,t_0,\varphi)$, принадлежащий отрезку $[t-h,t]$, т.е.

$$x_t(t_0,\varphi) : s \to x(t+s,t_0,\varphi), \quad s \in [-h,0].$$

При этом начальное состояние системы определится следующим образом:

$$x_{t_0}(t_0,\varphi) : s \to \varphi(s), \quad s \in [-h,0].$$

Обозначим $X = PC\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ и пусть φ – произвольный элемент множества X. Введем норму φ следующим образом:

$$\|\varphi\|_h = \sup_{s\in[-h,0]} \|\varphi(s)\|.$$

Определение 2.1 *Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя для траекторий системы* (2.1), *если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|\varphi\|_h < \varepsilon$, решение $x(t,t_0,\varphi)$ системы* (2.1) *будет определено на множестве $t \geq t_0$ и*

$$\|x(t,t_0,\varphi)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.2}$$

Определение 2.2 *Положение $x = 0$ назовем асимптотическим положением покоя в целом, если все решения системы* (2.1) *определены на множестве $t \geq t_0$ и обладают свойством* (2.2).

Пусть при каждом $t \in \mathbb{R}^1_+$ на множестве X определен функционал $W(t,\varphi)$. Под функционалом будем понимать отображение $W : \mathbb{R}^1_+ \times X \to \mathbb{R}^1$.

Определение 2.3 *Функционал $W(t,\varphi)$ будем называть непрерывным на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times X$ если для любых $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}^1_+$ и $\varphi \in X$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $\tau \in \mathbb{R}^1_+$ и $\psi \in X$, удовлетворяющих соотношению $|t-\tau| + \|\varphi - \psi\|_h < \delta$, выполнено $|W(t,\varphi) - W(\tau,\psi)| < \varepsilon$.*

Рассмотрим функцию $V(t,x)$, определенную и непрерывную на множестве $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$, а также непрерывную и положительную на множестве $t \geq 0$ функцию $\lambda(t)$.

Определение 2.4 *Функцию $V(t,x)$ назовем отрицательно определенной на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, если*

1. *$V(t,x)$ непрерывна по всем своим аргументам на множестве $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;*
2. *$V(t,x) \leq -V_1(x)$ на множестве $\|x\| \geq \lambda(t)$, где $V_1(x)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что $V_1(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.*

После подстановки в $V(t,x)$ решения $x(t,t_0,\varphi)$ получим функцию времени $v(t) = V\big(t, x(t,t_0,\varphi)\big)$. Под производной функции $V(t,x)$ вдоль решений системы (2.1) будем понимать производную по времени от функции $v(t)$ и обозначать $\dot V|_{(2.1)}$. В случае существования у $V(t,x)$ частных производных, $\dot V|_{(2.1)}$ может быть найдена следующим образом:

$$\dot V|_{(2.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \big(\nabla V, f\big) = W(t,x_t). \tag{2.3}$$

Понятно, что для рассматриваемых нами систем функционал $W(t,x_t) = \widetilde{W}(t,x(t),x(t-h))$. Будем говорить, что $V(t,x)$ непрерывно-дифференцируема вдоль решений системы, если функционал в правой части равенства (2.3) является непрерывным.

Введем еще одно вспомогательное определение, которое будем использовать в доказательствах теорем.

Определение 2.5 *Пусть $v(t)$ — непрерывная на множестве $t \geq t_0$ функция. Будем говорить, что для некоторого числа c точка $t_1 > t_0$ обладает свойством (A) на множестве $t \in [t_1 - \Delta, t_1]$, если для некоторого $\Delta > 0$ будут выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{cases} v(t_1) = c, \\ v(t) < c, \quad t \in [t_1 - \Delta, t_1). \end{cases}$$

3. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в целом

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 *Если для системы* (2.1) *существуют непрерывная на множестве* $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^n$ *функция* $V(t,x)$ *и непрерывный на множестве* $\mathbb{R}^1_+ \times X$ *функционал* $W(t,x_t)$ *такие, что*

1. $V_1(x) \le V(t,x) \le V_2(x)$, *где функции* $V_1(x)$ *и* $V_2(x)$ *положительно определены в* $\mathbb{R}^n$ *и* $V_1(x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to +\infty$;
2. $\dot{V}|_{(2.1)} = W(t,x_t)$, *причем функционал* $W(t,x_t)$ *таков, что вдоль интегральных кривых системы* (2.1), *удовлетворяющих условию* $V\big(\xi, x(\xi,t_0,\varphi)\big) \le g\big(V\big(t,x(t,t_0,\varphi)\big)\big)$ *для всех* $\xi \in [t-h,t)$, *допускает оценку*
$$W(t,x_t) \le W_1(t,x),$$
где функция $W_1(t,x)$ *отрицательно определена на множестве* $\|x\| \ge \lambda(t)$;
3. $g(r)$ *– длиннее непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве* $r \ge 0$ *функция, удовлетворяющая условию* $g(r) > r$ *при* $r > 0$;
4. $\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}^1_+)$, $\lambda(t) > 0$ *и* $\lambda(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$,

тогда $x = 0$ *является асимптотическим положением покоя в целом для траекторий системы* (2.1).

Доказательство. Выберем произвольный момент $t_0 \ge 0$, произвольную кусочно-непрерывную на $[t_0-h,t_0]$ начальную функцию $\varphi(t)$ и рассмотрим решение $x(t,t_0,\varphi)$. Сделаем следующее замечание.

Замечание 3.1 *По условиям теоремы функционал* $W(t,x_t)$ *задан и непрерывен на множестве* $\mathbb{R}^1_+ \times X$, *следовательно, у функции* $v(t) = V(t,x(t,t_0,\varphi))$ *будет существовать производная* $\dot{v}(t) = w(t) = W(t,x_t(t_0,\varphi))$ *на всем интервале существования решения* $t \in \big[t_0, T(t_0,\varphi)\big)$ *за исключением,может быть, конечного числа точек разрыва первого рода, расположенных на множестве* $[t_0,t_0+h]\bigcap[t_0,T(t_0,\varphi)\big)$.

Для каждого $t \ge 0$ определим функцию $l(t)$ следующим образом:
$$l(t) = \sup_{\|x\|<\lambda(t)} V_2(x).$$
В силу выполнения первого и четвертого условий теоремы $l(t)$ будет задана и ограничена на множестве $t \ge 0$, а также обладать следующим свойством
$$l(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty. \tag{3.1}$$
Также для всех t из области определения $x(t,t_0,\varphi)$ будут справедливы следующие соотношения
$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \|x(t,t_0,\varphi)\| < \lambda(t), \quad \text{то} \quad v(t) \le l(t), \\ &\text{если} \quad v(t) > l(t), \quad \text{то} \quad \|x(t,t_0,\varphi)\| \ge \lambda(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

1. Покажем продолжимость решения $x(t,t_0,\varphi)$ на интервал $[t_0,+\infty)$. Пусть это не так, тогда найдется момент $t_* \ge t_0$ такой, что решение $x(t,t_0,\varphi)$ определено на множестве

$t \in [t_0, t_*)$ и не определено при $t = t_*$. Тогда либо существуют некоторое число $H_0 > 0$ и последовательность $\tau_k \to t_* - 0$ такие, что $\|x(\tau_k, t_0, \varphi)\| \le H_0$ для любого $k \ge 1$, что противоречит теореме существования и единственности решения основной начальной задачи [3], либо

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow t_* - 0,$$

что исходя из первого условия теоремы влечет за собой выполнение условия

$$v(t) \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow t_* - 0. \tag{3.3}$$

В силу того, что $w(t)$ может иметь только конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, существует $\Delta_1 > 0$ такое, что она будет непрерывной при $t \in (t_* - \Delta_1, t_*)$. Из ограниченности функции $l(t)$ и соотношения (3.3) следует, что существует величина $\Delta_2 > 0$ такая, что $v(t) > l(t)$ при $t \in [t_* - \Delta_2, t_*)$. Положим $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ и определим положительные число

$$L_0 = \max_{[t_0 - h, t_* - \Delta]} v(t).$$

В силу соотношения (3.3) для числа $2L_0$ найдется точка $t_1 \in (t_* - \Delta, t_*)$, обладающая на $[t_* - \Delta, t_1]$ свойством (A); следовательно, $\dot{v}(t_1) \ge 0$. С другой стороны, $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$ для любого $t \in [t_1 - h, t_1)$ и в силу (3.1) $\|x(t, t_0, \varphi)\| \ge \lambda(t)$ при $t \in [t_* - \Delta, t_1]$; следовательно, в силу третьего условия теоремы, $\dot{v}(t_1) < 0$. Полученное противоречие устанавливает продолжимость $x(t, t_0, \varphi)$ на множество $t \ge t_0$.

2. Покажем ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$. Заметим, что в силу первого условия теоремы для этого достаточно показать ограниченность функции $v(t)$. Предположим, что это не так, тогда для любого числа $M > 0$ существует число $T = T(M) \ge t_0$ такое, что $v(T) > M$. Следовательно, для величины

$$L = \max_{[0, +\infty)} l(t)$$

найдется $T_0 \ge t_0 + h$ такой, что $v(T_0) > L$. Определим константу

$$L_0 = \max_{[t_0, T_0]} v(t).$$

Для числа $2L_0$ найдется точка $t_1 > T_0$, обладающая на $[t_0, t_1]$ свойством (A);, следовательно, $\dot{v}(t_1) \ge 0$. С другой стороны, $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$ для любого $t \in [t_1 - h, t_1)$ и $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| \ge \lambda(t_1)$, следовательно; $\dot{v}(t_1) < 0$. Полученное противоречие говорит о том, что $v(t) \le 2L_0$ для любого $t \ge t_0$, что доказывает ограниченность решения $x(t, t_0, \varphi)$.

3. Покажем, что $\|x(t, t_0, \varphi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Для этого достаточно установить, что $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, т.е. для любого $\gamma > 0$ существует $T = T(\gamma) > 0$ такой, что

$$v(t) \le \gamma \quad \text{при} \quad t \ge T. \tag{3.4}$$

Обозначим через Γ множество всех чисел γ, для которых соотношение (3.4) выполнено. Это множество не является пустым, т.к. число $2L_0$ из второго пункта доказательства теоремы, принадлежит Γ. Заметим, что для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что $\inf \Gamma = 0$. Предположим, что это не так пусть

$$\inf \Gamma = \gamma_0 > 0. \tag{3.5}$$

Из свойств функции g следует, что существует $\eta_0 = \eta_0(\gamma_0) > 0$ такая, что

$$g(r) - r > 2\eta_0 \quad \text{при} \quad \gamma_0 - \eta_0 \le r \le \gamma_0 + \eta_0. \tag{3.6}$$

В силу соотношения (3.1) существует момент $t_1 \geq t_0 + h$ такой, что $l(t) < \gamma_0 - \eta_0$ при $t \geq t_1$. Число $\gamma_0 + \eta_0 \in \Gamma$, следовательно, существует $t_2 \geq t_1$ такой, что $v(t) \leq \gamma_0 + \eta_0$ при $t \geq t_2$. Поскольку $\gamma_0 - \eta_0 \notin \Gamma$, для любого $t \geq t_2 + h$ найдется момент $t_3 > t$ такой, что

$$v(t_3) > \gamma_0 - \eta_0. \tag{3.7}$$

В силу непрерывности функции $v(t)$ существует число $\Delta > 0$ такое, что

$$\gamma_0 - \eta_0 \leq v(t) \leq \gamma_0 + \eta_0 \quad \text{для любого} \quad t \in [t_3 - \Delta, t_3],$$

тогда из (3.6) следует, что $\gamma_0 + \eta_0 < g\big(v(t)\big)$ при $t \in [t_3 - \Delta, t_3]$; следовательно, на том же отрезке будет выполнено

$$v(\xi) \leq \gamma_0 + \eta_0 < g\big(v(t)\big) \quad \text{при} \quad \xi \in [t - h, t).$$

Из соотношения (3.2) следует, что

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t) \quad \text{при} \quad t \in [t_3 - \Delta, t_3].$$

Таким образом, при $t \in [t_3 - \Delta, t_3]$ можно воспользоваться вторым условием теоремы. Обозначим

$$\min_{x \in [\gamma_0 - \eta_0, \gamma_0 + \eta_0]} \overline{W}_1(x) = \alpha > 0,$$

где $W_1(x)$ – длиннее положительно определенная в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что

$$W_1(t, x) \leq -\overline{W}_1(x) \quad \text{на множестве} \quad \|x\| \geq \lambda(t).$$

Тогда

$$\dot{v} \leq -\alpha \quad \text{при} \quad t \in [t_3 - \Delta, t_3]. \tag{3.8}$$

Для момента t_3 возможны два случая:

1. существует $t_* \in [t_3 - \Delta, t_3)$ такой, что $v(t_*) = \gamma_0 - \eta_0$;

2. $v(t) > \gamma_0 - \eta_0$ для любого $t \in [t_2 + h, t_3]$.

В первом случае, интегрируя неравенство (3.8) в пределах от t_* до t_3, придем к противоречию с (3.7):

$$\gamma_0 - \eta_0 < v(t_3) \leq v(t_*) - \alpha(t_3 - t_*) = \gamma_0 - \eta_0 - \alpha(t_3 - t_*) < \gamma_0 - \eta_0.$$

Следовательно, $v(t) \leq \gamma_0 - \eta_0$ для всех $t \geq t_*$. Во втором случае проинтегрируем неравенство (3.8) в пределах от $t_2 + h$ до t:

$$v(t) \leq v(t_2 + h) - \alpha(t - t_2 - h) \leq \gamma_0 + \eta_0 - \alpha(t - t_2 - h).$$

Понятно, что обязательно найдется момент $t_* > t_2 + h$, в который впервые нарушится неравенство $v(t) > \gamma_0 - \eta_0$, т.е. будет справедливо равенство $v(t_*) = \gamma_0 - \eta_0$. Согласно (3.7), существует $t_4 > t_*$ такой, что $v(t_4) > \gamma_0 - \eta_0$, а тогда для момента t_4 будет возможен лишь первый из рассмотренных, для момента t_3 случаев и, следовательно, $v(t) \leq t_*$ для всех $t \geq t_*$.

Таким образом, было установлено, что число $\gamma_0 - \eta_0 \in \Gamma$, что противоречит предположению (3.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Достаточные условия существования локального асимптотического положения покоя

Пусть H -некоторое положительное число. Обозначим

$$\Omega = \big\{(t,x) \;\big|\; t \in \mathbb{R}^1_+,\ \|x\| \le H\big\}.$$

Теорема 4.1 *Если для системы* (2.1) *существуют непрерывная на множестве* Ω *функция* $V(t,x)$ *и непрерывный на множестве* $\mathbb{R}^1_+ \times X$ *функционал* $W(t,x_t)$ *такие, что*

1. *$V(t,x)$ положительно определена на множестве Ω и допускает бесконечно малый высший предел;*

2. *$\dot V|_{(2.1)} = W(t,x_t)$, причем функционал $W(t,x_t)$ таков, что вдоль интегральных кривых системы (2.1), удовлетворяющих условию $V\big(\xi, x(\xi,t_0,\varphi)\big) \le$ $\le g\big(V\big(t,x(t,t_0,\varphi)\big)\big)$ для всех $\xi \in [t-h,t)$, допускает оценку*

$$W(t,x_t) \le W_1(t,x),$$

где функция $W_1(t,x)$ отрицательно определена на множестве $\lambda(t) \le \|x\| \le H$;

3. *$g(r)$ – непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве $r \ge 0$ функция, удовлетворяющая условию $g(r) > r$ при $r > 0$;*

4. *$\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}^1_+)$, $\lambda(t) > 0$ и $\lambda(t) \to 0$ при $t \to +\infty$;*

5. *существует число $H_1 > \Lambda$, $H_1 < H$ такое, что*

$$\sup_{\|x\|<\Lambda} V(t,x) < \inf_{\|x\|=H_1} V(t,x), \quad \text{где} \quad \Lambda = \max_{t\ge 0} \lambda(t),$$

тогда $x = 0$ является асимптотическим положением покоя для траекторий системы (2.1).

Доказательство. На множестве $\mathbb{R}^1_+$ определим числа

$$c_0 = \sup_{\|x\|<\Lambda} V(t,x) \quad \text{и} \quad c = \inf_{\|x\|=H_1} V(t,x)$$

Рассмотрим произвольный момент $t_0 \ge 0$, произвольную кусочно-непрерывную на $[t_0-h,t_0]$ начальную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую соотношению $\|\varphi\|_h < \Lambda$ и интегральную кривую $x(t,t_0,\varphi)$. Покажем, что

$$\|x(t,t_0,\varphi)\| < H_1 \quad \text{для любого} \quad t \ge t_0. \tag{4.1}$$

Предположим противное: пусть существует момент $t_1 > t_0$ такой, что $\|x(t_1,t_0,\varphi)\| = H_1$, тогда, в силу того, что $v(t_0) \le c_0$, $v(t_1) > c$ и $c_0 < c$, найдется момент $t_* \in (t_0,t_1]$, в который впервые нарушится неравенство $v(t) < c$. Таким образом, для данного c число t_* на множестве $t \in [t_0-h,t_*)$ обладает свойством (A); следовательно, если существует $\dot v(t_*)$, то $\dot v(t_*) \ge 0$. С другой стороны, $v(t) < v(t_*) < g(v(t_*))$ при $t \in [t_*-h,t_*)$ и $\|x(t_*,t_0,\varphi)\| \ge \lambda(t_*)$, т.к. $v(t_*) > l(t_*)$, следовательно, по второму условию теоремы 2 $\dot v(t_*) < 0$. Полученное для точки t_* противоречие назовем противоречием (B).

Если у $v(t)$ не существует производной в точке t_*, то из замечания (3.1) следует, что найдется число $\Delta > 0$ такое, что $v(t)$ будет непрерывно дифференцируемой на интервале

$t \in (t_* - \Delta, t_*)$. Также найдутся числа $\tilde{c}$, достаточно близкие к числу c, $\tilde{c} < c$ и $\tilde{t} \in (t_* - \Delta, t_*)$, для которых будет выполнено свойство (A), что приведет к противоречию (B).

Таким образом, справедливость соотношения (4.1) установлена. Доказательство стремления к нулю решения $x(t, t_0, \varphi)$ будет полностью повторять третий пункт доказательства теоремы 3.1

Доказательство закончено.

Замечание 4.1 *Отметим, что применение приведенных теорем может быть полезно в случае исследования поведения решений систем с возмущениями*

$$\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h)) + R(t, x_t),$$

если известно ,что система $\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h))$ *имеет асимптотически устойчивое в целом нулевое решение и вектор возмущений такой, что*

$$\|R(t, x_t)\| \leq \overline{R}(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty.$$

5. Примеры использования приведенных теорем

Пример 5.1 *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = -2x^3(t) + x^3(t-h) + e^{-t}. \tag{5.1}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем $V(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ и вычислим

$$\dot{V}|_{(5.1)} = -2x^4(t) + x(t)x^3(t-h) + x(t)e^{-t} = W\big(t, x(t), x(t-h)\big).$$

Очевидно, что функция $V(x)$ удовлетворяет первому условию теоремы 3.1 и функционал W непрерывен в смысле определения 2.3 Обозначим $x = x(t)$ и $y = x(t-h)$, выберем произвольное число $p \in (1, \sqrt[3]{2})$ и рассмотрим множество

$$M = \big\{(x, y) \;\big|\; V(y) < pV(x)\big\} = \big\{(x, y) \;\big|\; |y| < p|x|\big\},$$

где $g(r) = pr$ была выбрана функция pr. На множестве M функционал W допускает следующую оценку

$$W(t, x, y) < -4x^4 + 2p^3|x|^4 + 2|x|e^{-t} = -(4 - 2p^3)x^4 + 2|x|e^{-t} = W_1(t, x).$$

Обозначим $Q = \sqrt[3]{\dfrac{4}{4 - 2p^3}}$ и рассмотрим функцию $\lambda(t) = Qe^{-\dfrac{t}{3}}$. Тогда

$$W_1(t, x) \leq -(2 - p^3)x^4 \quad \text{на множестве} \quad |x| \geq Qe^{-\dfrac{t}{3}}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1, и значит, положение $x = 0$ является для уравнения (5.1) асимптотическим положением покоя в целом.

П р и м е р 5.2 *Рассмотрим уравнение*

$$\dot{x} = -8x^3(t) + x^3(t-h) + x^5(t) + e^{-t}. \qquad (5.2)$$

Построим функции $V(t,x)$, $\lambda(t)$, $g(r)$, $W_1(t,x)$ и функционал $W(t,x(t),x(t-h))$ из условий теоремы 4.1. В качестве функции $V(t,x)$ возьмем $V(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ и вычислим

$$\dot{V}|_{(5.2)} = -8x^4(t) + x(t)x^3(t-h) + x^6(t) + x(t)e^{-t} = W\big(t, x(t), x(t-h)\big).$$

Обозначим $x = x(t)$ и $y = x(t-h)$ и представим функционал W в следующем виде

$$W(t,x,y) = -8x^4 + xy^3 + x^6 + xe^{-t} = \overline{W}(x,y) + x^6 + xe^{-t}.$$

На плоскости (x,y) построим множество

$$N = \big\{(x,y) \mid \overline{W}(x,y) < 0\big\} = \big\{(x,y) \mid y < 2x, \quad x > 0\big\} \bigcup \big\{(x,y) : y > 2x, \quad x < 0\big\}.$$

Очевидно, что

$$M = \Big\{(x,y) \mid V(y) < \frac{3}{2}V(x)\Big\} = \Big\{(x,y) \mid |y| < \frac{3}{2}|x|\Big\} \subset N.$$

где $g(r) = \frac{3}{2}r$ была выбрана функция $\frac{3}{2}r$. Оценим $W(t,x,y)$ на множестве M :

$$W(t,x,y) < -8x^4 + \frac{27}{8}|x|^4 + x^6 + |x|e^{-t} \le -4x^4 + x^6 + |x|e^{-t} = W_1(t,x).$$

Рассмотрим функцию $\lambda(t) = e^{-\dfrac{t}{3}}$. На множестве $\lambda(t) \le |x| \le \sqrt{2}$ справедлива оценка

$$W_1(t,x) \le -4x^4 + 2x^4 + x^4 = -x^4.$$

Также заметив, что $\Lambda = 1$ и $H_1 = \sqrt{2}$, убедимся в выполнении пятого условия теоремы 4.1:

$$1/2 = \sup_{|x|<1} V(x) < \inf_{|x|=\sqrt{2}} V(x) = 1.$$

Таким образом, все решения $x(t,t_0,\varphi)$ уравнения (5.2), при выполнении условия $\|\varphi\|_h < 1$ будут стремиться к нулю при $t \to +\infty$.

Список литературы

1. Н. Н. Красовский, *"Некоторые задачи теории устойчивости движения"*, Гос. изд-во физ.-мат. литературы, М., 1959, 211 с.

2. Р. Беллман, К. Кук, *"Дифференциально-разностные уравнения"/ пер. с англ.; под ред. Л. Э. Эльсгольца*, М., 1967, 548 с.

3. Дж. Хейл, *"Теория функционально-дифференциальных уравнений"/ пер. с англ.*, Мир, М., 1984, 421 с.

4. В. И. Зубов, *"Лекции по теории управления"*, Наука, М., 1975, 496 с.

У. П. Зараник, С. Е. Купцова, Н. А. Степенко. Достаточные условия…

5. В. И. Зубов, “"К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом"”, *Известия вузов. Математика*, **6** (1958), 86–95.

6. В. И. Зубов, *"Колебания и волны"*, Изд-во ЛГУ, Л., 1989, 416 с.

7. С. Е. Купцова, *"Асимптотически инвариантные множества Процессы управления и устойчивость: Тр. 37-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб, 2006.

8. С. Е. Купцова, “"Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений"”, *Труды Средневолжского математического общества*, **8**:1 (2006), 235-243.

9. О. Г. Тихомиров, Е. В. Темкина, “"Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений"”, *Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления*, 2014, №2, 58-65.

10. A. V. Ekimov, M. V. Svirkin, “Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method”, *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 45-47.

11. С. Е. Купцова, “Асимптотические положения покоя в системах разностных уравнений”, *Системы управления и информационные технологии*, **56**:2 (2014), 67-71.

12. S. Yu. Kuptsov, S. E. Kuptsova, U. P. Zaranik, “On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations”, *2015 International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov (SCP) // IEEE*, 2015, 20-22.

13. Б. С. Разумихин, “Об устойчивости систем с запаздыванием”, *Прикладная математика и механика*, **20**:4 (1956), 500-512.

14. Б. С. Разумихин, “Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием”, *Автомат. и телемех*, **21**:6 (1960), 740-748.

15. V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Basel, Birkhäuser, 2013, 311 с.

Поступила 25.03.2018

MSC2010 34K20

Sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position in time-delay systems

© U. P. Zaranik[1], S. E. Kuptsova[2], N. A. Stepenko[3]

Abstract. In the present paper we study motions of time-delay systems. In particular, the case is studied, when the system has zero limit position which may not be an invariant set with respect to initial differential-difference equations. The concept of an asymptotic quiescent position for the trajectories of time-delay systems is introduced. Sufficient conditions for existence of an asymptotic quiescent position and an asymptotic quiescent position in the large are obtained. The method of proof is based on the modification of the second Lyapunov method, which was proposed by Razumikhin. Its idea is to use the classical Lyapunov functions, but to evaluate their derivatives along the solutions of the system not on the entire set of integral curves of the system, but on its certain subset. The article considers examples of non-linear time-delay equations that have an asymptotic quiescent position illustrating the theory being developed.

Key Words: Lyapunov stability, nonlinear time-delay systems, asymptotic stability of quiescent position, asymptotic quiescent position, Lyapunov function, Razumihin's approach.

References

1. N. N. Krasovskiy, *"[Some problems of the theory of stability of motions]"*, [State Publ.of phys. and math. literature], Moscow, 1959 (In Russ.), 221 p.

2. R. Bellman, K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniia [Differencial-Difference Equations]*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.

3. J. Hale, *"[Theory of functional differential equations]"*, Mir Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 300 p.

4. V. I. Zubov, *"[Lectures on theory of control]"*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 496 p.

5. V. I. Zubov, “"[To the theory of linear time-delay systems]"”, *"[Proc. of Higher Educational Institutions. Mathematics]"*, **6** (1958), 86-95 (In Russ.).

6. V. I. Zubov, *"[Oscillations and waves]"*, Leningrad. State University Publ., Leningrad, 1989 (In Russ.), 416 p.

7. S. E. Kuptsova, “"[An asymptotically invariant sets]"”, *Control Processes and Stability*, 2006, 50-56 (In Russ.).

[1] **Uliana P. Zaranik**, Senior Lecturer, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University,(Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint-Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7604-4999, zaranik_u@list.ru

[2] **Svetlana E. Kuptsova**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0168-3256, sekuptsova@yandex.ru

[3] **Nikolai A. Stepenko**, Associate Professor, Department of Space Technologies and Applied Astrodynamics, Saint-Petersburg State University (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9532-8831, nick_st@mail.ru

8. S. E. Kuptsova, “"[On the asymptotic behavior of solutions of systems of nonlinear nonstationary differential equations]"”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **8**:1 (2006), 235-243 (In Russ.).

9. O. G. Tikhomirov, E. V. Temkina, “"[Asymptotic quiescent position for systems of homogeneous non-autonomous differential equations]"”, *Vestnik SPbGU. Series 10. Applied mathematics, computer science and control processes*, 2014, № 2, 58-65 (In Russ.).

10. A. V. Ekimov, M. V. Svirkin, “Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method”, *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 45-47.

11. S. E. Kuptsova, “"[Asymptotic quiescent positions in systems of difference equations]"”, *Sistemy upravleniia i informatsionnye tekhnologii*, **56**:2 (2014), 67-71 (In Russ.).

12. S. Yu. Kuptsov, S. E. Kuptsova, U. P. Zaranik, “On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations”, *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 20-22.

13. B. S. Razumikhin, “[On the stability of systems with a delay]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **20**:4 (1956), 500-512 (In Russ.).

14. B. S. Razumikhin, “"[Application of Lyapunov’s method to problems in the stability of systems with a delay]"”, *Automatika i telemekhanika*, **21**:6 (1960), 740-749 (In Russ.).

15. V. L. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*, Basel, Birkhäuser, 2013, 311 c.

Submitted 25.03.2018