DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.159-174

УДК 517.9

Представление просторно расположенных совершенных аттракторов диффеоморфизмов геодезическими ламинациями

© **В. З. Гринес** [1], **Е. Д. Куренков** [2]

Аннотация. Статья посвящена топологической классификации одномерных базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A С. Смейла и заданных на ориентируемых поверхностях отрицательной Эйлеровой характеристики, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны. С помощью методов геометрии Лобачевского каждому совершенному просторно расположенному одномерному аттрактору A-диффеоморфизма однозначно ставится в соответствие геодезическая ламинация на поверхности. Устанавливается, что при отсутствии в аттракторе связок степени два существует гомотопный тождественному гомеоморфизм поверхности, отображающий аттрактор на геодезическую ламинацию таким образом, что непересекающиеся неустойчивые многообразия из аттрактора отображаются в различные слои геодезической ламинации. Более того, если неблуждающие множества гомотопных A-диффеоморфизмов обладают совершенными просторно расположенными аттракторами без связок степени два, то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации совпадают. Полученные результаты позволят разработать топологическую классификацию ограничений A-диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей на одномерные совершенные просторно расположенные базисные множества посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов.

Ключевые слова: диффеоморфизм, аксиома A, совершенное базисное множество, аттрактор, репеллер, геодезическая ламинация

1. Введение и формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $p \geqslant 2$, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла [1] (А-диффеоморфизмы). Согласно спектральной теореме С. Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Примерами нетривиальных (отличных от периодических орбит) базисных множеств диффеоморфизмов двумерных многообразий являются двумерное базисное множество диффеоморфизма f на M^2 (в этом случае базисное множество совпадает с многообразием M^2, которое есть двумерный тор, а f – диффеоморфизм Аносова)и одномерное базисное множество DA-диффеоморфизма двумерного тора, полученного из диффеоморфизма Аносова применением "хирургической операции" [1]. В работе [5] хирургическая

[1] **Вячеслав Зигмундович Гринес**,Научный руководитель лаборатории топологических методов в динамике, ФГБУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4709-6858, vgrines@hse.ru

[2] **Куренков Евгений Дмитриевич**, стажер-исследователь лаборатории топологических методов в динамике, ФГБУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru

операция С. Смейла была обобщена на случай псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей таким образом, что путем применения ее к любому псевдоаносовскому гомеоморфизму, заданному на ориентируемой поверхности рода $g \geqslant 2$, строится структурно устойчивый диффеоморфизм этой же поверхности, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного совершенного одномерного просторно расположенного аттрактора и конечного числа источниковых периодических точек (см. определения 1.1, 1.2 ниже). Однако вопрос о нахождении условий, при выполнении которых полученные диффеоморфизмы являются топологически сопряженными, авторами не рассматривался.

В настоящей работе делается первый шаг в решении этой задачи. Для каждого одномерного совершенного проторно расположенного аттрактора Λ A-диффеоморфизма f строится единственная геодезическая ламинация $\mathcal{L}$, дополнение к которой состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску. В случае, когда аттрактор не содержит связок степени 2 (см. определение 1.3 ниже), устанавливается существование гомотопного тождественному гомеоморфизма поверхности, переводящего неустойчивые многообразия точек аттрактора Λ в слои построенной геодезической ламинации $\mathcal{L}$. Более того, если неблуждающие множества гомотопных A-диффеоморфизмов f и f' обладают совершенными просторно расположенными аттракторами Λ и Λ', то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают.

Определение 1.1 *Нетривальное базисное множество* Λ A*-диффеоморфизма* $f\colon M^2 \to M^2$ *назовем совершенным, если его дополнение* $M^2 \setminus \Lambda$ *состоит из конечного числа областей* Δ_i, $i=\overline{1,k}$ *гомеоморфных диску.*

Согласно [2], дадим следующее определение.

Определение 1.2 *Базисное множество* Λ A*-диффеоморфизма* $f\colon M^2 \to M^2$ *называется просторно расположенным, если для различных точек* $x, y \in \Lambda$ *любая замкнутая кривая, составленная из дуг* $[x,y]^s \subset W^s_x$ *и* $[x,y]^u \subset W^u_x$, *не гомотопна нулю*[3].

Отметим, что нетривиальные базисные множества A-диффеоморфизмов, построенных в [5], являются совершенными и просторно расположенными.

В разделе 2. (лемма 2.1) будет показано, что совершенное базисное множество A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ является связным одномерным множеством. С другой стороны, из работы [2] (Теорема 3) следует, что одномерное базисное множество A-диффеоморфизма двумерной поверхности является либо аттрактором, либо репеллером, и в силу [2] (Теорема 1) содержит в первом случае неустойчивые, а во втором случае устойчивые многообразия своих точек[4].

Пусть Λ — одномерный просторно расположенный совершенный аттрактор A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$. Следуя [3] и [7], назовем периодическую точку $p \in \Lambda$ граничной периодической точкой базисного множества, если одна из компонент линейной связности множества $W^s_p \setminus p$, не пересекается с Λ. Согласно [7], граничные периодические точки в одномерном аттракторе существуют, и их число конечно. Аналогично [7] устанавливается, что достижимая изнутри граница[5] каждой области Δ, принадлежащей

[3] $[x,y]^s, [x,y]^s, (x,y)^u, (x,y)^u$ обозначают отрезки и интервалы, ограниченные точками x, y, содержащиеся в одномерных устойчивом W^s_x и неустойчивом W^u_x многообразиях соответственно.

[4] Базисное множество A-диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует такая компактная окрестность U множества A, что $f(U) \subset int(U)$ и $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} f^k(U) = A$, базисное множество называется репеллером, если оно является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} (см., например, [14])

[5] Достижимой изнутри границей области Δ называется подмножество $C \subset \Lambda$ такое, что множество $C \cup \Delta$ является линейно связным.

$M^2 \setminus \Lambda$, состоит из конечного числа одномерных неустойчивых многообразий $W^u_{p_1}, \dots W^u_{p_{r_C}}$ ($r_C \geqslant 1$) граничных периодических точек $p_1, \dots p_{r_C}$ множества Λ (набор точек $p_1, \dots p_{r_C}$, и их число r_C зависит от компоненты Δ). Согласно [4], дадим определение.

Определение 1.3 *Множество* $C = \bigcup\limits_{j=1}^{r_C} W^u_{p_j}(\Delta)$, *являющееся достижимой изнутри границей компоненты связности* Δ *множества* $M^2 \setminus \Lambda$, *называется связкой степени* r_C.

В разделе 2.2. (следствие 2.1) будет показано, что любой одномерный совершенный просторно расположенный аттрактор на поверхности рода $g \geqslant 2$ обладает по крайней мере одной связкой степени не менее третьей.

Введем на M^2 аналитическую структуру, превращающую M^2 в риманову поверхность. Рассмотрим конформное отображение π универсальной накрывающей $\bar{M}^2$ на M^2, где $\bar{M}^2$ — плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z-плоскости. Известно [13], что M^2 соответствует однозначно определенная дискретная группа Γ неевклидовых переносов таких, что M^2 конформно эквивалентно $\bar{M}^2/\Gamma$ и Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M^2)$ многообразия M^2. Обозначим через $\pi \colon \bar{M}^2 \to M^2$ естественную проекцию.

Каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ имеет две и только две неподвижные точки: устойчивую γ^+ и неустойчивую γ^-, и эти точки лежат на абсолюте $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Согласно [6], точки абсолюта, являющиеся неподвижными для какого-либо элемента $\gamma \in \Gamma$ ($\gamma \neq id$), называются рациональными. Множество рациональных точек является счетным и всюду плотным на абсолюте [13]. Точки, принадлежащие дополнению к множеству рациональных точек на абсолюте, называются иррациональными.

Обозначим через $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$ полный прообраз множества Λ на $\bar{M}^2$. Пусть W^u_x — неустойчивое многообразие точки x аттрактора Λ, $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ ($\pi(\bar{x}) = x$) — компонента линейной связности прообраза W^u_x (при проекции π), содержащая точку $\bar{x}$.

Следующие утверждения взяты из предложения 2.3 (пункты 1,5,6) и используются в конструкции геодезической ламинации:

- $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$ ($u^1_{\bar{x}} \neq u^2_{\bar{x}}$), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными;

- если $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ — компоненты линейной связности прообразов неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек, такие что $\bar{w}^u_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}} = \varnothing$, то точки $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}, u^1_{\bar{y}}, u^2_{\bar{y}}$ попарно различны;

- если $\bar{w}^u_{\bar{p}} \subset \bar{\Lambda}$ — компонента линейной связности прообраза неустойчивого многообразия, содержащего граничную периодическую точку p, то существуют граничные периодические точки $q, r \in \Lambda$, отличные от p (q может совпадать с r); единственная кривая $\bar{w}^u_{\bar{q}} \subset \bar{\Lambda}$ такая, что $\bar{w}^u_{\bar{q}}$ имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку $u^1_{\bar{p}}$, и единственая кривая $\bar{w}^u_{\bar{r}} \subset \bar{\Lambda}$ такая, что $\bar{w}^u_{\bar{r}}$ имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку $u^2_{\bar{p}}$ (если $q = r$, то $\bar{w}^u_{\bar{q}} = \bar{w}^u_{\bar{r}}$).

Следуя [9], введем понятие геодезической ламинации $\mathcal{L}$, соответствующей совершенному просторно расположенному аттрактору Λ A-диффеоморфизма f.

Пусть Λ — совершенный аттрактор; $w^u_{\bar{x}}$ — компонента линейной связности множества $\bar{\Lambda}$ с граничными точками $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$ на абсолюте, тогда обозначим через $\bar{l}(u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}})$ геодезическую на $\bar{M}^2$ с граничными точками $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$. Если $W^u_x = \pi(w^u_{\bar{x}})$ ($\pi(\bar{x}) = x$), то назовем геодезическую $l(W^u_x) = \pi(\bar{l})$ соответствующей неустойчивому многообразию W^u_x. Множество геодезических, построенных для всех компонент линейной связности из множества $\bar{\Lambda}$, обозначим через $\bar{\mathcal{L}}$. Положим $\mathcal{L} = \pi(\bar{\mathcal{L}})$ и назовем множество $\mathcal{L}$ *геодезической ламинацией*, соответствующей базисному множеству Λ. Если W^u_p является неустойчивым многообразием граничной периодической точки p и не принадлежит связке степени 2, то поставленную ей в соответствие геодезическую l будем называть *граничной* геодезической; в противном случае геодезическую, соответствующую W^u_p будем называть *внутренней.* Согласно построению, каждому неустойчивому многообразию базисного множества Λ ставится в соответствие единственная геодезическая из ламинации $\mathcal{L}$, при этом связке степени 2 соответствует единственная геодезическая из ламинации $\mathcal{L}$, а каждой геодезической из ламинации $\mathcal{L}$ (кроме тех, которые соответствуют связке степени 2) соответствует в точности одно неустойчивое многообразие из Λ.

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1 *Для ламинации $\mathcal{L}$ верны следующие свойства.*

1. *Множество $\mathcal{L}$ является замкнутым.*
2. *Любая геодезическая l из $\mathcal{L}$ плотна в $\mathcal{L}$.*
3. *Множество $M^2 \backslash \mathcal{L}$ состоит из конечного числа областей, гомеоморфных открытому диску, достижимая изнутри граница каждой из которых состоит из конечного числа (не меньше 3) граничных геодезических.*

Теорема 1.2 *Пусть $f\colon M^2 \to M^2$ и $f\colon M^2 \to M^2$ — гомотопные A-диффеоморфизмы, обладающие совершенными просторно расположенными аттракторами Λ и Λ' соответственно. Тогда соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают.*

Теорема 1.3 *Пусть Λ совершенный просторно расположенный аттрактор A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ без связок степени 2. Тогда существует гомотопный тождественному гомеоморфизм $h\colon M^2 \to M^2$ такой, что $h(\Lambda) = \mathcal{L}$ и для любого многообразия W^u_x, $x \in \Lambda$ существует единственный слой l ламинации $\mathcal{L}$ такой, что $h(W^u_x) = l$.*

2. Вспомогательные сведения и результаты

2.1. Связность и одномерность совершенного базисного множества

Основной результат данного раздела (лемма 2.1) основан на на следующем топологическом факте. Пусть $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — стандартный открытый диск.

Предложение 2.1 *Пусть M^2 — произвольная связная компактная поверхность; $\varphi_i\colon D^2 \to M^2$, $i = \overline{1,k}$ — вложения диска D^2 в поверхность M^2 такие, что $\varphi_i(D^2) \cap \varphi_j(D^2) = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Тогда $M^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(D^2)$ является связным компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $D^2_r \subset D^2$ — открытый диск радиуса $r > 0$ (считаем, что $D^2_1 = D^2$), а $\mathbb{S}^1_r$ — окружность радиуса r. Покажем, что множество $M^2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(D^2_r)$ при

$0<r<1$ — связное компактное множество. Действительно, т.к. φ_i — гомеоморфизмы на образ, то $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$ — открытое множество, значит $M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$ замкнуто и, следовательно, компактно, как замкнутое подмножество компактного пространства. Покажем, что $M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$ — линейно связное множество. Пусть $p,q\in M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$ — произвольные точки, а $l\colon I\to M^2$ $(I=[0,1])$ — путь, соединяющий их в M^2. Покажем, что точки x,y можно соединить путем, лежащим в $M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$. Если $l(I)\subset M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$, то путь l — искомый. Предположим, что $l(I)\cap\varphi_i(D^2_r)\neq\varnothing$ для некоторого i. В силу теоремы Жордана, примененной к множеству $\varphi_i(D^2)$, пересечение $\varphi_i(S^1_r)\cap l(I)$ непусто. Поскольку множество $\varphi_i(S^1_r)\cap l(I)$ замкнуто, то среди точек $l^{-1}(\varphi_i(S^1_r)\cap l(I))$ найдутся минимальная x_m и максимальная x_M. При этом $x_m\neq x_M$ в силу открытости $\varphi_i(D_r)$. Построим путь $l_i\colon I\to M^2\setminus\varphi_i(D^2_r)$, совпадающий с l на отрезках $[0,x_m]$ и $[x_M,1]$ а также с одной из дуг окружности $\varphi(\mathbb{S}^1_r)$ на отрезке $[x_m,x_M]$. Повторяя, если нужно, описанную процедуру последовательно для всех индексов i таких, что $l(I)\cap\varphi(D^2_r)\neq\varnothing$, получим путь $\tilde{l}\colon I\to M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$, соединяющий точки p и q. Таким образом, множество $M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_r)$ является линейно связным, а, следовательно, связным.

Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую последовательность $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ $r_j\to 1$ при $j\to\infty$. Ей соответствует последовательность вложенных компактных связных множеств $A_1\supset A_2\supset\ldots\supset A_j\supset\ldots$, где $A_j=M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2_{r_j})$. Положим $A=M^2\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(D^2)$.

Покажем, что для любой открытой окрестности U множества A найдется номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что для любого $j>N$ выполнено включение $A_j\subset U$. Предположим противное, тогда $A_j\cap(M^2\setminus U)\neq\varnothing$ для бесконечного числа индексов j. Рассмотрим последовательность точек $\{y_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ такую, что $y_{j_l}\in A_j\cap(M^2\setminus U)$. Поскольку множество $M^2\setminus U$ компактно как замкнутое подмножество компактного пространства, то без ограничения общности последовательность $\{y_{j_l}\}$ можно считать сходящейся к некоторой точке $y\in M^2\setminus U$. Т.к. каждое множество A_j замкнутое, то имеет место включение $y\in A_j$ для любого $j\in\mathbb{N}$, но тогда в силу $A=\bigcap\limits_{j=0}^{\infty}A_j$ имеет место включение $y\in A$, что противоречит тому, что $A\subset U$.

Покажем теперь, что множество A связно. Предположим противное,тогда найдется пара непустых непересекающихся замкнутых множеств B_1 и B_2 таких, что $A=B_1\cup B_2$. Поскольку поверхность M^2 является нормальным топологическим пространством, то найдутся две непересекающиеся открытые окрестности U_1 и U_2 множеств B_1 и B_2. В силу доказанного выше найдется такой номер $N\in\mathbb{N}$, что для любого $j>N$ имеют место включения $A_j\subset U_1\cup U_2$, причем $A_j\cap U_1\neq\varnothing$ и $A_j\cap U_2\neq\varnothing$ в силу того, что $A\subset A_j$ для любого $j\in\mathbb{N}$. Получили противоречие со связностью множества A_j.
Доказательство закончено.

Согласно [16], любое базисное множество Λ единственным образом представляется в виде конечного объединения $\Lambda=\Lambda_1\cup\ldots\cup\Lambda_q$, $q\geqslant 1$ замкнутых подмножеств, называемых периодическими компонентами такими, что $f(\Lambda_i)=\Lambda_{i+1}$ при $i=\overline{1,q-1}$, $f(\Lambda_q)=\Lambda_1$. Для любой точки $x\in\Lambda_i$ множества $W^s_x\cap\Lambda_i$ и $W^u_x\cap\Lambda_i$ плотны в Λ_i

Л е м м а 2.1 *Совершенное базисное множество* Λ A*-диффеоморфизма* $f\colon M^2 \to M^2$ *замкнутой поверхности* M^2 *является связным одномерным множеством и, следовательно, состоит в точности из одной периодической компоненты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения совершенности базисного множества следует, что дополнение к Λ состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску. Тогда в силу предложения 2.1 оно является связным и, следовательно, состоит из одной периодической компоненты. Покажем теперь, что Λ является одномерным. Предположим противное, тогда Λ либо нульмерно, либо двумерно. Если Λ нульмерно, то в силу его нетривиальности оно состоит более чем из одной точки. С другой стороны, в силу нульмерности оно должно быть вполне несвязным, что противоречит его связности.

Предположим, что Λ двумерно. Тогда множество Λ совпадает с объемлющим многообразием M^2 (см, например, [14], Теорема 8.1.1), что противоречит определению совершенного базисного множества.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 2.2 *Пусть* Λ *— совершенное базисное множество;* $C = \bigcup\limits_{i=1}^{r} W^u_{p_i}$ *— достижимая изнутри граница диска* Δ*, принадлежащего дополнению* $M^2 \setminus \Lambda$*. Тогда для любой точки* $y \in C$ *найдется путь* $\psi_y\colon I \to \Delta \cup C$ *такой, что* $\psi_y(1) = y$ *и* $\psi_y(t) \in \Delta$ *для любого* $t \in [0, 1)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $W^u_{p_i} \subset C$ с топологией, совпадающей со стандартной топологией прямой $\mathbb{R}^1$. Пусть $V \subset W^u_{p_i}$ — множество точек $y \in W^u_{p_i}$, для которых существует путь $\psi_y\colon I \to \Delta \cup W^u_{p_i}$ такой, что $\psi_y(1) = y$ и $\psi_y(t) \in \Delta$ для любого $t \in [0, 1)$. Покажем, что V является открытым множеством. Рассмотрим произвольную точку $y \in V$. В силу [2] (теорема 2) найдется окрестность U точки y такая, что $U \cap \Lambda$ гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на интервал. Из этого следует, что если l — компонента линейной связности множества $U \cap \Lambda$, содержащая точку y, то компонента связности множества $U \setminus l$, содержащая образ полуинтервала $\psi([0, 1))$, не пересекается с Λ. Из этого следует включение $l \subset V$. Аналогично показывается, что дополнения $W^u_{p_i} \setminus V$ открыто, а следовательно, V замкнуто.

Таким образом, множество V является непустым открытым и замкнутым подмножеством $W^u_{p_i}$, и, следовательно, с ним совпадает.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

2.2. Асимптотическое поведение прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий одномерного совершенного аттрактора на плоскости Лобачевского. Построение совершенной геодезической ламинации

Пусть Λ — одномерный совершенный аттрактор A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$. Следующее определение и предложения 2.2, 2.3 были введены и доказаны в серии работ [7] [4], [10], [11], [12] (см. также [14], Лемма 9.1.3., Теорема 9.1.2., Лемма 9.3.2.) в предположениях различной общности.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Простая замкнутая кривая* C_Λ *называется квазитрансверсалью аттрактора* Λ*, если:*

1) C_Λ *является объединением дуг* $C^u = [z, y]^u \subset W^u_z$ *и* $C^s = [y, z]^s \subset W^s_z$ *для некоторых точек* $z, y \in \Lambda$*;*

2) $(y,z)^s \cap \Lambda \neq \varnothing$ *;*

3) индекс пересечения W^u_z *и* W^s_z *принимает одно и то же значение в точках* z *и* y*.*

Существование квазитрансверсали для совершенного аттрактора следует непосредственно из плотности неустойчивых многообразий точек в аттракторе (см. [14], Лемма 9.1.1). Кроме того, в силу просторной расположенности множества Λ квазитрансверсаль C_Λ является негомотопной нулю кривой.

Из свойств универсального накрытия $\pi\colon \bar{M}^2 \to M^2$ следует, что полный прообраз $\bar{C}_\Lambda = \pi^{-1}(C_\Lambda)$ на $\bar{M}^2$ разбивается на счетное множество кривых без самопересечений таких, что:

1) каждая кривая $\bar{c} \in \bar{C}_\Lambda$ имеет в точности две граничные точки, являющиеся неподвижными точками некоторого элемента $\gamma_{\bar{c}}$ такого, что для любой точки $\bar{x} \in \bar{c}$ дуга $(\bar{x}, \gamma_{\bar{c}}(\bar{x}))$ не содержит когруэнтных точек в силу какого-либо элемента группы Γ, отличного от тождественного;

2) любые две кривые $\bar{c}, \bar{c}'$ из множества $\bar{C}_\Lambda$ не имеют общих граничных точек на абсолюте.

Существование квазитрансверсали позволяет исследовать асимптотические свойства прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек совершенного просторно расположенного аттрактора Λ на универсальном накрытии поверхности M^2 (плоскости Лобачевского).

Согласно [7] (Лемма 2.2), для любой точки $x \in \Lambda$ каждая из компонент линейной связности множества $W^u_x \setminus x$ плотна в Λ, и пересечение компоненты линейной связности $W^s_x \setminus x$, не содержащей граничной периодической точки из Λ, с множеством Λ также плотно в Λ.

Пусть $W^{\delta+}_x$, где $\delta \in \{s,u\}$ — плотная в Λ компонента связности множества $W^\delta_x \setminus x$. Тогда из определения квазитрансверсали следует, что пересечение $W^{\delta+}_x \cap C_\Lambda$ не пусто и состоит из счетного множества точек. Поэтому существует последовательность кривых $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_i, \ldots \subset \bar{C}_\Lambda$ таких, что пересечение $\bar{c}_i \cap \bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}$ не пусто для любого $i \in \mathbb{N}$, где $\pi(\bar{w}^\delta_{\bar{x}}) = W^\delta_x$ и $\bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}$ — компонента связности множества $w^\delta_{\bar{x}} \setminus \bar{x}$ такая, что $\pi(\bar{w}^{\delta+}_{\bar{x}}) = W^{\delta+}_x$.

Следующие два предложения доказывается аналогично [6] (Теорема 1) (см. также [14] Леммы 9.1.3., Теорема 9.1.2., Лемма 9.3.2.).

Предложение 2.2 *Топологический предел кривых* $\bar{c}_i$ *на множестве* $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$ *состоит из единственной иррациональной точки, принадлежащей* $\mathbb{E}$*.*

Для совершенного аттрактора Λ обозначим через $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$ полный прообраз множества Λ на $\bar{M}^2$.

Предложение 2.3 *Пусть* $W^{s(u)}_x$ *— устойчивое (неустойчивое) многообразие точки* x *аттрактора* Λ*;* $\bar{w}^{s(u)}_{\bar{x}}$ *(*$\pi(\bar{x}) = x$*) — компонента линейной связности прообраза* $W^{s(u)}_x$ *(при проекции* π*), содержащая точку* $\bar{x}$*. Тогда*

1) $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ *является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек* $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}$ *(*$u^1_{\bar{x}} \neq u^2_{\bar{x}}$*), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;*

2) если W^s_x *не содержит граничной периодической точки, то* $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ *является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек* $s^1_{\bar{x}}, s^2_{\bar{x}}$ *(*$s^1_{\bar{x}} \neq s^2_{\bar{x}}$*), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;*

3) если W^s_x содержит граничную периодическую точку p, то $\bar{w}^s_{\bar{x}}$ является гладкой кривой, граница которой состоит из одной граничной точки $s_{\bar{x}}$, лежащей на абсолюте и являющейся иррациональной точкой, и одной граничной точки $\bar{p}$ такой, что $\pi(\bar{p}) = p$;

4) если $p \in \Lambda$ — внутренняя периодическая точка периода k и $\bar{f}_k$ поднятие отображения f^k такое, что $\bar{f}_k(\bar{p}) = \bar{p}$, то гомеоморфизм $\bar{f}^2_k$ имеет единственную неподвижную точку $\bar{p}$ на $\bar{M}^2$ и в точности четыре неподвижные точки $u^1_{\bar{p}}, u^2_{\bar{p}}, s^1_{\bar{p}}, s^2_{\bar{p}}$ на абсолюте $\mathbb{E}$.

5) если $\bar{w}^u_{\bar{x}}$ и $\bar{w}^u_{\bar{y}}$ — компоненты линейной связности прообразов неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек таких что $\bar{w}^u_{\bar{x}} \cap \bar{w}^u_{\bar{y}} = \varnothing$, тогда точки $u^1_{\bar{x}}, u^2_{\bar{x}}, u^1_{\bar{y}}, u^1_{\bar{y}}$ попарно различны;

6) если $\bar{w}^u_{\bar{p}} \subset \bar{\Lambda}$ — компонента линейной связности прообраза неустойчивого многообразия, содержащего граничную периодическую точку p, то существуют граничные периодические точки $q, r \in \Lambda$, отличные от p (q может совпадать с r), единственная кривая $\bar{w}^u_{\bar{q}} \subset \bar{\Lambda}$ такая, что имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку $u^1_{\bar{p}}$, и единственая кривая $\bar{w}^u_{\bar{r}} \subset \bar{\Lambda}$ такая, что имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку $u^2_{\bar{p}}$ (если $q = r$, то $\bar{w}^u_{\bar{q}} = \bar{w}^u_{\bar{r}}$).

Лемма 2.3 *Пусть Δ — открытый диск, принадлежащий дополнению $M^2 \setminus \Lambda$; $C = \bigcup\limits_{j=1}^{r_C} W^u_{p_j}$ — его достижимая изнутри граница. Тогда каждая компонента связности его прообраза $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ представляет собой идеальный криволинейный многоугольник[6] с r граничными точками $e_1, e_2, \dots, e_r$ на абсолюте, являющимися его вершинами.*

Доказательство.

Шаг 1. Покажем, что прообраз $\pi^{-1}(\Delta)$ представляет собой счетное объединение непересекающихся открытых дисков $\bar{\Delta}_i$, гомеоморфных Δ.

Пусть $\bar{\Delta}$ — произвольная компонента линейной связности прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$. Покажем, что ограничение $\pi|_{\bar{\Delta}} \colon \bar{\Delta} \to \Delta$ является гомеоморфизмом. Заметим, что в силу того, что $\pi^{-1}(\Delta)$ — открытое и локально линейно связное множество, компонента линейной связности $\bar{\Delta}$ прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$ является открытым множеством. Покажем, что ограничение $\pi|_{\bar{\Delta}} \colon \bar{\Delta} \to \Delta$ является инъективным. Предположим противное, тогда найдутся две различные точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{\Delta}$ такие, что $\pi(\bar{x}_1) = \pi(\bar{x}_2) = x$. Рассмотрим путь $\bar{\psi} \colon I \to \bar{\Delta}_1$, соединяющий точки $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. Тогда $\pi \circ \bar{\psi} \colon I \to D$ является петлей в точке x, содержащейся в диске Δ. В силу односвязности Δ существует гомотопия $\Psi \colon I \times I \to \Delta$, стягивающая петлю $\pi \circ \bar{\psi}$ в точку x. Но тогда теореме о накрывающей гомотопии, путь $\bar{\psi}$ также можно было бы стянуть в точку с сохранением неподвижных концов в точках $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, что не является возможным. Покажем, что $\pi|_{\bar{\Delta}_i}$ является сюрьективным. Пусть $\bar{x} \in \bar{\Delta}$ — произвольная точка. Положим $\pi(\bar{x}) = x$. Рассмотрим произвольную точку $y \in \Delta$. Тогда найдется путь $\psi_y \colon I \to \Delta$, соединяющий точки x и y. Пусть $\bar{\psi}_y$ — поднятие данного пути с началом в точке $\bar{x}$. Очевидно, что $\bar{\psi}_y(1) \in \bar{\Delta}$ и $\pi(\psi_y(1)) = y$. Таким образом, $\pi|_{\bar{\Delta}} \colon \bar{\Delta} \to \Delta$ является взаимно-однозначным ограничением локального гомеоморфизма π на открытое множество $\bar{\Delta}$, и, следовательно, является гомеоморфизмом.

Шаг 2. Пусть $\bar{w}_{p_i}$ — компонента линейной связности прообраза $\pi^{-1}(W^u_{p_i})$ неустойчивого многообразия $W^u_{p_i} \subset C$. Покажем, что существует ровно одна компонента линейной связности $\bar{\Delta}$ множества $\pi^{-1}(\Delta)$ такая, что множество $\bar{w}_{p_i} \cup \bar{\Delta}$ является линейно связным.

[6] В геометрии Лобачевского идеальным называется многоугольник, сторонами которого являются геодезические, а вершины принадлежат абсолюту.

Рассмотрим поднятие пути $\psi\colon I \to \Delta \cup W^u_{p_i}$, соединяющего какую-либо точку $x \in W^u_{p_i}$ с точкой $y \in \Delta$, т.е. $\psi(0) = x$ и $\psi(1) = y$. Обозначим через $\bar{\Delta}$ компоненту связности прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$, содержащую точку $\bar{\psi}(1)$, где $\bar{\psi}\colon I \to \bar{M}^2$ — поднятие пути ψ с начальной точкой $\bar{x} \in \bar{w}_{p_i}$. Тогда множество $\bar{w}_{p_i} \cup \bar{\Delta}$ является линейно связным.

Покажем, что $\bar{\Delta}$ является единственной компонентой, обладающей указанным свойством. Предположим противное. Тогда найдется компонента $\bar{\Delta}_1$, отличная от $\bar{\Delta}$ и обладающая этим свойством. Из леммы 2.2 следует, что найдется путь $\bar{\psi}\colon I \to \bar{\Delta} \cup \bar{\Delta}_1 \cup \bar{w}_{p_i}$ такой, что $\bar{\psi}([0, 1/2)) \subset \bar{\Delta}$, $\bar{\psi}((1/2, 1]) \subset \bar{\Delta}_1$ и $\bar{\psi}(1/2) \in \bar{w}_{p_i}$. Однако, силу того, что π является локальным гомеоморфизмом, у точки $\bar{\psi}(1/2)$ найдется окрестность U такая, что $U \cap \bar{\Lambda}$ гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на интервал. Заметим, что в силу того, что граничные точки кривой $\bar{w}_{p_i}$ лежат на абсолюте, окрестность U можно выбрать достаточно малой так, чтобы она пересекалась с $\bar{w}_{p_i}$ лишь по одному интервалу. Поскольку канторовское множество не содержит изолированных точек, кривые $\bar{\psi}([0, 1/2)) \subset \bar{\Delta}$ и $\bar{\psi}((1/2, 1]) \subset \bar{\Delta}_1$ имеют непустое пересечение с одной и той же компонентой связности множества $U \setminus \bar{w}_{p_i}$; следовательно, $\bar{\Delta} \cap \bar{\Delta}_1 \neq \varnothing$, а это противоречит результату шага 1.

Шаг 3. Покажем, что для любой компоненты связности $\bar{\Delta}$ прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$ и для любой кривой $W^u_{p_i} \in C$ найдется ровно одна компонента линейной связности $\bar{w}_{p_i}$ прообраза $\pi^{-1}(W^u_{p_i})$ такая, что множество $\bar{\Delta} \cup \bar{w}_{p_i}$ линейно связно.

Рассмотрим поднятие пути $\psi\colon I \to \Delta \cup W^u_{p_i}$, соединяющего какую-либо точку $x \in \Delta$ с точкой $y \in W^u_{p_i}$, т.е. $\psi(0) = x$ и $\psi(1) = y$, обозначим через $\bar{w}_{p_i}$ компоненту линейной связности прообраза $\pi^{-1}(W^u_{p_i})$, содержащую точку $\bar{\psi}(1)$, где $\bar{\psi}\colon I \to \bar{M}^2$ — поднятие пути ψ с начальной точкой $\bar{x} \in \bar{\Delta}$. Кривая $\bar{w}_{p_i}$ является искомой.

Предположим теперь, что найдется компонента $\bar{w}^1_{p_i}$, отличная от $\bar{w}_{p_i}$ и обладающая указанным свойством. Пусть $\bar{y}_1 \in \bar{w}_{p_i}$ и $\bar{y}_2 \in \bar{w}^1_{p_i}$ — точки такие, что $\pi(\bar{y}_1) = \pi(\bar{y}_2) = y$, и пусть $\gamma \in \Gamma$ — такой элемент, что $\gamma(y_1) = y_2$. Рассмотрим достаточно малую связную окрестность U точки $\bar{y}_1$ такую, что множество $U \setminus \bar{w}_{p_i}$ состоит из двух компонент связности U_1 и U_2 таких, что $U_1 \subset \bar{\Delta}$ и $U_2 \cap \bar{\Delta} = \varnothing$. Положим $\widetilde{U} = \gamma(U)$. Аналогично множество $\widetilde{U} \setminus \bar{w}^1_{p_i}$ состоит из двух компонент связности $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ таких, что $\widetilde{U}_1 \subset \gamma(\bar{\Delta})$ и $\widetilde{U}_2 \cap \gamma(\bar{\Delta}) = \varnothing$. $\gamma(U \cap \bar{w}_{p_i}) = \tilde{U} \cap \bar{w}^1_{p_i}$, имеет место ровно одна из следующих пар равенств: либо $\gamma(U_1) = \widetilde{U}_1$, $\gamma(U_2) = \widetilde{U}_2$, либо $\gamma(U_1) = \widetilde{U}_2$, $\gamma(U_1) = \widetilde{U}_2$. Т.к. в силу шага 1 $\gamma(\bar{\Delta}) \cap \bar{\Delta} = \varnothing$, то первая пара равенств не удовлетворяет требованиям. Если бы при этом выполнялась вторая пара равенств, то множества $\bar{\Delta} \cup \bar{w}^1_{p_i}$ и $\gamma(\bar{\Delta}) \cup \bar{w}^1_{p_i}$ являлись бы линейно связными,что противоречило бы результату шага 2. Полученное противоречие доказывает единственность.

Шаг 4. Утверждение леммы непосредственно вытекает из результатов шагов 1–3 и свойств 1 и 6 предложения 2.3

Доказательство закончено.

Следствие 2.1 *Если Λ — совершенный просторно расположенный аттрактор A-диффеоморфизма $f\colon M^2 \to M^2$ поверхности M^2 рода $g \geqslant 2$, то Λ содержит связку степени не меньше 3.*

Доказательство. Предположим противное, тогда все связки аттрактора Λ имеют степень 2. Прообраз $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ каждого множества $\Delta \cup C$ представляет собой объединение криволинейных идеальных двуугольников, не содержащих конгруэнтных точек.

Пусть $\bar{\Delta} \cup \bar{C}$ — один из таких двуугольников. Поскольку множество $\bar{\Delta} \cup \bar{C} \cup e_1 \cup e_2$ гомеоморфно замкнутому диску, то можно построить слоение без особенностей $\bar{L}_{\bar{\Delta}}$ в

диске $\bar{\Delta}$, для которого компоненты линейной связности множества $\bar{C}$ являются слоями. Дорасслоим оставшиеся диски прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$ с помощью элементов группы Γ, т.е. в каждом диске $\bar{\Delta}_i \subset \pi^{-1}(\Delta)$ рассмотрим слоение $\gamma(\bar{L}_{\bar{\Delta}})$, где $\gamma \in \Gamma$ такой элемент, что $\gamma(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta}_i$. Проведя аналогичные операции с прообразами других дисков, из множества $\bar{M}^2 \setminus \Lambda$ получили слоение без особенностей на $\bar{M}^2$. Т.к. каждый из дисков $\bar{\Delta}$ прообраза $\pi^{-1}(\Delta)$ не содержит конгруэнтных точек, то данное слоение проектируется на поверхность M^2, и в результате получается слоение без особенностей на поверхности рода $g \geqslant 2$, что не является возможным. Полученное противоречие доказывает следствие.
Доказательство закончено.

В дальнейших рассмотрениях мы будем использовать конструкцию, аналогичную введенной в [9]. Рассмотрим множество $(\mathbb{E}\times\mathbb{E})\setminus\Delta$, где Δ — диагональ прямого произведения $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$, и определим на нем отношение эквивалентности $\sim$ такое, что $(e_1, e_2) \sim (e_2, e_1)$ для любых $e_1, e_2 \in \mathbb{E}$. Положим $\mathbb{F} = ((\mathbb{E}\times\mathbb{E})\setminus\Delta)/\sim$. Непосредственно проверяется, что множество $\mathbb{F}$ гомеоморфно многообразию, полученному из пленки Мебиуса после удаления ее края. Пусть $\bar{L}$ — множество кривых без самопересечений на $\bar{M}^2$, каждая из которых имеет ровно две различные граничные точки на абсолюте. Определим отображение $\psi\colon \bar{L} \to \mathbb{F}$, ставящее в соответствие кривой $\bar{l} \in \bar{L}$ с граничными точками e_1, e_2 класс эквивалентности элемента $(e_1, e_2) \in (\mathbb{E}\times\mathbb{E})\setminus\Delta$, принадлежащий $\mathbb{F}$. Заметим, что по построению $\psi(\bar{\mathcal{L}}) = \psi(\bar{\Lambda})$.

Предложение 2.4 *Пусть Λ — совершенный аттрактор; и $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\bar{\Lambda}$, сходящаяся к некоторой точке $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$. Если $\{\bar{w}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\bar{w}$ — кривые из $\bar{\Lambda}$ такие, что $\bar{x}_i \in \bar{w}_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $\bar{x} \in \bar{w}$, то последовательность $\{\psi(\bar{w}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $\psi(\bar{w})$.*

Доказательство. Положим $f = \psi(\bar{w})$ и $f_i = \psi(\bar{w}_i)$. Пусть U — произвольная окрестность точки f; $(e_1, e_2) \in \mathbb{E}\times\mathbb{E}$ — представитель класса эквивалентности f. Рассмотрим окрестность $V \subset U$ точки f такую, что $V = ((I_1 \times I_2) \cup (I_2 \times I_1))/\sim$, где $I_1, I_2 \subset \mathbb{E}$ — непересекающиеся открытые интервалы, содержащие точки e_1 и e_2 соответственно.

В силу предложения 2.2 для любого $j \in \{1, 2\}$ найдутся такие кривые $\bar{c}_j \subset \bar{C}_\Lambda$, что граничные точки $\bar{c}_j$ содержатся в открытом интервале I_j. В силу непрерывной зависимости неустойчивых многообразий на компактных множествах найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $i > N$ имеет место $\bar{w}_i \cap c_j \neq \varnothing$. В силу того, что пересечение $\bar{w}_i \cap c_j$ состоит из единственной точки, граничные точки кривых $\bar{w}_i$ принадлежат интервалам I_1 и I_2 соответственно при $i > N$. Следовательно, $\psi(\bar{w}_i) \in V$ для всех $i > N$, что и означает сходимость последовательности $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ к точке f.
Доказательство закончено.

3. Свойства геодезической ламинации, представляющей совершенный просторно расположенный аттрактор

Пусть $\mathcal{L}$ — геодезическая ламинация, соответствующая совершенному просторно расположенному аттрактору Λ A-диффеоморфизма f (см. раздел 1.).

Доказательство теоремы 1.1 **Докажем пункт 1.** Вначале покажем, что множество $\psi(\bar{\Lambda})$ является замкнутым в $\mathbb{F}$. Для этого рассмотрим произвольную предельную точку f множества $\psi(\bar{\Lambda})$ и сходящуюся к ней последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $f_i \in \psi(\bar{\Lambda})$. Покажем, что $f \in \psi(\bar{\Lambda})$, т.е. найдется кривая $\bar{w} \subset \bar{\Lambda}$ (являющаяся прообразом неустойчивого многообразия некоторой точки из множества Λ) такая, что $\psi(\bar{w}) = f$. Рассмотрим последовательность $\{\bar{w}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\bar{w}_i\subset\Lambda$ такую, что $\psi(\bar{w}_i)=f_i$. Пусть (e_1,e_2) — точка из класса эквивалентности f. Зададим положительное направление обхода абсолюта $\mathbb{E}$ таким образом, что область $\bar{M}^2$ остается слева. Поскольку множество рациональных точек всюду плотно на абсолюте, существуют элементы $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ такие что, точки $\gamma_1^+,e_1,\gamma_2^+,e_2$ встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта. Пусть $U_1,U_2\subset\mathbb{E}$ — связные окрестности точек γ_1^+ и γ_2^+ соответственно, не содержащие точек e_1,e_2. Рассмотрим произвольную кривую $\bar{w}_u\subset\bar{\Lambda}$ с граничными точками u_1 и u_2 на абсолюте. В силу свойств элементов группы Γ найдутся целые числа n_1 и n_2 такие, что $(\gamma_1^+)^{n_1}(u_1),(\gamma_1^+)^{n_1}(u_2)\in U_1$ и $(\gamma_2^+)^{n_2}(u_1),(\gamma_2^+)^{n_2}(u_2)\in U_2$. Положим $\bar{w}_a=(\gamma_1^+)^{n_1}(\bar{w}_u)$ и $\bar{w}_b=(\gamma_2^+)^{n_2}(\bar{w}_u)$. Тогда точки a_1,a_2,e_1,b_1,b_2,e_2 встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении, где $a_1,a_2\in\mathbb{E}$ и $b_1,b_2\in\mathbb{E}$, граничные точки кривых $\bar{w}_a,\bar{w}_b\subset\bar{\Lambda}$ соответственно. Выберем любую кривую $\bar{v}$ из $\bar{L}$ с граничными точками v_1,v_2 на абсолюте такую, что:

1) точки $a_1,v_1,a_2,e_1,b_1,v_2,b_2,e_2$ встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении;

2) каждое из пересечений $\bar{v}\cap\bar{w}_a$ и $\bar{v}\cap\bar{w}_b$ состоит ровно из одной точки.

Поскольку $f_i\to f$ при $i\to\infty$, то при достаточно больших значениях i кривые $\bar{w}_i$ пересекаются с $\bar{v}$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $i\in\mathbb{N}$ пересечение $\bar{w}_i\cap\bar{v}$ не пусто и содержится в компактном фрагменте кривой $\bar{v}$, ограниченном точками $\bar{v}\cap\bar{w}_a$ и $\bar{v}\cap\bar{w}_b$. В каждом из множеств $\bar{w}_i\cap\bar{v}$ выберем по точке $\bar{x}_i$. Последовательность $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $\bar{x}\in\bar{M}^2$, т.к. она целиком содержится в компактном куске кривой $\bar{v}$, ограниченном точками $\bar{v}\cap\bar{w}_a$ и $\bar{v}\cap\bar{w}_b$. Так как множество $\bar{\Lambda}$ замкнуто, то найдется кривая $\bar{w}\in\bar{\Lambda}$, содержащая точку $\bar{x}$. В силу предложения 2.4 имеем равенство $\psi(\bar{w})=f$. Таким образом, $\psi(\bar{\Lambda})$ является замкнутым множеством.

Теперь покажем, что множество $\bar{\mathcal{L}}$ является замкнутым на $\bar{M}^2$. Пусть $\bar{x}$ — произвольная предельная точка множества $\bar{\mathcal{L}}$, $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ последовательность точек из $\bar{\mathcal{L}}$, сходящаяся к точке $\bar{x}$, такая, что $\bar{x}\neq\bar{x}_i$ для любого $i\in\mathbb{N}$. Пусть $\{\bar{l}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность геодезических из $\bar{\mathcal{L}}$, содержащих точки последовательности $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Положим $f_i=\psi(\bar{l}_i)$. Покажем, что последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $f\in\mathbb{F}$. Пусть U — произвольная компактная окрестность точки $\bar{x}$; L_U — множество всех геодезических на $\bar{M}^2$, имеющих непустое пересечение с U. Поскольку в модели Пуанкаре геодезические являются дугами окружностей, ортогональных абсолюту, то множество $\psi(L_U)$ является компактным подмножеством в $\mathbb{F}$. Т.к. все геодезические последовательности $\{\bar{l}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторой, содержатся в L_U, то последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку f, содержащуюся в $\psi(L_U)$. Множество $\psi(\bar{\mathcal{L}})$ совпадает с $\psi(\bar{\Lambda})$ и, следовательно, является замкнутым,поэтому $f\in\psi(\bar{\mathcal{L}})$. Тогда найдется геодезическая $\bar{l}\subset\bar{\mathcal{L}}$ такая, что $\psi(\bar{l})=f$. В силу свойств геодезических в модели Пуанкаре $\bar{x}\in\bar{l}$.

Замкнутость множества $\mathcal{L}$ следует теперь из равенств $\pi^{-1}(\pi(\bar{\mathcal{L}}))=\bar{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L}=\pi(\bar{\mathcal{L}})$ и замкнутости $\bar{\mathcal{L}}$.

Докажем пункт 2. Для этого достаточно показать что для любой кривой $\bar{w}\subset\bar{\Lambda}$ множество $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}\psi(\gamma(\bar{w}))$ плотно в $\psi(\bar{\Lambda})$. Действительно, отсюда следует что для любой геодезичекой $\bar{l}\subset\bar{\mathcal{L}}$ множество $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\bar{l})$ плотно в $\bar{\mathcal{L}}$ и, следовательно, в силу свойств накрытия π геодезическая $l=\pi(\bar{l})\subset\mathcal{L}$ плотна в $\mathcal{L}$.

Рассмотрим произвольную точку $f_0\in\psi(\bar{\Lambda})$. По построению найдется единственная кривая $\bar{w}_0\subset\bar{\Lambda}$ такая, что $\psi(\bar{w}_0)=f_0$. Пусть $w\subset\Lambda$ — произвольная кривая из Λ.

Покажем, что найдется последовательность $\{\bar{w}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $\pi(\bar{w}_i) = w$, и последовательность $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $f_i = \psi(\bar{w}_i)$ сходится к точке f_0. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \bar{w}_0$. Поскольку множество $\pi^{-1}(w)$ плотно в $\bar{\Lambda}$, то найдется последовательность точек $\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bar{x}_i \in \pi^{-1}(w)$, и $\bar{x}_i \to \bar{x}_0$ при $i \to \infty$. В силу предложения 2.4 в качестве $\bar{w}_i$ можно выбрать кривую из $\pi^{-1}(w)$, содержащую точку $\bar{x}_i$.

Докажем пункт 3. Пусть Δ — открытый диск, принадлежащий дополнению $M^2 \setminus \Lambda$ с достижимой изнутри границей $C = \bigcup\limits_{i=1}^{r_C} W^u_{p_i}$, где $r_C \geqslant 3$. В силу леммы 2.2 каждая компонента связности прообраза $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$ представляет собой идеальный криволинейный многоугольник с r граничными точками $e_1, e_2, \ldots, e_r$ на абсолюте, являющимися его вершинами.

По построению геодезической ламинации $\bar{\mathcal{L}}$ существует геодезический многоугольник A, принадлежащий $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$, граница которого состоит из объединения точек $e_1, e_2, \ldots, e_r$ и геодезических с граничными точками из множества $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$. Покажем, что ограничение $\pi|_{int(A)}$ является гомеоморфизмом на образ. Т.к. накрытие π является локальным гомеоморфизмом, а множество $int(A)$ открыто, то достаточно показать, что ограничение $\pi|_{int(A)}$ является инъективным. Предположим противное, тогда найдутся две точки $x, y \in A$ такие, что при некотором $\gamma \in \Gamma$ будет иметь место равенство $\gamma(x) = y$. Заметим, что элемент γ оставляет инвариантной геодезическую l_γ на плоскости Лобачевского, проходящую через точки x и y. Поскольку l_γ имеет рациональные граничные точки, а точки $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — иррациональные, то она обязана пересечься ровно с двумя сторонами геодезического многоугольника A. Пусть l_α — та из них, для которой точки $z = l_\alpha \cap l_\gamma, x, y$ располагаются на геодезической l_γ в указанном порядке. Рассмотрим геодезическую $\gamma(l_\alpha)$. Она делит плоскость Лобачевского $\bar{M}^2$ на две части так, что геодезическая l_α и точка y находятся по разные стороны от геодезической $\gamma(l_\alpha)$. Отсюда следует, что геодезическая $\gamma(l_\alpha)$ пересекается с одной из сторон многоугольника A, что невозможно, т.к. геодезическая $\gamma(l_\alpha)$ принадлежит ламинации $\bar{\mathcal{L}}$. Таким образом, множество $\pi(int(A))$ гомеоморфно открытому диску.

Покажем, что любая точка $\bar{x} \in \bar{M}^2$ принадлежит либо внутренности некоторого геодезического многоугольника A, либо геодезической ламинации $\bar{\mathcal{L}}$. Предположим противное, тогда найдется точка $\bar{x} \in \bar{M}^2 \setminus \bar{\mathcal{L}}$, не принадлежащая внутренности никакого геодезического многоугольника. Через точку $\bar{x}$ проведем геодезический луч $\bar{l}^+$, пересекающийся с $\bar{\mathcal{L}}$. Т.к. множество $\bar{\mathcal{L}}$ замкнутое, то на геодезическом луче $\bar{l}^+$ найдется точка $\bar{y} \in \bar{\mathcal{L}}$ такая, что отрезок луча $\bar{l}^+$, ограниченный точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$, не содержит точек, принадлежащих $\bar{\mathcal{L}}$. Тогда по построению ламинации $\bar{\mathcal{L}}$ геодезическая $\bar{l} \subset \bar{\mathcal{L}}$, содержащая точку $\bar{y}$, является граничной, но тогда по точка $\bar{x}$ обязана принадлежать внутренности некоторого геодезического многоугольника. Полученное противоречие завершает доказательство.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2 Без ограничения общности можно считать, что отображения f и f' таковы, что каждый диск из дополнения $M^2 \setminus \Lambda$ и $M^2 \setminus \Lambda'$ содержит единственную периодическую точку отображения f и f' соответственно, являющуюся источником. Пусть $p \in \Lambda$ — внутренняя периодическая точка периода k отображения f, а $\bar{p} \in \bar{\Lambda}$ — один из ее прообразов. В силу пункта 4 предложения 2.3 найдется такое поднятие $\bar{f}_k$ отображения f^k, для которого точка $\bar{p}$ будет являться неподвижной. Рассмотрим отображение $\bar{f}^2_k$. Т.к. f и f' — гомотопные отображения, то найдется поднятие $\bar{f}'_{2k}$ отображения f'^{2k} , индуцирующее такое же действие на абсолюте, что и отображение $\bar{f}^2_k$.

Рассмотрим два экземпляра пространства $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$, склеенных по тождественному отображению абсолюта $\mathbb{E}$ на себя. Данное пространство пространство гомеоморфно двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Пара отображений $\bar{f}_k^2$ и $\bar{f}'_{2k}$ индуцируют отображение сферы $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ на себя такое, что точка $\bar{p}$ является седловой неподвижной точкой, а точки $u^1_{\bar{p}}, u^2_{\bar{p}}, s^1_{\bar{p}}, s^2_{\bar{p}}$ — неподвижными узловыми. Тогда из формулы Лефшеца о сумме индексов неподвижных точек следует, что на копии $\bar{M}^2$, не содержащей точку $\bar{p}$, найдется по крайней мере одна неподвижная седловая точка $\bar{p}'$ отображения F. Точка $\bar{p}'$ является неподвижной седловой точкой отображения $\bar{f}'_{2k}$, причем $\bar{p}' \in \bar{\Lambda}'$. Из этого следует, что в ламинации $\bar{\mathcal{L}}'$ содержится геодезическая $\bar{l}$ с граничными точками $u^1_{\bar{p}}$ и $u^2_{\bar{p}}$ на абсолюте. Положим $l = \pi(\bar{l})$. Т.к. $l \subset \mathcal{L}$ и $l \subset \mathcal{L}'$, то в силу пунктов 1 и 2 теоремы 1.1 $\mathcal{L} = cl(l)$ и $\mathcal{L}' = cl(l)$, а следовательно, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.

Доказательство закончено.

Теорема 1.3 доказывается методами, аналогичными методам, примененным при доказательстве Теоремы 2.2. из работы [9], поэтому мы его опускаем.

Благодарности.Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), за исключением раздела 2.1., посвященного доказательству связности и одномерности совершенных базисных множеств, полученному в рамках выполнения программы ЦФИ (проект 95) НИУ ВШЭ за 2018 г.

Список литературы

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747-817.

2. Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)**:2 (1971), 301-312.

3. Р. В. Плыкин, “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243-264.

4. Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75-113.

5. А. Ю. Жиров, Р. В. Плыкин, “Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 779-781.

6. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем)”, *Матем. сб.*, **90(132)**:3 (1973), 372-402.

7. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I”, *Труды Московского математического общества*, **32** (1975), 35–60.

8. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II”, *Труды Московского математического общества*, **34** (1977), 243-252.

9. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О представлении минимальных множеств потоков на двумерных многообразиях геодезическими линиями”, *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **42**:1 (1978), 104-129.

10. В. З. Гринес, “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57-94.

11. V. Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports”, *J. Math. Sci.*, **95**:5 (1999), 2523-2545.

12. V. Z. Grines, “On topological classification of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:1 (2000), 97-126.

13. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flachen”, *Acta Math.*, **50**:1 (1927), 189-358.

14. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.–Ижевск, 2011.

15. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, Фазис, М.:, 1998.

16. R. Bowen, “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377-397.

Поступила 7.03.2018

MSC2010 37C70

Representation of spaciously situated perfect attractors of diffeomorphisms by geodesic laminations

© **V. Z. Grines** [1], **E. D. Kurenkov** [2]

Abstract. The present paper is devoted to the topological classification of one-dimensional basic sets of diffeomorphisms satisfying Smale's axiom A and defined on orientable surfaces of negative Euler characteristic equipped with a metric of constant negative curvature. Using methods of Lobachevsky geometry, each perfect one-dimensional attractor of A-diffeomorphism is uniquely associated with a geodesic lamination on the surface. It is established that, in the absence of special pairs of boundary periodic points in the attractor, there exists a homeomorphism of the surface homotopic to the identity that maps unstable manifolds of the basic set points into leaves of the geodesic lamination. Moreover, from the method of constructing geodesic laminations it follows that if the diffeomorphisms whose non-wandering sets contain perfect spaciously situated attractors are homotopic, then the geodesic laminations corresponding to these attractors coincide.
Key Words: diffeomorphism, axiom A, perfect basic set, attractor, repeller, geodesic lamination

References

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747-817.

2. R. V. Plykin, "[The topology of basic sets for Smale diffeomorphisms]", *Mat. Sb.*, **84(126)**:2 (1971), 301-312 (In Russ.).

3. R. V. Plykin, "[Sources and sink of A-diffeomorphisms of surfaces]", *Mat. Sb.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243-264 (In Russ.).

4. R. V. Plykin, "[On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades]", *Russian Mathematical Surveys*, **39**:6 (1984), 75-113] (In Russ.).

5. A. Yu. Zhirov, R. V. Plykin, "[On the relationship between onedimensional hyperbolic attractors of surfaces diffeomorphisms and generalized pseudo-anosov diffeomorphisms]", *Mathematica Votes*, **58**:1 (1995), 779-781 (In Russ.).

6. S. H. Aranson, V. Z. Grines, "[On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions sorthe of topological equivalence of transitive dynamical systems)]", *Matem. Sbornik*, **90**:3 (1973(132)), 372-402 (In Russ.).

7. V. Z. Grines, "[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifolds on onedimensional orientable basic sets I]", *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **32** (1975), 35–60 (In Russ.).

[1] **Viacheslav Z. Grines**, academic supervisor of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4709-6858, vgrines@hse.ru

[2] **Evgeniy D. Kurenkov**, research assistant of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3544-1143, ekurenkov@hse.ru

8. V. Z. Grines, “[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifolds on onedimensional orientable basic sets I]”, *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **34** (1977), 243-252 (In Russ.).

9. S. H. Aranson, V. Z. Grines, “[On the representation of minimal sets of currents on two-dimensional manifolds by geodesic]”, *Mathematic of the USSR- Isvestiya*, **42**:1 (1978), 104-129 (In Russ.).

10. V. Z. Grines, “[On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with onedimensional attractors and repellers]”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 57-94 (In Russ.).

11. V. Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports.”, *J. Math. Sci.*, **95**:5 (1999), 2523-2545.

12. V. Z. Grines, “On Topological Classification of A-Diffeomorphisms of Surfaces”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:1 (2000), 97-126.

13. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flachen”, *Acta Math.*, **50**:1 (1927), 189-358.

14. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, *Introduction to topological classification of cascades on manifolds of dimension two and three*, Regulyar. Khaotich. Dinam., Moscow–Izhevsk:, 2011 (In Russ.).

15. A. J. Casson, S. A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1998.

16. R. Bowen, “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans.Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377-397.

Submitted 7.03.2018