DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.148-158

УДК 517.984

Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма–Лиувилля

© **А. М. Ахтямов** [1], **И. М. Утяшев** [2]

Аннотация. Рассмотрена задача идентификации полиномиального коэффициента упругости среды по собственным частотам колеблющейся в этой среде струны. Приведен метод решения задачи, основанный на представлении линейно независимых решений дифференциального уравнения в виде рядов Тейлора по переменным x и λ. Разработан также метод, который позволяет доказывать не одного или многих восстановленного полиномиальных коэффициентов упругости среды по конечному числу собственных частот колебаний струны. Данный метод основан на методе вариации произвольной постоянной. Приведены примеры решения задачи и оценка погрешности результата. В работе показано, что для однозначной идентификации $n+1$ коэффициентов полинома степени n, являющимся потенциалом в задаче Штурма-Лиувилля, достаточно использовать $n+1$ собственное значение. При этом собственные значения берутся из двух разных краевых задач, отличающихся одним из краевых условий. Количество собственных значений в каждой задаче берется по половине. Если это число является нечетным, то количество собственных значений из спектра одной из задач будет на единицу большим. Приведен контрпример, из которого следует, что использование собственных частот только из одного спектра не позволяет найти единственное решение. По сути, приведенные результаты уточняют известную теорему Борга на случай, когда потенциал является полиномом. Кроме этого, метод, позволяющий выявить класс изоспектральных задач, для которых спектр собственных частот совпадает.

Ключевые слова: спектральная задача, идентификация потенциала, струна, обратная задача, собственные значения, полиномиальный потенциал, задача Штурма-Лиувилля,восстановление потенциала.

1. Введение

В 1929 г. В. А. Амбарцумян показал [1], что для краевой задачи с дифференциальным уравнением

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y \tag{1.1}$$

и краевыми условиями $y'(0) = y'(\pi) = 0$, где $q(x)$ – действительная непрерывная функция, и если $\lambda_n = n^2$, ($n = 0, 1, \dots$), то $q(x) \equiv 0$. Другими словами, было показано, что если спектр уравнения $y'' + \lambda y = 0$ при тех же краевых условиях сохранился, то вероятность возмущения отсутствовала. В 1946 г. [2] Г. Борг показал (см. также [3]), что один спектр не определяет уравнения, и случай Амбарцумяна является исключением. Г. Боргом были рассмотрены способы построения уравнения по двум спектрам. В дальнейшем в 50-х и 60-х г. XX в. в работах В. А. Марченко, Б. М. Левитана и М. Г. Гасымова были

[1] **Ахтямов Азамат Мухтарович**, профессор кафедры математического моделирования, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450074, Россия, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32), ФГБНУ Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (450054, Россия, г. Уфа, пр. Октября, д. 71), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2080-6648, akhtyamovam@mail.ru

[2] **Утяшев Ильнур Мирзович**, научный сотрудник, ФГБНУ Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (450054, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, пр. Октября, д. 71), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2342-0492, utyashevim@mail.ru

найдены необходимые и достаточные условия, при которых оператор Штурма-Лиувилля с дискретным спектром однозначно определяется двумя спектрами краевых задач с различными граничными условиями в нулевой точке и одинаковыми граничными условиями на другом конце. В частности, непрерывная функция $q(x)$ может быть однозначно определена по спектрам двух задач L_0 и L_1, где через L_0 и L_1 обозначены следующие задачи Штурма-Лиувилля:

З а д а ч а L_0:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad y(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2; \tag{1.2}$$

З а д а ч а L_1:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2. \tag{1.3}$$

После публикации классических монографий В. А. Марченко [4] и Б. М. Левитана [5], где потенциал $q(x)$ представлял собой либо непрерывную, либо суммируемую функцию, основные усилия ученых были направлены на обобщение полученных результатов как в направлении восстановления более общих потенциалов и дифференциальных уравнений [6]– [9] , так и в направлении использования более общих краевых условий [10]–[15]. Во всех указанных работах для восстановления непрерывной функции или более общей функции $q(x)$ требуется минимум два бесконечных набора собственных чисел. Однако для задач физики и механики такой подход мало эффективен, т. к. в реальных условиях с помощью частотомеров можно определить лишь конечные наборы собственных частот. Кроме этого, как правило, об идентифицируемом объекте имеется некоторая дополнительная информация, которая позволяет конкретизировать класс искомых функций. Поэтому возникает задача идентификации потенциала специального вида по конечному числу собственных частот. Тем не менее эффективных методов решения этой задачи предложено не было. Ранее решались задачи идентификации видов и параметров краевых условий по конечному числу собственных частот [16]–[18]. Для идентификации краевых условий задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом специального вида авторами был использован метод разложения в ряд Тейлора по переменным x и λ линейно независимых решений дифференциального уравнения. В работах [17]– [18] было замечено, что если разложить в ряды решения уравнения Штурма-Лиувилля с линейным потенциалом $q(x)$, то краевые условия можно достаточно точно восстановить по собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, используя только главную часть ряда. В настоящей работе этот метод предлагается использовать для восстановления полиномиального потенциала вида

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_{n-1} x^{n-1}, \tag{1.4}$$

где $q_m \in \mathbb{R}$ ($m = 1, 2, \ldots, n-1$).

П р и м е р 1.1 *Пусть искомый коэффициент упругости среды описывается линейным потенциалом $q(x) \equiv q_0 + q_1 x$, а собственными значениями задачи*

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad y(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2, \tag{1.5}$$

являются числа $s_1^2 = 6,4405^2$, $s_2^2 = 9,5303^2$. По этим двум собственным числам λ_i, $i = 1, 2$ задачи (1.5) требуется восстановить линейный потенциал $q(x)$.

Если $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ – линейно независимые решения уравнения (1.5), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1, \tag{1.6}$$

то характеристическим определителем задачи (1.5) является функция

$$\Delta_0(\lambda) = y_2(1, \lambda). \tag{1.7}$$

Решения $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ можно найти в виде ряда Тейлора с помощью пакета аналитических вычислений. Данные решения будут содержать неизвестные коэффициенты q_0 и q_1 Подставив числа $s_1^2 = 6,4405^2$, $s_2^2 = 9,5303^2$ и главную часть ряда Тейлора (150 первых членов ряда) для $y_2(x, \lambda)$ в (1.7), получим систему двух нелинейных уравнений относительно q_0 и q_1. Решив эту систему в пакете аналитических вычислений, найдем: $q_0 = 1,0000$ и $q_1 = 2,0000$, откуда $q(x) = 1 + 2x$. Пакет аналитических вычислений находит только одно из решений. Мы не можем гарантировать, что не существует других значений q_0 и q_1, которые также являются решениями. Для доказательства единственности или неединственности решения, а также отыскания класса изоспектральных краевых задач (краевых задач с общим спектром) мы предлагаем метод, основанный на следующей лемме.

Л е м м а 1.1 *Произвольное решение $y(x) = y(x, \lambda)$ уравнения (1.1) может быть записано в виде*

$$\begin{aligned}
&y(x) = y(0)\cos(sx) + C_2\frac{\sin(sx)}{s} + \\
&+q_0(-\cos(sx)\textstyle\int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s}y(\xi)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\displaystyle\int_0^x \cos(s\xi)y(\xi)d\xi) + \\
&+q_1(-\cos(sx)\textstyle\int_0^x \xi\frac{\sin(s\xi)}{s}y(\xi)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\displaystyle\int_0^x \xi\cos(s\xi)y(\xi)d\xi) + \\
&+\ldots+ \\
&+q_{n-1}(-\cos(sx)\textstyle\int_0^x \xi^{n-1}\frac{\sin(s\xi)}{s}y(\xi)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\displaystyle\int_0^x \xi^{n-1}\cos(s\xi)y(\xi)d\xi),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где C_2 – некоторое постоянное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$y'' + s^2 y = q(x)y. \tag{1.9}$$

Однородное уравнение $y'' + s^2 y = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\cos(sx)$ и $\frac{1}{s}\sin(sx)$. Поэтому, рассматривая (1.9) как неоднородное уравнение с правой частью $q(x)y$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим

$$y = C_1\cos(sx) + C_2\frac{\sin(sx)}{s} - \cos(sx)\int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s}q(\xi)y(\xi)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\int_0^x \cos(s\xi)q(\xi)y(\xi)d\xi$$

.

Рассматривая функцию на границе $x = 0$, из последнего уравнения получим $y(0) = C_1 \cdot 1 + 0$, откуда

$$y = y(0)\cos(sx) + C_2\frac{\sin(sx)}{s} - \cos sx\int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s}q(\xi)y(\xi)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\int_0^x \cos(s\xi)q(\xi)y(\xi)d\xi.$$

Поскольку $q(\xi) = q_0 + q_1\xi + \ldots + q_{n-1}\xi^{n-1}$, то выполняется уравнение (1.8). Доказательство завершено.

В примере 1.1 был найден линейный потенциал $q(x) = 1 + 2x$. Проверим, является ли данный потенциал единственным решением обратной задачи. Подставив $y_2(x, \lambda)$, полученный с учетом $q(x) = 1 + 2x$, в качестве y в формулу (1.8) и учитывая, что $y_2(0) = 0$, получим:

$$
\begin{aligned}
&y_2(x,\lambda) = C_2 \cdot \frac{\sin(s)}{s} + \\
&+q_0\left(-\cos(sx)\int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s} y_2(\xi,s)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s_i}\int_0^x \cos(s\xi)y_2(\xi,s)d\xi\right) + \\
&+q_1\left(-\cos(sx)\int_0^x \xi\frac{\sin(s\xi)}{s} y(\xi,s)d\xi + \frac{\sin(sx)}{s}\int_0^x \xi\cos(s\xi)y(\xi,s)d\xi\right).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Из (1.10) и того, что $y_2'(0, \lambda) = 1$, следует, что $C_2 = 1$. Подставив первые два собственных значения λ_i, $i = 1, 2$ задачи (1.5) и $x = 1$ в (1.10), получим систему двух уравнений:

$$
\begin{aligned}
&y_2(1,\lambda_i) = \frac{\sin(s_i)}{s_i} + \\
&+q_0\left(-\cos(s_i)\int_0^1 \frac{\sin(s_i\xi)}{s_i} y_2(\xi,s_i)d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1 \cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)d\xi\right) + \\
&+q_1\left(-\cos(s_i)\int_0^1 \xi\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i} y_2(\xi,s_i)d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1 \xi\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)d\xi\right)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

или

$$
0,024 - 0,012q_0 - 0,006q_1 = 0, \quad -0,011 + 0,0055q_0 + 0,0027q_1 = 0. \tag{1.12}
$$

Эти уравнения эквивалентны одному уравнению $4 - 2q_0 - q_1 = 0$. Таким образом, задачи с потенциалами

$$
q(x) = C + (4 - 2C)x, \tag{1.13}
$$

где C – произвольная константа, имеют одинаковые собственные значения. Случай $q(x) = 1 + 2x$ соответствует случаю $C = 1$. Случаю $C = 3$ соответствует потенциал $q(x) = 3-2x$. Для этого потенциала и потенциала $q(x) = 1+2x$ совпадают не только собственные значения $s_1^2 = 6,4405^2$, $s_2^2 = 9,5303^2$, но и все остальные. Например, первые пять значений s_i для задач с потенциалами $q(x) = 1 + 2x$ и $q(x) = 3 - 2x$, вычисленные с точностью до 40 значащих цифр, совпадают и равны следующим числам:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 3,444592241548059895610761118187224604007,\\
s_2 &= 6,440475610421840155099076164164271139007,\\
s_3 &= 9,530331543667758339267096856447256452604,\\
s_4 &= 12,64571658723299479266848704707473243409,\\
s_5 &= 15,77150681554023652826610297003474673742.
\end{aligned}
$$

Таким образом, задача идентификации линейного потенциала по собственным значениям краевой задачи L_0 имеет не одно решение. Однако как было отмечено выше, $q(x)$ однозначно определяется по спектрам двух задач L_0 и L_1. Это наводит на мысль, что линейная функция $q(x)$ может быть однозначно определена по двум собственным значениям, первое из которых является собственным значением задачи L_0, а второе – задачи L_1.

Пусть $q(x) \equiv q_0 + q_1 x$; одним из собственных значений задачи L_0 является $6,4405^2$; одним из собственных значений задачи L_1 является $2,0134^2$. По этим двум собственным числам требуется восстановить линейный потенциал $q(x) = q_0 + q_1 x$. Если $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ – линейно независимые решения уравнения (1.5), удовлетворяющие (1.6), то характеристическим определителем задачи L_0 является функция (1.7), а L_1 – функция

$$\Delta_1(\lambda) = y_1(1, \lambda). \tag{1.14}$$

Подставив главную часть ряда Тейлора для $y_2(x,\ 6,4405^2)$ в (1.7), а для $y_1(x,\ 2,0134^2)$ в (1.14), получим систему уравнений относительно q_0 и q_1. Решив данную систему в пакете аналитических вычислений, найдем $q_0 = 1,0000$ и $q_1 = 2,0000$ откуда $q(x) = 1 + 2x$. Для доказательства единственности решения воспользуемся леммой 1.1

Подставив собственное значение $6,4405^2$ задачи (1.5) и $x = 1$ в (1.10), получим первое уравнение из системы (1.12):

$$0,024 - 0,012q_0 - 0,006q_1 = 0. \tag{1.15}$$

Подставив собственное значение 2.0134^2 и $y_1(x,\ 2,0134^2) = \Delta_1(2.0134^2) = 0$ в качестве y в формулу (1.8), получим уравнение

$$\begin{gathered}
y_1(1, \lambda_1) = y_1(0) \cdot \cos(2.0134) + C_2 \cdot \frac{\sin(2.0134)}{2.0134} + \\
+ q_0 \left(-\frac{\cos(2.0134)}{2.0134} \int_0^1 \sin(2.0134\xi) y_1(\xi, 2.0134) d\xi + \right. \\
\left. + \frac{\sin(2.0134\pi)}{2.0134} \int_0^1 \cos(2.0134\xi) y_1(\xi, 2.0134) d\xi \right) + \\
+ q_1 \left(-\frac{\cos(2.0134\pi)}{2.0134} \int_0^1 \xi \sin(2.0134\xi) y_1(\xi, 2.0134) d\xi + \right. \\
\left. + \frac{\sin(2.0134)}{2.0134} \int_0^1 \xi \cos(2.0134\xi) y_1(\xi, 2.0134) d\xi \right).
\end{gathered} \tag{1.16}$$

Найдем C_2, воспользовавшись условием (1.6) для y_1: $y_1'(0, \lambda) = 0 + C_2 \cdot 1 + 0 = 0$. Отсюда и из (1.16) получим:

$$-0.42 + 0.26q_0 + 0.08q_1 = 0. \tag{1.17}$$

Решив систему уравнений (1.15) и (1.17), получим единственное решение $q_0 = 1.00$, $q_1 = 2.00$. Таким образом, потенциал $q(x) = 1 + 2x$ однозначно идентифицируется по двум собственным значениям, где одно взято из задачи L_0, а другое – из L_1.

Рассмотрим еще один пример.

П р и м е р 1.2 *Пусть* $q(x) \equiv q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4$; *собственными значениями задачи* L_0 *являются числа* $s_1^2 = 3.7200^2$, $s_2^2 = 6.6531^2$, $s_3^2 = 9.6823^2$; *а собственными значениями задачи* L_1 *– числа* $s_4^2 = 2.1936^2$, $s_5^2 = 5.1710^2$. *По этим пяти собственным числам требуется восстановить полином* $q(x) \equiv q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4$.

Подставив главную часть ряда Тейлора для $y_2(x,\ s_i^2)$, $i = 1, 2, 3$ в (1.7), а для $y_1(x,\ s_i^2)$, $i = 4, 5$ в (1.14), получим систему уравнений относительно q_0, q_1, q_2, q_3 и q_4. Решив эту систему уравнений в пакете аналитических вычислений, найдем: $q_0 = 1.0000$, $q_1 = 2.0000$, $q_2 = 3.0000$, $q_3 = 4.0000$ и $q_4 = 5.0000$. Откуда $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$. Для доказательства единственности решения воспользуемся леммой 1.1

Подставив собственные значения s_i^2, $i=1,2,3$ задачи L_0 и $x=1$ в

$$
\begin{gathered}
y_2(1,\lambda_i)=\frac{\sin(s_i)}{s_i}+ \\
+q_0\left(-\cos(s_i)\int_0^1\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)d\xi\right)+ \\
+q_1\left(-\cos(s_i)\int_0^1\xi\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\xi\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)\right)+ \\
+\ldots+ \\
+q_4\left(-\cos(s_i)\int_0^1\xi^4\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\xi^4\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)\right).
\end{gathered}
\tag{1.18}
$$

получим уравнения

$$
\begin{array}{l}
-0.14696+0.03233q_0+0.01773q_1+0.01043q_2+0.00655q_3+0.00434q_4=0,\\
0.05434-0.01089q_0-0.00570q_1-0.00370q_2-0.00268q_3-0.00204q_4=0,\\
-0.02630+0.00524q_0+0.00269q_1+0.00177q_2+0.00131q_3+0.00103q_4=0.
\end{array}
\tag{1.19}
$$

Подставив собственные значения s_i^2, $i=4,5$ задачи L_1 и $x=1$ в

$$
\begin{gathered}
y_2(1,\lambda_i)=\cos(s_i)+ \\
+q_0\left(-\cos(s_i)\int_0^1\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)d\xi\right)+ \\
+q_1\left(-\cos(s_i)\int_0^1\xi\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\xi\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)\right)+ \\
+\ldots+ \\
+q_4\left(-\cos(s_i)\int_0^1\xi^4\frac{\sin(s_i\xi)}{s_i}y_2(\xi,s_i)d\xi+\frac{\sin(s_i)}{s_i}\int_0^1\xi^4\cos(s_i\xi)y_2(\xi,s_i)\right),
\end{gathered}
\tag{1.20}
$$

получим уравнения

$$
\begin{array}{l}
-0.58332+0.22989q_0+0.07130q_1+0.03159q_2+0.01670q_3+0.00985q_4=0,\\
0.44268-0.09763q_0-0.04614q_1-0,03012q_2-0.02124q_3-0.01549q_4=0.
\end{array}
\tag{1.21}
$$

Решив систему уравнений (1.19)и (1.21), получим единственное решение $q_0=1.0000$, $q_1=2.0000$, $q_2=3.0000$, $q_3=4.0000$, $q_4=5.0000$. Таким образом, потенциал $q(x)==1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ однозначно идентифицируется по пяти собственным значениям, где три взяты из задачи L_0, а две – из L_1.

2. О методах, использованных в работе

Метод поиска собственных значений с помощью разложения в степенной ряд был применен в книге [19], однако собственные значения находились не путем обрыва ряда и решения соответствующего алгебраического уравнения, а с помощью получения рекуррентных формул.

Метод, основанный на методе вариации произвольной постоянной и использованный нами для доказательства единственности или неединственности найденного полиномиального потенциала, был использован ранее (см., например, [20]) для другой цели – получения асимптотических соотношений для фундаментальной системы решений при больших $|\lambda|$.

3. Оценка погрешности вычисления собственных значений

Для вычислений в пакете аналитических вычислений использование первых 50–60 членов ряда (некоторые коэффициенты которого могут быть равны нулю) дает удовлетворительные результаты как при вычислении собственных значений, так и при отыскании потенциала. Связано это с тем, что характеристический определитель оказывается знакочередующимся рядом. Например, для $q(x) = 1 + 2x$ он представляет собой следующую сумму:

$$\Delta(\lambda) = 1.3679 - 0.2025s^2 + 0.0096s^4 + \ldots + 2.4884 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7.2107 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Известно, что по признаку Лейбница остаток ряда $R_{56} = -7.210682962 \cdot 10^{-81}s^{58} + \ldots$ можно оценить его первым слагаемым, т. е.

$$|R_{56}| \leq 7.21069 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Для $s_i < 10$ остаток $|R_{56}| < 10^{-22}$, поэтому погрешности в вычислении собственных значений являются малыми.

При $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ характеристический определитель для краевых условий $y(0) = y(1) = 0$ при использовании первых 56 членов ряда имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = 1,9130 - 0,25616s^2 + 0,011489s^4 + \ldots + 2,48841 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7,21068 \cdot 10^{-81}s^{58},$$

а характеристический определитель для краевых условий $y'(0) = y(1) = 0$ –

$$\Delta_1(\lambda) = 2,0798 - 0,27320 \cdot s^2 + 0,012101 \cdot s^4 + \ldots + 2,4884 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7,2107 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Поэтому для потенциала $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$, так же как для случая $q(x) = 1 + 2x$, остаток ряда $|R_{56}| < 10^{-22}$ при $s_i < 10$.

4. Оценка погрешности решения обратной задачи

Для оценки того, как меняется погрешность в решении обратной задачи при изменении погрешности частот, был проведен следующий вычислительный эксперимент. В качестве «точных» значений решения обратной задачи были взяты значения q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, вычисленные с точностью до 40 значащих цифр. При расчетах было использовано разложение фундаментальной системы решений в степенной ряд до 60-й степени. Далее все пять собственных частот подверглись возмущению, после чего были определены соответствующие абсолютные погрешности решения. В таблице 1 приведены абсолютные погрешности собственных значений λ_1 и найденного коэффициента q_0 а также их отношение, из которого видно, что абсолютная погрешность результата приблизительно в 17–18 раз больше абсолютной погрешности входных данных.

Таблица 1: Отношение абсолютных погрешностей выходных данных к входным

$\Delta(\lambda_1)$	$\Delta(q_0)$	$\Delta(q_0)/\Delta(\lambda_1)$
10-2	1,74356·10-1	17,43559
10-3	1,75764·10-2	17,57644
10-4	1,75907·10-3	17,59066
10-5	1,75921·10-4	17,59208
10-6	1,75922·10-5	17,59222
10-7	1,75922·10-6	17,59224
10-8	1,75922·10-7	17,59224
10-9	1,75922·10-8	17,59224

5. Заключение

В работе показано, что потенциал, заданный в виде полинома степени n, идентифицируется по конечному набору собственных значений. Приведен контрпример, из которого следует, что частоты из одного спектра не дают однозначного решения. Предложен метод, позволяющий выявить класс изоспектральных задач, для которых спектр собственных частот совпадает. Данный метод был применен для доказательства того факта, что однозначно идентифицировать потенциал можно по двум конечном наборам собственных частот, взятых из разных спектров одной и той же задачи при различных краевых условиях (по сути, таким образом была доказана теорема Борга для случая, когда потенциал является полиномом).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 17-41-020230-р_а, 17-41-020400-р_а, 18-01-00150-А.

Список литературы

1. W. A. Ambarzumijan, "Uber eine Frage der Eigenwerttheorie", *Zeitshrift fur Physik*, 1929, № 53, 690–695.
2. G. Borg, "Eine Umkehrung der Sturm– Liouvilleschen Eigenwert Aufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwarte", *Acta Math*, **78**:1 (1946), 1–96.
3. N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.*, **3** (1949), 25–30.
4. В. А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 329 с.
5. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наука, Москва, 1984, 240 с.
6. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, "Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость", *Функц. анализ и его приложения*, **44**:4 (2010), 34–53.
7. В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, Москва, 2007, 384 с.
8. И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов", *Математический сборник*, **198**:11 (2007), 47–66.
9. И. М. Набиев, "Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии", *ДАН*, **415**:2 (2007), 168–170.
10. В. А. Садовничий, "Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя", *ДАН СССР*, **206**:2 (1972), 293–296.
11. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, A. M. Akhtyamov, "General inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potential", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **5**:2 (2015), 96-108.

12. М. Г. Гасымов, И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, "Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями", *Сибирский математический журнал*, **31**:6 (1991), 46–54.

13. Е. Л. Коротяев, Д. С. Челкак, "Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями", *Алгебра и анализ*, **21**:5 (2009), 114–137.

14. Kh. R. Mamedov, F. Cetinkaya, "Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition", *Bound. Value Probl. electronic only.*, 2013, 16, http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661.

15. E. S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal, "Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**:1 (2010), 173–180.

16. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, "Identification of boundary conditions using natural frequencies", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393-408.

17. А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев, "Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний", *Акустический журнал*, **61**:6 (2015), 647-655.

18. И. М. Утяшев, А. М. Ахтямов, "Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний", *Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова*, **11:1** (2016), 38–52.

19. А. Коллатц, *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*, Наука, Москва, 1968, 504 с.

20. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва, 1969, 526 с.

Поступила 14.03.2018

MSC2010 35P05

Restoration of the polynomial potential in the Sturm-Liouville problem

© **A. M. Akhtyamov** [1], **I. M. Utyashev** [2]

Abstract. The problem of identification of medium elasticity by eigenfrequencies of the string oscillating in this medium is considered. The elasticity is supposed to be some polynomial. A solution method based on the representation of linearly independent solutions of the differential equation in the form of Taylor series by variables x and λ is presented. A method is also developed that allows to prove uniqueness or non-uniqueness of reconstructed polynomial elasticity coefficient by a finite number of natural frequencies of string vibrations. The latter method is based on the method of arbitrary constant variation. The examples of the problem solution and of the error estimation for the result are given. It is shown that for the unambiguous identification of $n+1$ coefficients of the n th power polynomial, which is a potential in the Sturm-Liouville problem, it is sufficient to use $n+1$ eigenvalue. These eigenvalues are found from two different boundary value problems, that differ in one of the boundary conditions. Only a half of eigenvalues' number in each problem must be taken into account. If this number is odd, the number of eigenvalues that should be taken from one of the problems' spectra must be increased by one. A counterexample is given showing that eigenfrequencies taken only from one spectrum don't allow to find the unique solution. In fact, these results improve the well-known Borg theorem in the case when the potential is a polynomial. Also the method is proposed that helps to find the isospectral class of problems for which the range of frequencies is the same.

Key Words: eigenvalue problem, potential identification, string, inverse problem, eigenvalues.

References

1. W. A. Ambarzumijan, "Uber eine frage der eigenwerttheorie", *Zeitshrift fur Physik*, **53** (1929), 690–695.

2. G. Borg, "Eine Umkehrung der Sturm– Liouvilleschen Eigenwert Aufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwarte", *Acta Math*, **78**:1 (1946), 1–96.

3. N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.*, **3** (1949), 25–30.

4. V. A. Marchenko, *[Operators of Sturm-Liouville and their applications]*, Naukova dumka, Kiev, 1977 (In Russ.), 329 c.

5. B. M. Levitan, *[Inverse Sturm-Liouville problems and their applications]*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russ.), 240 c.

6. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, "[Inverse problems for Sturm-Liouville operators with potentials in Sobolev spaces: Uniform stability]", *Functional Analysis and Its Applications*, **44**:4 (2010), 270–285 (In Russ.).

[1] **Azamat M. Akhtyamov**, Professor of the Department of Mathematical Modeling, Bashkir State University (32 Z. Validi Str., Ufa, 450074, Republic of Bashkortostan, Russia), Chief Researcher Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS (71 Prospect of October, Ufa, 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2080-6648, akhtyamovam@mail.ru

[2] **Ilnur M. Utyashev**, Researcher Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS (71 Prospect of October, Ufa, 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2342-0492, utyashevim@mail.ru

7. V. A. Yurko, *[Introduction to the theory of inverse spectral problems]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russ.), 384 c.

8. I. M. Guseinov, I. M. Nabiev, “[The inverse spectral problem for pencils of differential operators]”, *Mathematics Sbornik*, **198**:11 (2007), 1579–1598 (In Russ.).

9. I. M. Nabiev, “[The inverse quasiperiodic problem for a diffusion operator]”, *Doklady Mathematics*, **76**:1 (2007), 527–529 (In Russ.).

10. V. A. Sadovnichii, “[The uniqueness of the solution of the inverse problem in the case of a second-order equation with non-decomposable conditions, the regularized sums of a part of the eigenvalues. Factorization of the characteristic determinant]”, *Soviet Mathematics*, **206**:2 (1972), 293–296 (In Russ.).

11. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, A. M. Akhtyamov, “General inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potential”, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **5**:2 (2015), 96-108.

12. M. G. Gasymov, I. M. Guseynov, I. M. Nabiev, “[The inverse problem for the Sturm-Liouville operator with non-separated self-adjoint boundary conditions]”, *Sibirskiy Matematicheskiy zhurnal*, **31**:6 (1991), 46–54 (In Russ.).

13. E. L. Korotyaev, D. S. Chelkak, “[The inverse Sturm-Liouville problem with mixed boundary conditions]”, *St. Peterburg Math.*, **21**:5 (2010), 761–778 (In Russ.).

14. Kh. R. Mamedov, F. Cetinkaya, “Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition”, *Bound. Value Probl. electronic only*, 2013, 16, Available at: http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661.

15. E. S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal, “Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**:1 (2010), 173–180.

16. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393-408.

17. A. M. Akhtyamov, I. M. Utyashev, “[Identification of the boundary conditions at both ends of the string according to the natural frequencies of the oscillations]”, *Akusticheskiy zhurnal*, **61**:6 (2015), 647-655 (In Russ.).

18. I. M. Utyashev, A. M. Akhtyamov, “[Identification of the string boundary conditions using natural frequencies]”, *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova*, **11:1** (2016), 38–52 (In Russ.).

19. A. Kollatts, *[Tasks for eigenvalues (with technical applications)]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 504 c.

20. M. A. Naymark, *[Linear differential operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 526 c.

Submitted 14.03.2018