Математика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.132-147

УДК 517.9

О локальной разрешимости некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

© С. Н. Алексеенко [1], Л. Е. Платонова [2]

Аннотация. Исследовано квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с различными начальными условиями: в первом случае линия, несущая начальные данные, задается параметрически; во втором случае линия, несущая начальные данные, задается в декартовых координатах и имеет бесконечную длину; в третьем случае линия, несущая начальные данные, задается в декартовых координатах и имеет ограниченную длину. В каждом из случаев для рассматриваемого квазилинейного уравнения сформулированы условия локальной разрешимости и показано, что решение имеет ту же гладкость, что и функция, задающая начальные условия. Для исследования вышеперечисленных задач использовался метод дополнительного аргумента. В рамках этого метода решается некоторая система интегральных уравнений, решение которой дает решение задачи Коши для исходного уравнения.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, локальная разрешимость, интегральное уравнение.

1. Введение

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a_1(x_1, x_2, z)\partial_1 z + a_2(x_1, x_2, z)\partial_2 z = f(x_1, x_2, z), \tag{1.1}$$

где $\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2; \quad a_1(x_1, x_2, z), a_2(x_1, x_2, z), f(x_1, x_2, z)$ — непрерывно дифференцируемые функции в множестве Q_T, которая будет определена ниже.

В работах [1]–[2] решается задача Коши с начальным условием

$$z(x_1, x_2)|_L = \gamma(\tau), \tag{1.2}$$

где кривая L, несущая начальные данные, задается параметрически уравнениями $x_1 = \alpha_1(\tau),\ x_2 = \alpha_2(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant T$. Предполагается, что функции

[1] **Алексеенко Сергей Николаевич**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID:http://orcid.org/0000-0002-1455-1263, sn-alekseenko@yandex.ru

[2] **Платонова Любовь Евгеньевна**, старший преподаватель кафедры математики и математического образования, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный педагогический университет имени К. Минина» (604950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3601-2276, fluff13@yandex.ru

$\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \gamma(\tau)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми на $[0;T]$. В этих работах рассмотрен случай, когда кривая L и множество, на котором определено решение $z(x_1,x_2)$, содержатся в ограниченном множестве $\Omega_T = \big\{(x_1,x_2) : \min\limits_{\tau\in[0;T]}(\alpha_i(\tau) - \alpha_{i0}) \leqslant x_i \leqslant \max\limits_{\tau\in[0;T]}(\alpha_i(\tau) + \alpha_{i0}), i = 1,2\big\}$, $\alpha_{10}, \alpha_{20} \in \mathbb{R}$.

В работах [1]–[2] предполагалось, что известные функции уравнения (1.1) определены на множестве $Q_{TK} = \{\Omega_T \times [-K_z; K_z]\}$, где величина K_z может быть сколь угодно велика. Однако поскольку целью работы являлось доказательство существования ограниченного решения задачи (1.1)–(1.2), определенного в некоторой окрестности кривой L, то на множество значений неизвестной функции накладывалось ограничение $|z| \leqslant K_U$, где K_U могла быть произвольным, но должно соблюдаться условие $K_U \leqslant K_z$. В зависимости от величины K_U определяется также множество существования решения. Важно, что для конечного положительного числа K_U определяется ограниченное непустое множество существования решения. В нижеследующих выкладках и оценках все используемые константы вычисляются в предположении, что известные функции уравнения (1.1) определены на множестве $Q_T = \{\Omega_T \times [-K_U; K_U]\}$.

В данной работе наряду с поиском неизвестной функции $z(x_1,x_2)$ исследуется вопрос о множестве, на котором определено решение. При этом постоянные α_{10}, α_{20} должны быть достаточно велики, чтобы искомое множество, на котором определено решение $z(x_1,x_2)$, входило в Ω_T. Обозначим это заранее неизвестное множество через Q_ε. Поскольку речь идет о локальной разрешимости, то множество Q_ε представляет собой некоторую окрестность кривой L.

Сформулируем условия для L, при выполнении которых справедливы приведенные в статье утверждения.

Предположим, что в Ω_T существует окрестность D кривой L и постоянное во всем множестве D направление $\overrightarrow{\lambda}$ такие, что каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку множества D параллельно $\overrightarrow{\lambda}$, пересекает L лишь в одной точке. Таким образом каждой точке из D поставлена в соответствие ее проекция на L по направлению $\overrightarrow{\lambda}$. Поскольку каждой точке на L соответствует определенное значение τ, то каждой точке $(x_1,x_2) \in D$ соответствует определенное значение параметра на кривой при проецировании в направлении $\overrightarrow{\lambda}$. Предположим, что это соответствие задано в виде функции $\theta(x_1;x_2) = \tau$. Всем точкам (x_1,x_2), лежащим на одной прямой, которая проходит через D в направлении $\overrightarrow{\lambda}$, соответствует одно значение τ. По существу предполагается соответствие между множеством таких прямых и множеством $\tau \in [0,T]$. Для целей настоящего исследования достаточно иметь функцию $\theta(x_1;x_2) = \tau$. Будем называть кривую, описываемую данной функцией, однонаправлено регулярной. Обозначим через $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$ направляющие косинусы $\overrightarrow{\lambda}$; не нарушая общности, можно считать, что эти косинусы положительны. Множество Ω_ε, на котором определено решение, будем искать в виде полосы шириной ε в направлении $\overrightarrow{\lambda}$, прилегающей к L с одной стороны, точнее $\Omega_\varepsilon = \{(x_1;x_2) : \alpha_i(\tau) \leqslant x_i \leqslant \alpha_i(\tau) + \varepsilon\cos\varphi_i,\ i = 1,2,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$, $\Omega_\varepsilon \subset D \subset \Omega_T$. Параметр ε подлежит определению, а ограничение на величину ε является одним из основных условий разрешимости задачи (1.1)–(1.2).

2. Обзор результатов

В рамках метода дополнительного аргумента (МДА) [3] запишем для задачи Коши (1.2) расширенную характеристическую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_1}{ds} = a_1(\eta_1, \eta_2, u), \\ \frac{d\eta_2}{ds} = a_2(\eta_1, \eta_2, u), \\ \frac{du}{ds} = f(\eta_1, \eta_2, u) \end{cases} \tag{2.1}$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1,\ \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2,\ u|_L = \gamma(\tau). \tag{2.2}$$

Здесь $\omega(x_1, x_2), \eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2), u(s, x_1, x_2)$ — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным; s — дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Значение ω на кривой, заданной уравнениями $x_1 = \alpha_1(\tau)$, $x_2 = \alpha_2(\tau)$, полагаем равной нулю, т. е. $\omega(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)) = 0$. Для получения решения в исходных координатах решения системы уравнений (2.1) должны быть представимы в виде:

$$\eta_i = x_1 - \int\limits_s^{\omega(x_1,x_2)} a_i(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))d\delta,\ i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию $\theta(x_1, x_2)$, для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы соотношения:

$$\alpha_i(\theta\,(x_1, x_2)) = x_i - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} a_i\left(\eta_1\left(\delta, x_1, x_2\right), \eta_2\left(\delta, x_1, x_2\right), u\left(\delta, x_1, x_2\right)\right) d\delta,\ i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Из равенств (2.1)–(2.2) при допустимости (2.3) получим:

$$u(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta(x_1, x_2)) + \int\limits_0^s f(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2))d\delta. \tag{2.5}$$

Л е м м а 2.1 *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (2.2)–(2.3), (2.5) *дает решение задачи Коши* (1.1)–(1.2).

При доказательстве леммы в работе [1] было установлено, что

$$J = \begin{vmatrix} \alpha_1' & a_1 \\ \alpha_2' & a_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.6}$$

В работе [1] для задачи Коши (1.1)–(1.2) с помощью МДА [3]–[10] была разработана схема, позволяющая свести вопрос о разрешимости задачи (1.1)–(1.2) в исходных координатах к определению интервала разрешимости системы из 15 интегральных уравнений, которая была названа резольвентной [2]. Поскольку при доказательстве существования решения системы интегральных уравнений производные рассматриваются как новые неизвестные функции, введем соответствующие обозначения:

$$u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2),\ \omega = W_1,\ \theta = W_2,\ \theta_{xi} = W_{2i},\ u_{xi} = U_i,$$

$(\alpha_{1\psi};\alpha_{2\psi}) = (\alpha_1(\psi(x_1;x_2));\alpha_2(\psi(x_1;x_2)))$, $\omega_{xi} = W_{1i}$, $\eta_i = H_i$, $\eta_{ixj} = H_{ij}$, $(i,j = 1,2)$.

Тогда запишем основную резольвентную систему запишется следующим образом:

$$U = \gamma\left(W_2\right) + \int\limits_0^s f\left(H_1, H_2, U\right) d\delta, \tag{2.7}$$

$$U_i = \gamma'\left(W_2\right) W_{2i} + \int\limits_0^s \left(f_1 H_{1i} + f_2 H_{2i} + f_U U_i\right) d\delta, \tag{2.8}$$

$$H_i = x_i - \int\limits_s^{W_1} a_i\left(H_1, H_2, U\right) d\delta, \tag{2.9}$$

$$H_{lk} = \delta_k^l - a_l W_{1k} - \int\limits_s^{W_1} \left(a_{l1} H_{1k} + a_{l2} H_{2k} + a_{lU} U_k\right) d\delta, \tag{2.10}$$

$$W_i = \begin{cases} \int\limits_{(\alpha_{1\psi};\alpha_{2\psi})}^{(x_1;x_2)} (W_{11}\cos\varphi_1 + W_{12}\cos\varphi_2) dl, i = 1, \\ \int\limits_{(\alpha_{1\psi};\alpha_{2\psi})}^{(x_1;x_2)} (W_{21}\cos\varphi_1 + W_{22}\cos\varphi_2) dl + \Psi(x_1;x_2), i = 2, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$W_{1k} = J^{-1}\left((-1)^k \alpha'_{3-k} + \int\limits_0^{W_1}\left(\alpha'_2\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{ik} + a_{1U} U_k\right) - \alpha'_1\left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{ik} + a_{2U} U_k\right)\right) d\delta\right), \tag{2.12}$$

$$W_{2l} = J^{-1}\left((-1)^{l+1} a_{3-l} + \int\limits_0^{W_1}\left(a_1\left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{il} + a_{2U} U_l\right) - a_2\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{il} + a_{1U} U_l\right)\right) d\delta\right), \tag{2.13}$$

где $i,j,k = 1,2$, δ_k^l – символ Кронекера-Капелли. В системе (2.7)–(2.13) определены новые неизвестные функции $U(s,x_1,x_2)$, $U_1(s,x_1,x_2)$, $U_2(s,x_1,x_2)$, $H_1(s,x_1,x_2)$, $H_2(s,x_1,x_2)$, $H_{11}(s,x_1,x_2)$, $H_{12}(s,x_1,x_2)$, $H_{21}(s,x_1,x_2)$, $H_{22}(s,x_1,x_2)$, $W_1(x_1,x_2)$, $W_{11}(x_1,x_2)$, $W_{12}(x_1,x_2)$, $W_2(x_1,x_2)$, $W_{21}(x_1,x_2)$ $W_{22}(x_1,x_2)$. Аргументы данных функций в системе (2.7)—(2.13) для краткости не записаны.

$$\text{Пусть} \quad \varepsilon_0 = \min\left(\frac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}\sigma_3}{\xi_1 + 100\zeta_1^2\xi_2 + 10\zeta_1\xi_3}; \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}\sigma_4}{\xi_1 + 100\zeta_1^2\xi_2 + 10\zeta_1\xi_4}\right),$$

$$\zeta_1 = K_0\left(K_{\alpha'_2} + K_{\alpha'_1}\right) + K_0\left(K_{a_1} + K_{a_2}\right)\left(K_{\alpha'_1} + K_{\alpha'_2} + K_{\gamma'}\right) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma,$$

$$\sigma_1 = K_0\left(M_{a_1}K_{\alpha'_2} + M_{a_2}K_{\alpha'_1}\right)\left(K_{a_1} + K_{a_2} + 1\right) + K_{\gamma'}K_0\left(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} +$$

$$+M_f,\ \sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f,\ \sigma_3 = K_{\widehat{\Psi}} + K_{\widetilde{\Psi}} + K_{\Psi 1},\ \sigma_4 = K_{\widehat{\Psi}} + K_{\widetilde{\Psi}} + K_{\Psi 2},$$

$$\xi_1 = (K_{a_1} + K_{a_2})(c_1 + c_2) + K_{\gamma'}\left(c_3 + c_4\right),\ \xi_2 = M_{a_1} + M_{a_2} + M_f, \xi_3 = K_{a_{11}} + K_{a_{21}} + K_{f1},$$

$$\xi_4 = K_{a_{12}} + K_{a_{22}} + K_{f2},\ J = \alpha'{}_1 a_2 - \alpha_2^{'} a_1,\ K_J = K_0^{-1},$$

где константы определены как максимумы известных функций и их производных.

Справедливо утверждение (см. [1]–[2]).

Т е о р е м а 2.1 *Пусть* $a_1(x_1,x_2,z)$, $a_2(x_1,x_2,z)$, $f(x_1,x_2,z)$ *– непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве* Q_T; L *— однонаправленная регулярная кривая;* $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \gamma(\tau) \in C^2([0;T])$; *выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J = const > 0$. *Тогда при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *задача Коши* (1.1)–(1.2) *имеет единственное решение* $z \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, *которое при* $s = W_1$ *совпадает с функцией* $U(s,x_1,x_2) = U(s,x_1,x_2)$, *определяемой из резольвентной системы* (2.7)–(2.13).

В работах [11]–[12] задача Коши ставится следующим образом:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty;+\infty). \tag{2.14}$$

Кривая L задается уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, $-\infty < x_1 < +\infty$ и множество, на котором определено решение $z(x_1,x_2)$, содержится во множестве $\Omega_\beta = \big\{(x_1,x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min\limits_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1)-\beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max\limits_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1)+\beta_0)\big\}, \beta_0 \in \mathbb{R}$. В нижеследующих выкладках и оценках все используемые константы вычисляются в предположении, что известные функции $a_1(x_1,x_2,z)$, $a_2(x_1,x_2,z)$, $f(x_1,x_2,z)$ определены в множестве $Q_\rho = \Omega_\beta \times [-\rho N_\gamma; \rho N_\gamma]$, где ρ – некоторое положительное число; $|\gamma(x_1)| \leq$ $\leq N_\gamma$; $x_1 \in (-\infty;+\infty)$.

Множество Ω_ε, на котором определено решение, ищется в виде полосы шириной ε в направлении Ox_2, прилегающей к L с одной стороны, т. е. в виде $\Omega_\varepsilon = \{(x_1,x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \ \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1)+\varepsilon\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta$.

Расширенная характеристическая система имеет такой же вид, как для задачи (1.2) с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1,x_2)} = x_2, u|_L = \gamma(x_1), \tag{2.15}$$

где $\omega(x_1,x_2), \eta_1(s,x_1,x_2), \eta_2(s,x_1,x_2), u(s,x_1,x_2)$ – новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным; s – дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant$ $\omega(x_1,x_2)$.

Значение ω на кривой, заданной уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, полагаем равной нулю, т. е. $\omega(x_1,\varphi(x_1)) = 0$. Для получения решения в исходных координатах решения системы уравнений (2.1) должны быть представимы в виде, аналогичном (2.3) в предыдущей задаче.

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию $\theta(x_1,x_2)$, для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы равенства, совпадающие с равенствами (2.4), при $\alpha_1 = id$, $\alpha_2 = \varphi$.

Из соотношений (2.1), (2.15) при выполнении (2.3) мы получим равенство, совпадающее с (2.5).

Справедлива лемма (см. [4]).

Л е м м а 2.2 *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (2.3), (2.5), (2.15) *дает решение задачи Коши* (1.1), (2.14).

Получим систему интегральных уравнений вида (2.7)–(2.13), положив в ней $H_1 =$ $= x_1 - \mu_1$; $H_{11} = 1 - \mu_{11}$; $H_{12} = -\mu_{12}$; $W_{21} = 1 - \mu_{21}$; $W_{22} = -\mu_{22}$; $W_2 = x_1 - \mu_2$; $\alpha_1' = 1$; $\alpha_2' =$ $= \varphi'$ (в уравнениях для W_{11} и W_{12}), При этом уравнения (2.11) примут вид:

$$W_1 = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12} dx_2, \ \ \mu_2 = \int\limits_0^{W_1} a_1(x_1-\mu_1, H_2, U)\, d\delta. \tag{2.16}$$

Пусть $\varepsilon_0 = \min\left(\dfrac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1+\sigma_2)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_3+10\zeta_1\xi_2}\right)$,
$\zeta_1 = K_0(K_{\varphi'}+1) + K_0(K_{a_1}+K_{a_2})(1+K_{\varphi'}+K_{\gamma'}) + 2 + X_2 + N_\gamma$,

$\sigma_1 = K_0 \left(M_{a_1} K_{\varphi'} + M_{a_2}\right) \left(K_{a_1} + K_{a_2} + 1\right) + K_{\gamma'} K_0 \left(M_{a_2} K_{a_1} + M_{a_1} K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$,
$\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$, $\xi_1 = cK_{\varphi'} \left(\left(K_{\gamma'} + 1\right) K_{a_1} + K_{a_2}\right) + 10\zeta_1 \left(\left(K_{\gamma'} + 1\right) K_{a_{11}} + K_{f_1} + K_{a_{21}}\right)$,
$\xi_2 = 10\zeta_1 \left(\left(K_{\gamma'} + 1\right) M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right), \xi_3 = c\left(\left(K_{\gamma'} + 1\right) K_{a_1} + K_{a_2}\right)$, $J = a_2 - a_1\varphi'$,
$K_J = K_0^{-1}$, где константы определены как максимумы известных функций и их производных.
Справедлива теорема (см. [11]–[12]).

Т е о р е м а 2.2 *Пусть* $a_1(x_1, x_2, z)$, $a_2(x_1, x_2, z)$, $f(x_1, x_2, z)$ *непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве* Q_ρ; L *— кривая, несущая начальные данные:* $x_2 = \varphi(x_1)$; $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$; *выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$, *которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2)$, *определяемой из резольвентной системы* (2.7)–(2.10), (2.12)–(2.13)*(с введенными выше обозначениями),* (2.16).

3. Постановка и решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши с начальным условием:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in [X_1; X_2], \tag{3.1}$$

где кривая L задается в явном виде уравнением $x_2 = \varphi(x_1), X_1 \leqslant x_1 \leqslant X_2$.

Множество, на котором определена неизвестная функция $z(x_1, x_2)$ в (1.1), содержится в множестве $\Omega_\beta = \left\{(x_1, x_2) : X_1 \leqslant x_1 \leqslant X_2, \min\limits_{x_1 \in [X_1; X_2]} (\varphi(x_1) - \beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max\limits_{x_1 \in [X_1; X_2]} (\varphi(x_1) + + \beta_0)\right\}$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$.

Множество Ω_ε, на котором определено решение, ищется в виде:
$\Omega_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) : X_1 \leqslant x_1 \leqslant X_2,\ \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon\right\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta$.

Так же, как и при решении предыдущих двух задач, будем использовать МДА, так как он дает возможность получить решение в исходных координатах ([3]).

Расширенная характеристическая система имеет такой же вид, как для задачи (1.2), т. е. получим систему уравнений (2.1) с начальными данными вида (2.15).

Здесь $\omega(x_1, x_2), \eta_1(s, x_1, x_2), \ \eta_2(s, x_1, x_2), u(s, x_1, x_2)$ – новые неизвестные функции непрерывно дифференцируемые по всем переменным; s – дополнительный аргумент, $0 \leqslant s \leqslant \omega(x_1, x_2)$.

Значение ω на кривой, заданной в явном виде уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, полагаем равным нулю, т. е. $\omega(x_1, \varphi(x_1)) = 0$.

Для получения решения в исходных координатах с использованием МДА, решения характеристических уравнений $\dfrac{d\eta_1}{ds} = a_1(\eta_1, \eta_2, u), \dfrac{d\eta_2}{ds} = a_2(\eta_1, \eta_2, u)$ должны быть представимы в виде, аналогичном (2.3).

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию $\theta(x_1, x_2)$, для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы равенства, совпадающие с (2.4), если положить $\alpha_1 = id, \alpha_2 = \varphi$.

Из соотношений (2.1), (2.15) при выполнении (2.3) имеем равенство, совпадающее с (2.5).

Л е м м а 3.1 *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений* (2.3), (2.5), (2.15) *дает решение задачи Коши* (1.1)–(3.1).

Для краткости записи опустим аргументы функций $\theta(x_1,x_2)$, $\omega(x_1,x_2)$, $a_1(\eta_1,\eta_2,u)$, $a_2(\eta_1,\eta_2,u)$, $\eta_1(s,x_1,x_2)$, $\eta_2(s,x_1,x_2)$, $u(s,x_1,x_2)$, $\varphi(x_1)$. Для вывода основного условия разрешимости проведем следующие выкладки: продифференцируем первое и второе уравнение (2.4), где $\alpha_1 = id$; $\alpha_2 = \varphi$ по x_1 и x_2. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} &= 1 - a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\delta,\\ \frac{\partial\theta}{\partial x_2} &= -a_1\frac{\partial\omega}{\partial x_2} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \left(\frac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)d\delta; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \varphi'\frac{\partial\theta}{\partial x_1} &= -a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)d\delta,\\ \varphi'\frac{\partial\theta}{\partial x_2} &= 1 - a_2\frac{\partial\omega}{\partial x_2} - \int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)} \left(\frac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)d\delta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Умножим первое уравнение системы (3.2) на a_1, второе – на a_2, затем сложим полученные выражения и получим равенство:

$$\begin{aligned} a_1\tfrac{\partial\theta}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\theta}{\partial x_2} + a_1\left(a_1\tfrac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\Bigg(\tfrac{\partial a_1}{\partial\eta_1}\left(a_1\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}\right)+\\ +\tfrac{\partial a_1}{\partial\eta_2}\left(a_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_2}\right) + \tfrac{\partial a_1}{\partial u}\left(a_1\tfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg)d\delta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Проведем аналогичные операции с первым уравнением системы (3.2):

$$\begin{aligned} \varphi'\left(a_1\tfrac{\partial\theta}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) + a_2\left(a_1\tfrac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\Bigg(\tfrac{\partial a_2}{\partial\eta_1}\left(a_1\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}\right)+\\ +\tfrac{\partial a_2}{\partial\eta_2}\left(a_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_2}\right) + \tfrac{\partial a_2}{\partial u}\left(a_1\tfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg)d\delta. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть $W(\zeta) = a_1\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}$, тогда

$$\begin{cases} W(\theta) + a_1\left(a_1\tfrac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\tfrac{\partial a_1}{\partial\eta_1}W(\eta_1) + \tfrac{\partial a_1}{\partial\eta_2}W(\eta_2) + \tfrac{\partial a_1}{\partial u}W(u)\right)d\delta,\\ \varphi'W(\theta) + a_2\left(a_1\tfrac{\partial\omega}{\partial x_1} + a_2\tfrac{\partial\omega}{\partial x_2} - 1\right) = -\int\limits_0^{\omega(x_1,x_2)}\left(\tfrac{\partial a_2}{\partial\eta_1}W(\eta_1) + \tfrac{\partial a_2}{\partial\eta_2}W(\eta_2) + \tfrac{\partial a_2}{\partial u}W(u)\right)d\delta. \end{cases} \tag{3.6}$$

Полученная система разрешима, если (см. [1]):

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a_1\\ \varphi' & a_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.7}$$

В лемме 3.1. доказано, что решение задачи (1.1), (3.1) дает решение системы уравнений (2.3), (2.5), (2.15) и наоборот: непрерывно дифференцируемое решение задачи (2.3),(2.5),(2.15) при $s = \omega(x_1, x_2)$ будет решением задачи (1.1), (3.1).

Следуя разработанной в работе [1] схеме, составим резольвентную систему, используя те же обозначения, что в работах [1],[2],[11]:

$$U = \gamma(W_2) + \int_0^s f(H_1, H_2, U)\, d\delta, \tag{3.8}$$

$$U_i = \gamma'(W_2) W_{2i} + \int_0^s (f_1 H_{1i} + f_2 H_{2i} + f_U U_i)\, d\delta, \tag{3.9}$$

$$H_i = x_i - \int_s^{W_1} a_i(H_1, H_2, U)\, d\delta, \tag{3.10}$$

$$H_{lk} = \delta_k^l - a_l W_{1k} + \int_s^{W_1} (a_{l1} H_{1k} + a_{l2} H_{2k} + a_{lU} U_k)\, d\delta, \tag{3.11}$$

$$W_i = \begin{cases} \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12} dx_2, i = 1, \\ x_1 - \int\limits_0^{W_1} a_1(H_1, H_2, U)\, d\delta, i = 2, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$W_{11} = J^{-1}\left(-\varphi' + \int_0^{W_1}\left(\varphi'\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{i1} + a_{1U} U_1\right) - \left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{i1} + a_{2U} U_1\right)\right) d\delta\right), \tag{3.13}$$

$$W_{12} = J^{-1}\left(1 + \int_0^{W_1}\left(\varphi'\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{i2} + a_{1U} U_2\right) - \left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{i2} + a_{2U} U_2\right)\right) d\delta\right), \tag{3.14}$$

$$W_{2l} = J^{-1}\left((-1)^{l+1} a_{3-l} + \int_0^{W_1}\left(a_1\left(\sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{il} + a_{2U} U_l\right) - a_2\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{il} + a_{1U} U_l\right)\right) d\delta\right), \tag{3.15}$$

где $i, j, k = 1, 2$, δ_k^l — символ Кронекера;

$U, U_1, U_2, H_1, H_2, H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}, W_1, W_2, W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$ — новые неизвестные функции. Для краткости аргументы вышеперечисленных функций были опущены.

Пусть $\varepsilon_0 = \min\left(\dfrac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \dfrac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}}{\xi_1 + 10\zeta_1\xi_2}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_3 + 10\zeta_1\xi_2}\right)$,

$$\begin{gathered} \zeta_1 = K_0(K_{\varphi'} + 1) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma, \\ \sigma_1 = K_0(M_{a_1} K_{\varphi'} + M_{a_2})(K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'} K_0(M_{a_2} K_{a_1} + M_{a_1} K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f, \\ \sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f,\ \xi_1 = c K_{\varphi'}((K_{\gamma'} + 1) K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1) K_{a_{11}} + K_{f_1} + \\ + K_{a_{21}}),\ \xi_2 = 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1) M_{a_1} + M_{a_2} + M_f),\ J = a_2 - a_1\varphi',\ K_J = K_0^{-1}, \\ \xi_3 = c((K_{\gamma'} + 1) K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1) K_{a_{12}} + K_{f_2} + K_{a_{22}}), \end{gathered}$$

где константы определены как максимумы абсолютных значений известных функций и их производных.

Установим существование решения системы (3.8)–(3.15) интегральных уравнений и его единственность. Будем использовать метод последовательных приближений. За начальные приближения примем: $H_1^0 = x_1$, $H_2^0 = x_2$, $U^0 = \gamma\left(W_2^0\right)$, $W_1^0 = 0$, $W_2^0 = x_1$, $H_{11}^0 = 1$, $H_{12}^0 = 0$, $H_{21}^0 = 0$, $H_{22}^0 = 1$, $U_1^0 = \gamma'$, $U_2^0 = 0$, $W_{11}^0 = 0$, $W_{12}^0 = 0$, $W_{21}^0 = 1$, $W_{22}^0 = 0$. Прежде, чем записать резольвентную систему, составленную для последовательных приближений, будем обозначать верхним индексом n – n-ое приближение функции, вместо W_1^n в верхнем пределе интегрирования будем писать $W_1\backslash n$. Запишем резольвентную систему для последовательных приближений, с учетом введенных обозначений:

$$H_i^{n+1} = x_i - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} a_i^n d\delta, \tag{3.16}$$

$$U^{n+1} = \gamma\left(W_2^{n+1}\right) + \int\limits_0^s f^n d\delta, \tag{3.17}$$

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^n dx_2, i = 1, \\ x_1 - \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} a_1^n d\delta, i = 2, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$H_{lk}^{n+1} = \delta_k^l - a_l^{n+1} W_{1l}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{l1}^n H_{1k}^n + a_{l2}^n H_{2k}^n + a_{lU}^n U_k^n\right) d\delta, \tag{3.19}$$

$$U_i^{n+1} = \gamma'\left(W_2^{n+1}\right) W_{2i}^{n+1} + \int\limits_0^s \left(f_1^n H_{1i}^n + f_2^n H_{2i}^n + f_U^n U_i^n\right) d\delta, \tag{3.20}$$

$$W_{11}^{n+1} = J_{n+1}^{-1}\left(-\varphi'\left(W_2^{n+1}\right) + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1}\left(\varphi'\left(W_2^n\right)\left(\sum_{i=1}^{2} a_{1i}^n H_{i1}^n + a_{1U}^n U_1^n\right) - \right.\right. \tag{3.21}$$
$$\left.\left. - \left(\sum_{i=1}^{2} a_{2i}^n H_{i1}^n + a_{2U}^n U_1^n\right)\right) d\delta\right),$$

$$W_{12}^{n+1} = J_{n+1}^{-1}\left(1 + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1}\left(\varphi'\left(W_2^n\right)\left(\sum_{i=1}^{2} a_{1i}^n H_{i2}^n + a_{1U}^n U_2^n\right) - \left(\sum_{i=1}^{2} a_{2i}^n H_{i2}^n + a_{2U}^n U_2^n\right)\right) d\delta\right), \tag{3.22}$$

$$W_{2l}^{n+1} = J_{n+1}^{-1}\left((-1)^{l+1} a_{3-l}^{n+1} + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1}\left(a_1^n\left(\sum_{i=1}^{2} a_{2i}^n H_{il}^n + a_{2U}^n U_l^n\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - a_2^n\left(\sum_{i=1}^{2} a_{1i}^n H_{il}^n + a_{1U}^n U_l^n\right)\right) d\delta\right), \tag{3.23}$$

где $W_1\backslash n$ есть n–ое последовательное приближение для функции W_1.

Решение системы уравнений (3.16)–(3.23) в множестве Ω_ε будем искать в предположении, что $|U| \leqslant K_U$, и, кроме того, $|f| \leqslant K_f$, $|\gamma| \leqslant K_\gamma$. Пусть $\varepsilon = \max\limits_{x_1, x_2 \in \Omega_\varepsilon} |x_2 - \varphi(x_1)|$;

$X_1 = \max\limits_{x_1\in[X_1;X_2]} \{|X_1|;|X_2|\}$; $X_2 = \max\limits_{x_1\in[X_1;X_2]} \{|\varphi(x_1) - \beta_0|, |\varphi(x_1) + \beta_0|\}$. С учетом того, что: $|a_i^m| \leqslant K_{ai}, |f^m| \leqslant K_f, |a_{ij}^m| \leqslant K_{aij}, |a_{iHj}^m| \leqslant K_{aiHj}$, $|a_{iU}^m| \leqslant K_{aiU}, |f_{Hi}^m| \leqslant K_{fHi}, |f_U^m| \leqslant K_{f_U}, |\gamma(W_2^m)| \leqslant N_\gamma, |\gamma'(W_2^m)| \leqslant K_{\gamma'}$, $|\varphi'(W_2^m)| \leqslant K_{\varphi'}$, $\dfrac{1}{|J_m|} = \dfrac{1}{|a_2^m - a_1^m\varphi'(W_2^m)|} \leqslant \dfrac{1}{K_{a_2} + K_{\varphi'}K_{a_1}} = K_0$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим $v^n = \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{11}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_2^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{11}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{21}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{22}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_2^n|$, $\zeta_1 = K_0(K_{\varphi'} + 1) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma$, $\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$, $\sigma_1 = K_0(M_{a_1}K_{\varphi'} + M_{a_2})(K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'}K_0(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$. Выпишем оценки для правых частей уравнений системы (3.16)—(3.23):

$$\left|H_i^{n+1}\right| \leqslant X_i + \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_i},\ \left|W_2^{n+1}\right| \leqslant X_1 + \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_1},\ \left|U^{n+1}\right| \leqslant N_\gamma + \left|W_1^{n+1}\right| K_f,$$
$$\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon\,\|W_{12}^n\|,\ \left|H_{lk}^{n+1}\right| \leqslant \delta_k^l + K_{a_l}\left|W_{1k}^{n+1}\right| + M_{a_l}\left|W_1^{n+1}\right|(\|H_{1k}^n\| + \|H_{2k}^n\| + \|U_k^n\|),$$
$$\left|U_i^{n+1}\right| \leqslant K_{\gamma'}\left|W_{2i}^{n+1}\right| + M_f\left|W_1^{n+1}\right|(\|H_{1i}^n\| + \|H_{2i}^n\| + \|U_i^n\|),$$
$$\left|W_{11}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{\varphi'} + K_0(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2})\left|W_1^{n+1}\right|(\|H_{11}^n\| + \|H_{21}^n\| + \|U_1^n\|),$$
$$\left|W_{12}^{n+1}\right| \leqslant K_0 + K_0(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2})\left|W_1^{n+1}\right|(\|H_{12}^n\| + \|H_{22}^n\| + \|U_2^n\|),$$
$$\left|W_{2i}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{a_{3-i}} + K_0\left|W_1^{n+1}\right|(K_{a_1}M_{a_2} + K_{a_2}M_{a_1})(\|H_{1i}^n\| + \|H_{2i}^n\| + \|U_i^n\|),$$

где $i, j, k = 1, 2$, δ_k^l – символ Кронекера.

Сложив левые и правые части полученных неравенств и учитывая введенные раннее обозначения, получим: $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\left(\sigma_1(v^n)^2 + \sigma_2 v^n\right)$. Потребуем, чтобы $\zeta_1 + \varepsilon\left((10\zeta_1)^2\sigma_1 + 10\zeta_1\sigma_2\right) \leqslant 10\zeta_1$, тогда $\varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}$. Таким образом, если $v^n \leqslant 10\zeta_1$,то $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\sigma_1(v^n)^2 + \varepsilon\sigma_2 v^n \leqslant 10\zeta_1$. Т.е. v^{n+1} — конечна при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}$, тогда из $\left|W_{11}^{n+1}\right| + \left|W_{12}^{n+1}\right| + \left|H_1^{n+1}\right| + \left|H_2^{n+1}\right| + \left|U^{n+1}\right| + \left|H_{11}^{n+1}\right| + \left|H_{12}^{n+1}\right| + \left|H_{21}^{n+1}\right| + \left|H_{22}^{n+1}\right| + \left|U_1^{n+1}\right| + \left|U_2^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1$ следует, что $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|, \left|H_1^{n+1}\right|, \left|H_2^{n+1}\right|, \left|U^{n+1}\right|, \left|H_{11}^{n+1}\right|, \left|H_{12}^{n+1}\right|, \left|H_{21}^{n+1}\right|, \left|H_{22}^{n+1}\right|, \left|U_1^{n+1}\right|, \left|U_2^{n+1}\right|$ тоже ограничены, а значит, $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|$ также ограничены. Тогда $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon\left\|W_{12}^{n+1}\right\|$, $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon$, а следовательно, $\left|W_2^{n+1}\right| \leqslant X_1 + 10\zeta_1\varepsilon K_{a_1}$.

Таким образом, все рассматриваемые $n+1$-ые приближения ограничены в множестве Ω_ε, где $\varepsilon \leqslant \min\left(\frac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1+\sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1K_f}\right)$, и последовательность, составленная из последовательных приближений, ограничена в множестве Ω_ε.

Обозначая $V^{n+1} = colon\big(H_1^{n+1}, H_2^{n+1}, U^{n+1}, W_1^{n+1}, W_{11}^{n+1}, W_{12}^{n+1}, W_2^{n+1}, W_{21}^{n+1}, W_{22}^{n+1}, H_{11}^{n+1}, H_{12}^{n+1}, H_{21}^{n+1}, H_{22}^{n+1}, U_1^{n+1}, U_1^{n+1}\big)$, $\|V^{n+1} - V^n\| = \left|H_1^{n+1} - H_1^n\right| + \left|H_2^{n+1} - H_2^n\right| + \left|U^{n+1} - U^n\right| + \left|W_1^{n+1} - W_1^n\right| + \left|W_{11}^{n+1} - W_{11}^n\right| + \left|W_{12}^{n+1} - W_{12}^n\right| + \left|W_2^{n+1} - W_2^n\right| + \left|W_{21}^{n+1} - W_{21}^n\right| + \left|W_{22}^{n+1} - W_{22}^n\right| + \left|H_{11}^{n+1} - H_{11}^n\right| + \left|H_{12}^{n+1} - H_{12}^n\right| + \left|H_{21}^{n+1} - H_{21}^n\right| + \left|H_{22}^{n+1} - H_{22}^n\right| + \left|U_1^{n+1} - U_1^n\right| + \left|U_2^{n+1} - U_2^n\right|$, $\chi = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 15}\chi_i$,где χ_i – постоянные, которые равны максимумам из коэффициентов, стоящих соответственно при $\|H_1^{n+1} - H_1^n\|$, $\|H_2^{n+1} - H_2^n\|$, $\|U^{n+1} - U^n\|$, $\|W_1^{n+1} - W_1^n\|$, $\|W_{11}^{n+1} - W_{11}^n\|$, $\|W_{12}^{n+1} - W_{12}^n\|$, $\|W_2^{n+1} - W_2^n\|$, $\|W_{21}^{n+1} - W_{21}^n\|$, $\|W_{22}^{n+1} - W_{22}^n\|$, $\|H_{11}^{n+1} - H_{11}^n\|$, $\|H_{12}^{n+1} - H_{12}^n\|$, $\|H_{21}^{n+1} - H_{21}^n\|$, $\|H_{22}^{n+1} - H_{22}^n\|$, $\|U_1^{n+1} - U_1^n\|$, $\|U_2^{n+1} - U_2^n\|$, и складывая разности $n+1$ и n приближений для каждой из неизвестных функций, входящих в систему (3.16)—(3.23) получим $\|V^{n+1} - V^n\| \leqslant \varepsilon\chi\,\|V^n - V^{n-1}\|$. Подберем ε таким образом, чтобы $\varepsilon\chi < 1$, $\left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left(\dfrac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1K_f}; \dfrac{1}{\chi + 1}\right)\right)$, а $V^n = V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + ... + V^n - V^{n-1}$ можно было оценить суммой.

Введем обозначения:

$$I_1=\left\|\left(H_1^0,H_2^0,U^0,W_1^0,W_{11}^0,W_{12}^0,W_2^0,W_{21}^0,W_{22}^0,H_{11}^0,H_{12}^0,H_{21}^0,H_{22}^0,U_1^0,U_1^0\right)\right\|,$$
$$I_2=\left\|\left(H_1^1,H_2^1,U^1,W_1^1,W_{11}^1,W_{12}^1,W_2^1,W_{21}^1,W_{22}^1,H_{11}^1,H_{12}^1,H_{21}^1,H_{22}^1,U_1^1,U_1^1\right)\right\|,$$

тогда $\|V^0\|\leqslant I_1,\ \|V^i-V^{i-1}\|\leqslant\varepsilon^{i-1}\chi^{i-1}I_2, 1\leqslant i\leqslant n.$

Таким образом, для ряда $V^0+V^1-V^0+V^2-V^1+\ldots+V^n-V^{n-1}+\ldots$,была получена оценка его частичной суммы: $\|V^n\|\leqslant\|V^0\|+\|V^1-V^0\|+\|V^2-V^1\|+...+\|V^n-V^{n-1}\|\leqslant I_1+\dfrac{I_2}{1-\varepsilon\chi}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}V^i$ сходится.

Единственность решения следует из того факта, что для разности двух возможных решений u_I и u_{II} уравнения (2.5) будет выполняться неравенство $\|u_{II}-u_I\|\leqslant\leqslant\varepsilon\chi_3\|u_{II}-u_I\|$, где $\varepsilon\chi_3<1$.

Для завершения доказательства теоремы в соответствии с общей схемой, изложенной в [11], [12], необходимо доказать, что $H_{11}=\dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}$, $H_{12}=\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}$, $H_{21}=\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}$, $H_{22}=\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2}$, $U_1=\dfrac{\partial U}{\partial x_1}$, $U_2=\dfrac{\partial U}{\partial x_2}$, $W_{11}=\dfrac{\partial W_1}{\partial x_1}$, $W_{12}=\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}$, $W_{21}=\dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}$, $W_{22}=\dfrac{\partial W_2}{\partial x_2}$.

Чтобы показать, что $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}\to H_{11}$, $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2}\to H_{12}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\to H_{21}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\to H_{22}$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}\to U_1$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_2}\to U_2$ сложим выражения для $|H_{11}-\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}|,|H_{12}-\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2}|,|H_{21}-\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}|,|H_{22}-\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_2}|,|U_1-\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}|,|U_2-\dfrac{\partial U^n}{\partial x_2}|$.

Введя обозначения $\widehat{V}=\widehat{V}\ (H_{11},H_{12},H_{21},H_{22},U_1,U_2)$,

$$\tilde V^n=\tilde V\left(\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1},\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2},\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1},\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2},\frac{\partial U^n}{\partial x_1},\frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right),\ \left\|\widehat{V}-\tilde V^n\right\|=\left\|H_{11}-\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1}\right\|+\left\|H_{12}-\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2}\right\|+$$
$$+\left\|H_{21}-\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\|+\left\|H_{22}-\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\right\|+\left\|U_1-\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\|+\left\|U_2-\frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right\|,$$

получим $\left\|\widehat{V}-\tilde V^n\right\|\leqslant10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)\cdot\left\|\widehat{V}-\tilde V^{n-1}\right\|+\Pi_n$, где

$$\Pi_n=(K_{a_1}+K_{a_2})\cdot\left(\left|W_{11}-\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|+\left|W_{12}-\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right)+L_{\gamma'}\left|W_2-W_2^n\right|\cdot\left(|W_{21}|+|W_{22}|\right)+$$
$$+K_{\gamma'}\cdot\left(\left|W_{21}-\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1}\right|+\left|W_{22}-\frac{\partial W_2^n}{\partial x_2}\right|\right)+(L_{a_1}+L_{a_2})\Big(\left\|H_1-H_1^{n-1}\right\|+$$
$$+\left\|H_2-H_2^{n-1}\right\|+\left\|U-U^{n-1}\right\|\Big)\cdot\left(\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right)+$$
$$+(M_{a_1}+M_{a_2})\cdot|W_1-W_1^n|\cdot\Big(\|H_{11}\|+\|H_{21}\|+\|U_1\|+\|H_{12}\|+\|H_{22}\|+\|U_2\|\Big)+$$
$$+|W_1^n|\left(\left(\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{11}}+L_{a_{21}})+\right.$$
$$\left.+\left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{12}}+L_{a_{22}})+\left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)(L_{a_{1U}}+L_{a_{2U}})\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left\|H_1-H_1^{n-1}\right\|+\left\|H_2-H_2^{n-1}\right\|+\left\|U-U^{n-1}\right\|\right)+|s|\left(\left(\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\right.\right.$$

$$+\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)L_{f_1}+\left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)L_{f_2}+$$

$$+\left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)L_{f_U}\right)\left(\left\|H_1-H_1^{n-1}\right\|+\left\|H_2-H_2^{n-1}\right\|+\left\|U-U^{n-1}\right\|\right).$$

Покажем, что $\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$ ограничены. Действительно,

$$\left|\tfrac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|=\left|\lim_{\Delta x_1\to 0}\tfrac{W_1^n(x_1+\Delta x_1,x_2)-W_1^n(x_1,x_2)}{\Delta x_1}\right|=$$

$$=\left|\lim_{\Delta x_1\to 0}\tfrac{1}{\Delta x_1}\Big(\int\limits_{\varphi(x_1+\Delta x_1)}^{x_2}W_{12}^{n-1}dx_2-\int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2}W_{12}^{n-1}dx_2\Big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|W_{12}^{n-1}\right\|\left|\lim_{\Delta x_1\to 0}\tfrac{-(\varphi(x_1+\Delta x_1)-\varphi(x_1))}{\Delta x_1}\right|=\left\|W_{12}^{n-1}\right\|\cdot|\varphi'(x_1)|\leqslant\left\|W_{12}^{n-1}\right\|K_{\varphi'}.$$

Ранее было доказано, что $|W_1^n|$ ограничена,и,следовательно, отсюда $|W_{11}^n|$ и $|W_{12}^n|$ также ограничены. Можно сказать, что $|W_{12}^n|\leqslant\varepsilon c$, а значит, $\left\|\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right\|\leqslant\varepsilon cK_{\varphi'}$.

$$\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|=\left|\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{W_1^n\left(x_1,x_2+\Delta x_2\right)-W_1^n\left(x_1,x_2\right)}{\Delta x_2}\right|=$$

$$=\left|\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{1}{\Delta x_2}\left(\int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2+\Delta x_2}W_{12}^{n-1}\left(x_1;\delta\right)d\delta-\int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2}W_{12}^{n-1}\left(x_1;\delta\right)d\delta\right)\right|\leqslant\left\|W_{12}^{n-1}\right\|,\text{то}\left\|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right\|\leqslant\varepsilon c.$$

Поскольку $$\left|\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1}\right|=\left|1-a_1^{n-1}\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}-\int\limits_s^{W_1\backslash n}\left(a_{11}^{n-1}\left(\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1}-1\right)+a_{11}^{n-1}+a_{12}^{n-1}\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_{1U}^{n-1}\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right)d\delta\right|\leqslant 1+K_{a_1}\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|+\left|W_1^n\right|M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right)+$$
$$+\left|W_1^n\right|K_{a_1},\text{то}$$

$$\left|\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1}\right|\leqslant 1+\varepsilon cK_{a_1}K_{\varphi'}+10\zeta_1\varepsilon M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right)+10\zeta_1\varepsilon K_{a_1}. \tag{3.24}$$

Выведем оценки для $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1},\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1},\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}$. Сложив неравенства для $\left\|\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}-1\right\|$, $\left\|\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\|$, $\left\|\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\|$, и введя обозначения $v_1^n=\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}-1\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$, $\xi_1=cK_{\varphi'}\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right)+10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_{11}}+K_{a_{21}}+K_{f_1}\right)$, $\xi_2=10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)\cdot\right.$ $\left.\cdot M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)$, получим $v_1^n\leqslant K_{\gamma'}+\varepsilon\left(\xi_1+\xi_2v_1^{n-1}\right)$. Найдем такое ε, чтобы $K_{\gamma'}+\varepsilon\left(\xi_1+10\zeta_1\xi_2\right)\leqslant 10\zeta_1$, т. е. $\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1-K_{\gamma'}}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$.

Таким образом, если $v_1^{n-1}\leqslant 10\zeta_1$, то $v_1^n\leqslant 10\zeta_1$. Мы получили, что v_1^n конечна при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1-K_{\gamma'}}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$, тогда из неравенства $\left|\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}-1\right|+\left|\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\left|\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|\leqslant$

$\leqslant 10\zeta_1$ следует, что величины $\left|\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}-1\right|$, $\left|\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$ ограничены, а значит, ограничена и $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1}$. С учетом формулы (3.24): $\left|\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_1}\right| \leqslant 1+\varepsilon c K_{a_1} K_{\varphi'} + (10\zeta_1)^2 \varepsilon M_{a_1} + 10\zeta_1 \varepsilon K_{a_1}$, $\left\|\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_1}\right\| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon \left(c K_{a_1} K_{\varphi'} + (10\zeta_1)^2 M_{a_1} + 10\zeta_1 K_{a_1}\right)$.

Аналогично показывается, что при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{10\zeta_1}{\xi_3+10\zeta_1\xi_2}$ ограничены $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2}-1$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_2}, \dfrac{\partial U^n}{\partial x_2}$, а следовательно, и $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$. Здесь ζ_1, ξ_2 определены выше, а $\xi_3 = c\left(\left(K_{\gamma'}+\right.\right.$ $\left.\left.+1\right) K_{a_1} + K_{a_2}\right) + 10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right) K_{a_{12}} + K_{a_{22}} + K_{f_2}\right)$.

В силу $W_{11}^n \to W_{11}$, что $\frac{\partial W_1}{\partial x_1} = W_{11}$ и $|W_1^n - W_1| \leqslant \varepsilon_1$, т. к. $W_1^n \to W_1$, получим $\left|W_{11} - \dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| \leqslant \varepsilon_1$. Таким образом $W_{11} = \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$.

Равенства $\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_2} = W_{12}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_1} = W_{21}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_2} = W_{22}$ доказываются аналогично.

Поскольку $W_{11}^n \underset{n\to\infty}{\to} W_{11}$, $W_{12}^n \underset{n\to\infty}{\to} W_{12}$, $W_{21}^n \underset{n\to\infty}{\to} W_{21}$, $W_{22}^n \underset{n\to\infty}{\to} W_{22}$ и a_1^n, a_2^n, $\gamma'(W_2^n)$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ ограничены, то $\forall \tilde{\varepsilon}_{\max} > 0\ \exists N \in \mathrm{N}\ \forall n \geq N\ \ \|\Pi_n\| < \tilde{\varepsilon}_{\max}$.

Значит, $\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\| \leqslant 10\zeta_1 \varepsilon \left(M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right) \|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \tilde{\varepsilon}_{\max}$.

Обозначим $A_{\max} = 10\zeta_1 \varepsilon \left(M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right)$, причем $A_{\max} < 1$. Тогда записанное выше неравенство примет вид $\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\| \leqslant A_{\max} \|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \tilde{\varepsilon}_{\max}$. Из этого следует, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеем $\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n+p}\| \leqslant A_{\max}^{p+1} \|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1-A_{\max}}$. Поскольку $A_{\max} < 1$, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим: $\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\| \leqslant \delta$, где $\delta = \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1-A_{\max}}$.

Мы доказали, что $\tilde{V}^n$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\|\tilde{V}^n\|$ при $n \to \infty$, то есть $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \to H_{11}, \dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \to H_{12}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to H_{21}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to H_{22}$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1} \to U_1$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_2} \to U_2$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\|\tilde{V}^n\|$.

В результате для последовательностей $\{H_1^n\}$, $\{H_2^n\}$, $\{U^n\}$ были установлены следующие свойства: $H_1^n \to H_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $H_2^n \to H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U^n \to U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$. В силу полноты и замкнутости $C^1(\Omega_\varepsilon)$ получаем, что $H_1 \in C^1(\Omega_\epsilon)$, $H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, а значит, обладают частными производными по s, x_1, x_2, причем $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \to \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} \equiv H_{11}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} \equiv H_{21}$, $\dfrac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \to \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2} \equiv H_{12}$, $\dfrac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} \equiv H_{22}$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_1} \to \dfrac{\partial U}{\partial x_1} \equiv U_1$, $\dfrac{\partial U^n}{\partial x_2} \to \dfrac{\partial U}{\partial x_2} \equiv U_2$. Таким образом, теорема доказана.

Т е о р е м а 3.1 *Пусть* $a_1(x_1,x_2,z)$, $a_2(x_1,x_2,z)$, $f(x_1,x_2,z)$ *непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве* Q_ρ; L *— кривая, несущая начальные данные:* $x_2 = \varphi(x_1)$; $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2[X_1; X_2]$; *выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$. *Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *задача Коши* (1.1), (3.1) *имеет единственное решение* $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$, *которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $u(s,x_1,x_2) = U(s,x_1,x_2)$, *определяемой из резольвентной системы* (3.8) – (3.15).

Список литературы

1. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

2. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Доказательство локальной разрешимости резольвентной системы интегральных уравнений, соответствующей квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2012, № 14, 41–51.

3. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “Условия целесообразности применения метода дополнительного аргумента к квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка в частных производных общего вида”, *Асимптотические топологические и компьютерные методы в математике*, Труды междунар. научн. конф. посвящ. 70-летию академика М. И. Иманалиева (Бишкек, КГНУ), Сер. 3. Естеств. и техн. науки, Матем. науки. Информ. и инф. технологии, Вестник КГНУ, 2001, 6–7.

4. С. Н. Алексеенко, “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости «одноосной» задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

5. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Доклады РАН*, **329**:5 (1993), 543–546.

6. С. Н. Алексеенко, “Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в «одноосной» задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2010, № 12, 51–57.

7. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

8. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

9. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема”, *Докл. АН*, **323**:3 (1992), 410–424.

10. М. И. Иманалиев, *Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными*, Илим, Бишкек, 1992, 111 с.

11. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.

12. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 27–37.

Поступила 10.02.2018

MSC2010 34C20

A first-order partial differential equation of the common type with different ways of initial data

© $\boxed{\text{S. N. Alekseenko}}$ [1], **L. E. Platonova** [2]

Abstract. The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation is studied for different cases of initial data. In the first case, the line carrying the initial data is specified parametrically; in the second case, this line is described in Cartesian coordinates and has an infinite length; in the third case, the line is specified in Cartesian coordinates and its length is finite. In each case, the local resolvability conditions are formulated for the considered quasi-linear equation and it is shown that the solution has the same smoothness as the function defining the initial conditions. To study the above problems the method of additional argument was used. Using this method, some system of integral equations is solved, and the solution of this system gives the solution of the Cauchy problem for the original equation.

Key Words: quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument, local resolvability, integral equation.

References

1. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “The construction of the basic resolution of the system of integral equations for quasi-linear partial differential equations of the first order in the case of parametric setting initial data”, *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **13** (2011), 61–70 (In Russ.).

2. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “Proof of local solvability of the resolvent of a system of integral equations corresponding to quasi-linear equations of the first order in the case of parametric setting initial data”, *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 41–51 (In Russ.).

[1] **Sergey N. Alekseenko**, Professor of the Applied Mathematics Chair, Nizhniy Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev(24 Minin St., Nizhniy Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci.(Physies and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0002-1455-1263, sn-alekseenko@yandex.ru

[2] **Lyubov E. Platonova**, Assistant Lecture of the Mathematical Analysis Chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University named after Kozma Minin (1 Ylyanov St., Nizhniy Novgorod 604950, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3601-2276, fluff13@yandex.ru

3. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “The terms of expedience of application of the method of additional argument to a quasilinear differential equations of the first order equations general form”, *Asimptoticheskiye topologicheskiye i kompyuternye metody v matematike*, Trudy mezhdunar. nauch. konf. posvyashch. 70-ti letiyu akademika M. I. Imanalieva (Bishkek, KGNU), Ser. 3 Estestv. i tekhn. nauki, **6**, Matem.nauki. Inform. i inf. tekhnologii, Vestnik KGNU, 2001, 6–7 (In Russ.).

4. S. N. Alekseenko, “[Application of the method of an additional argument to the study of the solvability of the ”uniaxial” Cauchy problem for quasilinear partial differential equations of the first order]”, *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **11** (2009), 40–49 (In Russ.).

5. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “[On the theory of nonlinear equations with a differential operator of the type of the total time derivative]”, *Doklady RAN*, **329**:5 (1993), 543–546 (In Russ.).

6. S. N. Alekseenko, “[Proof of the convergence of successive approximations constructed using the method of an additional argument in the ”uniaxial” Cauchy problem for quasilinear partial differential equations of the first order]”, *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **12** (2010), 51–57 (In Russ.).

7. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, “[Additional argument method]”, *Vestnik KazNU. Seriya matematika, mekhanika, informatika. Spetsial’nyy vypusk*, **1** (2006), 60–64 (In Russ.).

8. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “[On the existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear partial differential equations of the first order]”, *Dokl. RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).

9. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “[On the theory of non-linear integro-differential partial differential equations of Whitham type]”, *Dokl. AN*, **323**:3 (1992), 410–424 (In Russ.).

10. M. I. Imanaliev, *Nelineynye integro-differentsial’nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Nonlinear integro-differential equations with partial derivatives]*, Ilim, Bishkek, 1992 (In Russ.), 111 p.

11. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “A first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **14**:3 (2012), 21–28 (In Russ.).

12. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “The proof of a local solvability theorem for a quasi-linear first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15**:2 (2013), 27–37 (In Russ.).

Submitted 10.02.2018