

УДК 519.67; 538.945

Численное моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в толстый диск высокотемпературного сверхпроводника на основе алгоритма случайных блужданий

© Н. Д. Кузьмичев¹, И. В. Бурьянов², М. А. Васютин³, А. Ю. Шитов⁴

Аннотация. В работе выполнено численное моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в толстый диск высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП) находящегося в критическом состоянии. Задача сведена к нахождению минимума целевой функции, включающей интегральные уравнения 1-го рода. При этом объем диска, занятый экранирующим током (сверхтоком), отделяется криволинейной конической поверхностью, форма которой определяется случайным блужданием в плоскости (r, z) диска. Приведен результат разработки программы на языке программирования C# для расчета оптимальной конфигурации объема сверхтока в диске ВТСП с использованием алгоритма случайных блужданий. Приведены результаты вычислительного эксперимента, на основе модели Бина, для случаев когда внешнее магнитное поле в плоскости $z = 0$ проникает в сверхпроводящий диск на глубину 20, 50 и 80 % от радиуса диска. Представлены результаты работы программы для сетки 50x50 в плоскости (r, z) четверти сечения диска. Обработка и визуализация полученных численных данных выполнялись программными средствами OriginLab и MS Excel.

Ключевые слова: сверхпроводник 2-го рода, высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, экранирующий сверхток, модель Бина, интегральные уравнения 1-го рода, целевая функция, алгоритм случайных блужданий.

1. Введение

Высокотемпературные сверхпроводники (ВТСП) различной структуры имеют практически важные магнитные свойства и высокие значения критических параметров. Поэтому интерес к ним не угасает и в настоящее время. При использовании ВТСП в электротехнике и в радио- и электроизмерительной технике необходимо точно знать геометрическую

¹ Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

² Бурьянов Игорь Валерьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, i.v.buryanov@gmail.com

³ Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

⁴ Шитов Альмир Юрьевич, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, shishkin92@mail.ru

форму объема занятого экранирующим внешние магнитные поля сверхпроводящим током (сверхтоком). Существующие математические модели, описывающие экранирующие свойства ВТСП, плохо описывают карту распределения экранирующего сверхтока и намагниченность ВТСП.

2. Постановка задачи и модель расчета

Известно, что магнитное поле проникает в сверхпроводник второго рода, каковыми являются ВТСП, в виде вихревых нитей Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга [1], [2]. В силу изменения магнитного потока, в области его проникновения, возникает электрическое поле, которое создает экранирующий сверхток с плотностью, равной критической J_c . В общем случае величина J_c , зависит от внешнего магнитного поля индукцией B , т.е. $J_c = J_c(B)$ [3]. Полное магнитное поле (сумма внешнего аксиально-направленного поля и поля созданного экранирующим сверхтоком сверхпроводящего диска) определяется интегральными выражениями, записанными в цилиндрической системе координат. Для экранированной области диска D^- интегральные выражения для аксиальной H_z и радиальной H_r составляющих магнитного поля, созданного экранирующим сверхтоком, примут вид интегральных уравнений 1-го рода относительно критической плотности экранирующего сверхтока $J(r, z)$ [3]–[9]:

$$\begin{cases} \int_{D^+} G_z(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' = -2\pi \cdot H_0; \\ \int_{D^+} G_r(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь H_0 – напряженность внешнего аксиально-направленного магнитного поля, r, r', z, z' – текущие координаты в цилиндрической системе координат ($r, z \in D^-$), G_z и G_r – ядра интегральных уравнений выраженные через полные эллиптические интегралы 1-го рода $K(k)$ и $E(k)$:

$$G_z(r, z, r', z') = \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \cdot \left[K(k) - \frac{r'^2 - r^2 - (z - z')^2}{(r' + r)^2 + (z - z')^2} \cdot E(k) \right];$$

$$G_r(r, z, r', z') = \frac{z - z'}{r \sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \cdot \left[-K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} \cdot E(k) \right].$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}} d\theta;$$

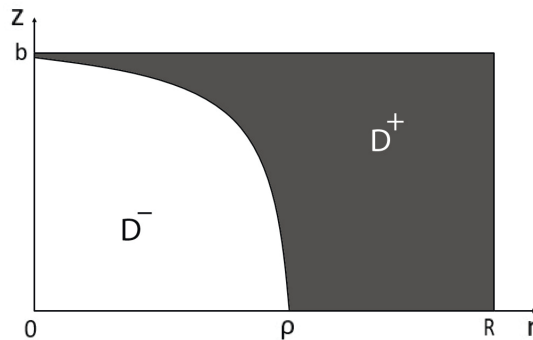
$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta} d\theta,$$

а аргумент эллиптических интегралов равен:

$$k^2(r, z, r', z') = \frac{4 \cdot r' \cdot r}{(r' + r)^2 + (z - z')^2}$$

На Рис. 2.1 представлено сечение четверти диска, в которое проникает сверхток и магнитное поле в виде нитей Абрикосова (область D^+). В область D^- (экранированная область) сверхток и магнитное поле не проникают. Данные области отделены цилиндрически симметричной криволинейной конической поверхностью. Сечение этой поверхности

представляет собой кривую $L(r, z) = 0$, уравнение которой необходимо найти численными методами. Для этого на основе уравнения (2.1) для H_z была построена целевая функция $F(r, z)$, минимум которой достигается при равных нулю значениях $H_z(r, z)$ и $H_r(r, z)$ в области D^- и определяет оптимальную кривую $L(r, z) = 0$ [4].



Р и с у н о к 2.1

Четвертая часть сечения диска, проходящего через ось z . В области D^+ сверхток есть, а в области D^- - отсутствует. R - радиус диска, b - его полутолщина

Определенная таким образом целевая функция имеет вид:

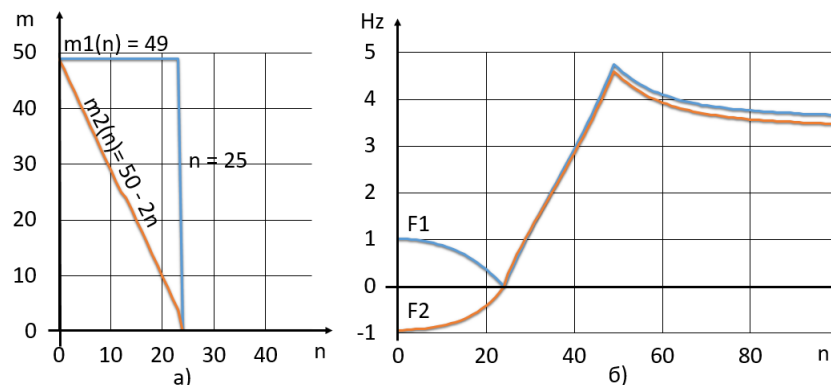
$$F(r, z) = \int_{D^+} G_z(r, z, r', z') \cdot J(r', z') dr' dz' + 2\pi \cdot H_0; \quad r, z \in D^-. \quad (2.2)$$

Критерием оптимальности являлось условие $F(r, z) < \varepsilon$, где ε – малое наперед заданное число ($\varepsilon/H_0 \ll 1$), определяющее точность вычисления.

Для того чтобы получить геометрическую форму объема проникшего сверхтока в диск ВТСП нами был разработан алгоритм случайных блужданий для поиска численного уравнения оптимальной кривой $L_{opt}(r, z) = 0$.

3. Результаты численного моделирования

В программе задаются значения радиуса R и полутолщины b диска. Затем формируется сетка (50x50, при соответствующих шагах m и n по r и z соответственно: $h_r = R/50$ и $h_z = b/50$) для четверти сечения диска и определяется область, в которую проник сверхток в ВТСП [6]. Линия отделяющая области D^+ и D^- , показанных на Рис. 2.1, будет находится между прямой и диагональю (Рис. 3.1), так как производные для этих форм кривых $L(r, z)$ $(dH_z/dr)|_{z=0}$ имеют разные знаки в области D^- .

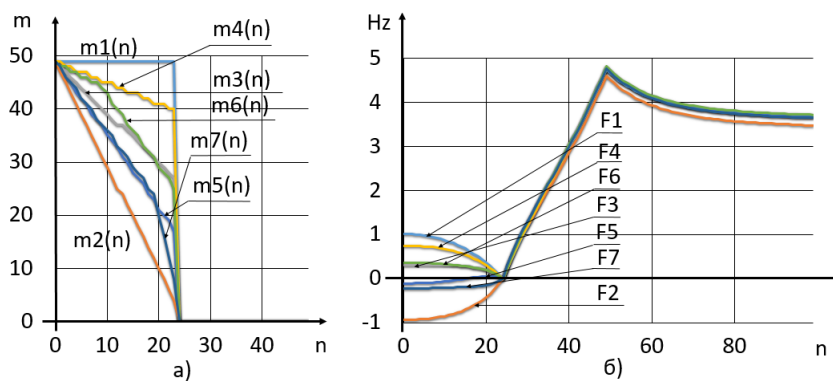


Р и с у н о к 3.1

а) первая область, в которой будет работать алгоритм: $m1(n) = 49$ – верхняя граница, $m2(n) = 50 - 2 \cdot n$ – нижняя граница, $n = 25$ – правая граница, б) соответствующие им значения целевой функции $F1, F2$ при глубине проникновения внешнего магнитного поля в диск для $z = 0, \rho/R = 0.5$

Для оптимальной кривой $L_{opt}(r, z)$ величина $(dH_z/dr)|_{z=0} = 0$. В программе координаты r, z задаются в единицах h_r и h_z . Область поиска оптимальной кривой ограничивается уравнениями: $n = 25, m = 49$ и $m(n) = 50 - 2n$. Рассчитываем для областей ограниченных выше указанными линиями напряженность H_z магнитного поля (Рис. 3.1).

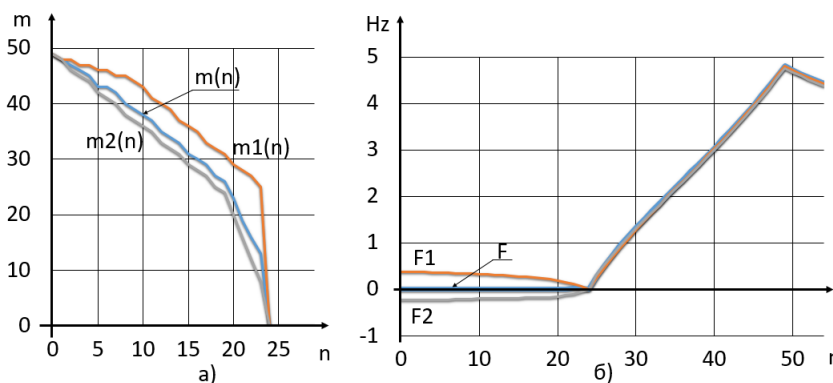
После получения значений, программа ищет оптимальные области, в которых, вероятнее всего, окажется нужная нам кривая, которая даст точную форму объема, занятого экранирующим сверхтоком. В результате получаем линии или кривые, которые соответствуют значению полного магнитного поля около нуля, т.е. $\sqrt{H_z^2 + H_r^2} - H_0 \approx 0$ и имеют форму вытянутой кривой (Рис. 3.2).



Р и с у н о к 3.2

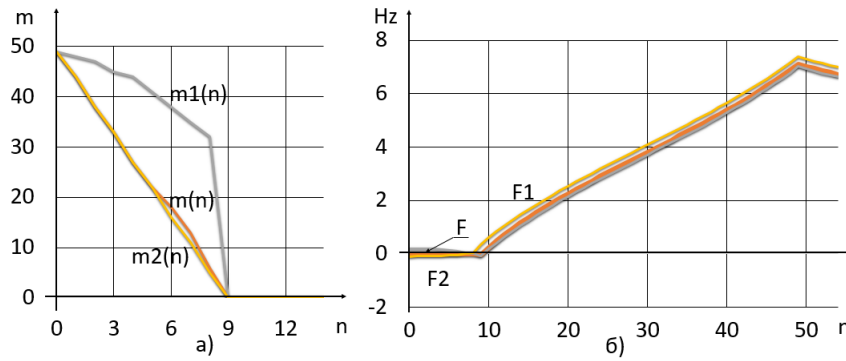
а) рассчитанные программой линии $m3(n) - m7(n)$ созданные в четверти сечения диска, б) соответствующие им значения целевой функции $F3 - F7$

Далее запускается алгоритм случайных блужданий, который ищет форму распределения сверхтока, соответствующую оптимальной функции $F(r, z)$. Результаты работы алгоритма при различных глубинах проникновения магнитного поля $\rho/R = 0.5, 0.2$ и 0.8 представлены на Рис. 3.3 – 3.5.



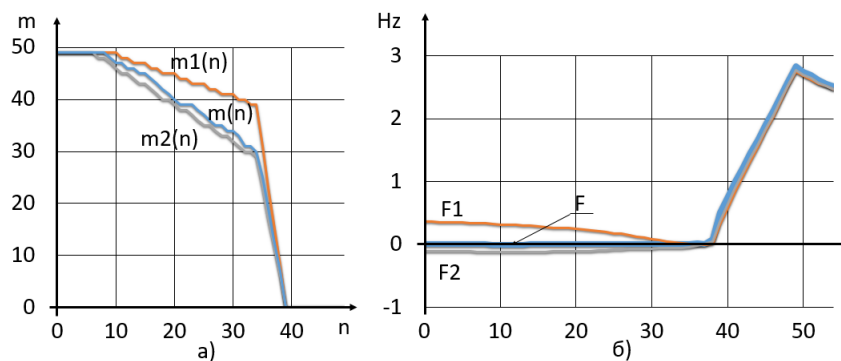
Р и с у н о к 3.3

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при $\rho/R = 0.5$ (50%)



Р и с у н о к 3.4

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при $\rho/R = 0.2$ (20%)



Р и с у н о к 3.5

Результаты работы алгоритма случайных блужданий при $\rho/R = 0.8$ (80%)

Разработанный алгоритм поиска осуществляется через рекурсивный вызов функции, который перебирает различные варианты форм проникновения магнитного поля в сверхпроводник, вычисляет интеграл для F по формуле (2.2) и на каждом этапе сравнивает его со средним значением полученных интегралов. По сути алгоритма поиска оптимальной конфигурации объема сверхтока сводится к построению кривых в областях с окончательно установленными верхней $m1(n)$ и нижней $m2(n)$ границами. Значение шага случайно, но варьируется в пределах значений данных граничных областей. По мере возрастания значений $[m1(n) - m2(n)]$ нижняя граница произвольных шагов увеличивается. Как только находится лучший вариант, при котором среднее отклонение $\leq 3\%$, данные записываются в файл, после чего данные обрабатываются в MS Excel и OriginPro с целью получения 2D и 3D графиков.

4. Заключение

Разработанный алгоритм случайных блужданий позволяет рассчитывать оптимальную конфигурацию объема диска занятого экранирующим сверхтоком. Алгоритм находит минимум целевой функции что, по сути, решает интегральные уравнения 1-го рода (2.1). Решением является численное уравнение кривой $L_{opt}(r, z) = 0$, образующей криволинейный конус, внутри которого поле и сверхток отсутствуют. С помощью программы, разработанной на языке C#, с использованием описанного выше алгоритма, было выполнено математическое моделирование процесса проникновения внешнего магнитного поля в

ВТСП-диск. Расчеты были выполнены для случаев, когда внешнее магнитное поле в плоскости $z = 0$ проникает на глубину 20, 50 и 80 % от радиуса диска. Полученные результаты показали эффективность разработанного алгоритма, что позволяет использовать его для других задач подобных рассмотренной. Например, для расчета распределения плотности критического тока в объеме диска для модели критического состояния типа Кима [2] – [3] сверхпроводников 2-го рода [7]. В статье представлены результаты работы программы для сетки 50×50 в плоскости (r, z) четверти сечения диска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Р. Bean, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 250 – 251.
2. Y. B. Kim, C. F. Heampstead, A. R. Strnad, “Critical persistent currents in hard superconductors”, *Phys. Rev. Lett.*, **9**:7 (1962), 306 – 309.
3. Е.Н. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities”, *Phys. Rev. B.*, **58**:10 (1998), 6506 – 6522.
4. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Намагниченность коротких цилиндров жестких сверхпроводников второго рода и карта распределения экранирующего тока в модели Бина”, *ЖТФ*, **82**:5 (2012), 1 – 5.
5. Н. Д. Кузьмичев, И. В. Бурьянов, “Математическое моделирование и разработка программы расчета магнитных свойств сверхпроводников 2-го рода в форме цилиндра”, *Материалы XI Всерос. науч.-практ. конф. «Машиностроение: наука, техника, образование»*, 2017, 270 – 278.
6. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование нелинейного отклика короткого цилиндра из жесткого сверхпроводника”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **19**:3 (2011), 110 – 119.
7. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Численное моделирование гармоник намагниченности диска из жесткого сверхпроводника второго рода в приближении экранировки поля в центре образца”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:1 (2011), 55 – 62.
8. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование процесса намагниченности цилиндрического сверхпроводника в модели Бина”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **21**:1 (2012), 139 – 148.
9. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:4 (2011), 25 – 34.

Поступила 15.01.2018

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

Numerical modeling of the process of penetration of an external magnetic field into a thick disk-shaped of a high-temperature superconductors on the basis of the random walk algorithm

© N. D. Kuzmichev ⁵, I. V. Buryanov ⁶, M. A. Vasyutin ⁷, A. Yu. Shitov ⁸

Abstract. In this paper a mathematical modeling of the process of penetration of an external magnetic field into a thick disk-shaped sample of high-temperature superconductor (HTSC) in a critical state is performed. The problem is reduced to finding the minimum of the objective function that includes integral equations of the first kind. At the same time, volume of the disk is occupied by the shielding superconducting current (overcurrent). Disk is separated by a curved conical surface with shape that is determined by a random walk in the disk (r, z) plane. The result of the development of the program in language C# is given; this program calculates the optimal configuration of the overcurrent volume in HTSC using the random walk algorithm. The results of the computational experiment based on Bean's model for cases when an external magnetic field in the $z = 0$ plane penetrates in a superconducting disk to the depth of 20, 50 and 80 % of the disk radius, are given. The results of the program's work for the grid of 50x50 in the plane (r, z) of the quarter of the disk section are presented. Processing and visualization of obtained numerical data were carried out using OriginLab and MS Excel.

Key Words: type-II superconductor, high-temperature superconductor, critical state, shielding overcurrent, Bean's model, integral equations of the first kind, objective function, random walk algorithm

REFERENCES

1. C.P. Bean, "Magnetization of hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 250 – 251.
2. Y.B. Kim, C.F. Heampstead, A.R. Strnad, "Critical persistent currents in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962), 306 – 309.
3. E.H. Brandt, "Superconductor disks and cylinders in axial magnetic field. II. Nonlinear and linear ac susceptibilities", *Phys. Rev. B.*, **58**:10 (1998), 6506 – 6522.
4. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, "[The magnetization in hard type-II superconductors of short cylinders and a map of the distribution of the shielding current in the Bean's model]", *JTF Publ.*, **82**:5 (2012), 1 – 5 (In Russ.).

⁵ **Nikolay D. Kuzmichev**, Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

⁶ **Igor V. Buryanov**, Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1033-0487>, i.v.buryanov@gmail.com

⁷ **Mikhael A. Vasyutin**, Docent of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

⁸ **Almir Yu. Shitov**, Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2029-8479>, shishkin92@mail.ru

5. N. D. Kuzmichev, I. V. Buryanov, “[Mathematical modeling and development of a program for calculating the magnetic properties in cylinder-shapes of type-II superconductors]”, *Materialy XI Vseros. nauch.-prakt. konf. «Mashinostroyeniye: nauka, tekhnika, obrazovaniye» [Proceeding of the XI All-Russian Scientific Conference of the «Mechanical engineering: science, technology, education»]*, 2017, 270 – 278 (In Russ.).
6. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the nonlinear response of a short cylinder-shape a hard superconductor]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. The Volga region. Physics and mathematics]*, **19**:3 (2011), 110 – 119 (In Russ.).
7. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Numerical simulation of the magnetization harmonics of a disk from a type-II hard superconductor in the field shielding approximation at the center of the sample]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:1 (2011), 55 – 62 (In Russ.).
8. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the magnetization process of a cylindrical superconductor in the Bean’s model]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki [Proceedings of Higher Educational Institutions. The Volga region. Physics and mathematics]*, **21**:1 (2012), 139 – 148 (In Russ.).
9. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, “[Mathematical modeling of the shielding current distribution and hysteresis of the magnetization of short cylinders of type-II hard superconductors in the Bean’s approximation]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:4 (2011), 25 – 34 (In Russ.).

Submitted 15.01.2018