DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.55-63

УДК 517.9

Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами

© **А. Н. Тында [1], Д. Н. Сидоров [2], И. Р. Муфтахов [3]**

Аннотация. Работа посвящена численному исследованию систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с ядрами, имеющими конечные разрывы вдоль непрерывных кривых. Приведены необходимые теоретические сведения относительно существования и единственности решений таких систем. Предлагается новый итерационный численный метод, в основе которого лежит линеаризация интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Для этого вычислены производные Фреше компонентов нелинейного векторного интегрального оператора в точке начального приближения. Ядра интегральных уравнений линейных систем остаются неизменными на каждой итерации, что позволяет снизить вычислительные затраты при численной реализации метода. Для линейных систем интегральных уравнений, возникающих на каждом шаге итерационного процесса, применяется кусочно-постоянная аппроксимация точного решения и специальные адаптивные сетки, учитывающие разрывы ядер. Приведена оценка погрешности метода. Предложенный численный подход допускает также использование более точных аппроксимаций решения в сочетании с соответствующими квадратурными формулами. При использовании кусочно-линейной аппроксимации порядок точности возрастает на единицу.

Ключевые слова: системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, разрывные ядра, метод Ньютона-Канторовича, адаптивные сетки, аппроксимация интегралов.

1. Введение

Функциональные уравнения (дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения) с различного рода отклоняющимися аргументами (задержками) являются универсальным средством моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, медицины, экономики и в других областях, см., например, [1]–[2]. При этом основанные на них модели обеспечивают наиболее реалистичное отражение свойств наблюдаемых процессов, являясь зачастую единственным математическим аппаратом для их описания. Интегральными динамическими моделями с запаздываниями можно описывать большое многообразие процессов. Такие модели учитывают эффект памяти динамических систем, когда прошлые состояния системы воздействуют на развитие в будущем. Интегральные уравнения с отклоняющимися аргументами (задержками) являются удобным аппаратом моделирования динамических систем в ряде областей физики, техники, экономики и т. д. Точные решения таких

[1] **Тында Александр Николаевич**, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

[2] **Сидоров Денис Николаевич**, ведущий научный сотрудник Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3131-1325, contact.dns@gmail.com

[3] **Муфтахов Ильдар Ринатович**, специалист Главного вычислительного центра ОАО «РЖД» (664005, г. Иркутск, ул. Маяковского, д. 25), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2516-459X, ildar_sm@mail.ru

уравнений в большинстве нетривиальных случаев не могут быть найдены аналитически, поэтому актуальной является разработка эффективных численных методов их решения.

Одним из классов функциональных уравнений с задержками являются интегральные уравнения Вольтерра и их системы, ядра которых терпят конечные разрывы вдоль семейства гладких кривых. В цикле работ авторов [2] – [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек. В данной работе итерационный численный метод обобщается и распространяется на системы уравнений такого типа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему нелинейных уравнений Вольтерра I рода [2], [4]:

$$\begin{cases} \int\limits_0^t h_1(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_1(t) = 0, \\ \int\limits_0^t h_2(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_2(t) = 0, \\ \vdots \\ \int\limits_0^t h_n(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))ds - f_n(t) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $t \in [0,T]$, а ядра $h_i(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s))$, терпящие конечные разрывы на линиях $\alpha_j(t),\ \ j=\overline{1,n-1},$ имеют вид

$$h_i(t,s,x_1(s),x_2(s),...,x_n(s)) = \begin{cases} K_{i1}(t,s)G_{i1}(s,x_1(s)),\ (t,s)\in m_1, \\ K_{i2}(t,s)G_{i2}(s,x_2(s)),\ (t,s)\in m_2, \\ \vdots \\ K_{in}(t,s)G_{in}(s,x_n(s)),\ (t,s)\in m_n, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $m_j = \{(t,s)|\ \alpha_{j-1}(t) < s \le \alpha_j(t)\}$; $\alpha_0(t)=0$; $\alpha_n(t)=t$; $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$. Функции $K_{ij}(t,s)$, $f_i(t)$ и $\alpha_j(t)$ имеют непрерывные производные относительно t при $(t,s)\in\overline{m}_j$, $K_{in}(t,t)\neq 0$, $0<\alpha_1(t)<\alpha_2(t)<...<\alpha_{n-1}(t)<t$. Функции $\alpha_1(t),...,\alpha_{n-1}(t)$ являются неубывающими при $t\in[0,T]$. Вопрос существования и единственности решения такого класса нелинейных систем изучался в работе [4].

В данной работе предлагается итерационный метод решения такого рода систем, основанный на линеаризации интегрального вектор-оператора. Для решения возникающих в итерационном процессе систем линейных уравнений с разрывными ядрами используется обобщение алгоритма прямой дискретизации, предложенного в работах [3]–[5]. Метод основан на кусочно-постоянной аппроксимации точных решений и имеет первый порядок точности.

3. Описание приближенного метода

Обозначим через P_i левую часть i-го уравнения системы (2.1):

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t,s)G_{ij}(s,x_j(s))ds - f_i(t), \tag{3.1}$$

через X – вектор неизвестных функций, а через F – вектор правых частей f_i

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Также введем матричный интегральный оператор

$$P(X) \equiv \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

компонентами которого являются нелинейные интегральные операторы

$$(P_{ij}x)(t) \equiv \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t,s)G_{ij}(s,x(s))ds, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Перепишем систему (2.1) в операторном виде:

$$P(X) = 0. \tag{3.3}$$

Для построения итерационного численного метода решения уравнения (3.3) используем модифицированную схему Ньютона-Канторовича [6]:

$$X^{m+1} = X^m - [P'(X^0)]^{-1}(P(X^m)), m = 0, 1, ..., \tag{3.4}$$

где $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функция начального приближения, а решение уравнения (3.3) определяется как предел $X^* = \lim\limits_{m\to\infty} X^m$. Производная $P'(X^0)$ оператора (3.2) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_{11}}{\partial x_1(t)} & \dfrac{\partial P_{12}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial P_{1n}}{\partial x_n(t)} \\ \dfrac{\partial P_{21}}{\partial x_1(t)} & \dfrac{\partial P_{22}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial P_{2n}}{\partial x_n(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_{n1}}{\partial x_1(t)} & \dfrac{\partial P_{n2}}{\partial x_2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial P_{nn}}{\partial x_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Ее компоненты $\left(\dfrac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)$, $i,j = \overline{1,n}$, определяются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)(t) = \lim_{\omega\to 0} \frac{P_{ij}(x_j^0 + \omega x) - P_{ij}(x_j^0)}{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\omega} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t,s)[G_{ij}(s, x_j^0(s) + \omega x(s)) - G_{ij}(s, x_j^0(s))]ds.$$

Осуществив предельный переход под знаком интеграла, получим:

$$\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j(t)}\right)(x_j^0)(t) = \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t,s)G_{ij_x}(s,x_j^0(s))x(s)ds,$$

где

$$G_{ij_x}(s,x_j^0(s)) = \frac{\partial G_{ij}(s,x_j(s))}{\partial x_j}\bigg|_{x=x_j^0}.$$

На итерации с номером m имеем операторное уравнение относительно поправки $\Delta X^{m+1} = X^{m+1} - X^m,\ \ m = 0,1,2,\ldots$

$$P'(X^0)\Delta X^{m+1} = -P(X^m),$$

которое в развернутом виде эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t,s)G_{1j}(s,x_j^0(s))\Delta x_j^{m+1}(s)ds = f_1(t) - \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t,s)G_{1j}(s,x_j^m(s))ds, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t,s)G_{2j}(s,x_j^0(s))\Delta x_j^{m+1}(s)ds = f_2(t) - \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t,s)G_{2j}(s,x_j^m(s))ds, \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_{nj}(t,s)G_{nj}(s,x_j^0(s))\Delta x_j^{m+1}(s)ds = f_n(t) - \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t,s)G_{nj}(s,x_j^m(s))ds. \end{cases}$$

Последняя система после ряда упрощений приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{1j}(t,s)G_{1j}(s,x_j^0(s))x_j^{m+1}(s)ds = \Psi_1^m(t), \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{2j}(t,s)G_{2j}(s,x_j^0(s))x_j^{m+1}(s)ds = \Psi_2^m(t), \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_{nj}(t,s)G_{nj}(s,x_j^0(s))x_j^{m+1}(s)ds = \Psi_n^m(t), \end{cases} \qquad m = 0,1,2,..., \tag{3.6}$$

где

$$\Psi_i^m(t) = f_i(t) - \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} K_{ij}(t,s)[G_{ij_x}(s,x_j^0(s))x_j^m(s) - G_{ij}(s,x_j^m(s))]ds.$$

Система (3.6) является системой линейных интегральных уравнений Вольтерра с разрывными ядрами $K_{ij}(t,s)G_{ij}(s,x_j^0(s)),\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n},$ не изменяющимися от итерации к итерации. Численный метод решения подобных систем уравнений, участвующих в итерационном процессе (3.4), предложим далее.

4. Дискретизация системы линейных интегральных уравнений

4.1. Формулировка проблемы

В данном параграфе предлагается численный метод решения систем линейных интегральных уравнений, возникающих на каждом шаге итерационного процесса (3.4).

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений I рода следующего вида:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_1(t,s)x_j(s)ds = f_1(t), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_2(t,s)x_j(s)ds = f_2(t), \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)} h_n(t,s)x_j(s)ds = f_n(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

где ядра $h_i(t,s), i = \overline{1,n}$ терпят конечные разрывы на линиях $\alpha_j(t), j = \overline{1,n-1}$ и имеют вид:

$$h_i(t,s) = \begin{cases} K_{i1} := K_{i1}(t,s)G_{i1}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_0(t) \le s \le \alpha_1(t); \\ K_{i2} := K_{i2}(t,s)G_{i2}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_1(t) \le s \le \alpha_2(t); \\ \vdots \\ K_{in} := K_{in}(t,s)G_{in}(s, x_j^0(s)) & \text{при } \alpha_{n-1}(t) \le s \le \alpha_n(t). \end{cases}$$

Здесь, как и ранее, $\alpha_0(t) \equiv 0$; $\alpha_0(t) < \alpha_1(t) < ... < \alpha_n(t) \equiv t$; $f(0) = 0$. Введенные с целью упрощения изложения новые ядра $K_{ij}(t,s)$ и правая часть $f_i(t)$ являются непрерывными и достаточно гладкими функциями. Функции $\alpha_j(t) \in C^1[0,T]$ и являются неубывающими. Кроме того, $\alpha_1'(0) \le \alpha_2'(0) \le ... \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$. Подробное теоретическое исследование уравнений такого типа проведено в книге [2].

4.2. Кусочно-постоянная аппроксимация

Для построения численного решения системы (4.1) на отрезке $[0,T]$ (в условиях существования единственного непрерывного решения) введем сетку узлов (необязательно равномерную):

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T, \quad h = \max_{j=\overline{1,N}}(t_j - t_{j-1}) = O\left(N^{-1}\right).$$

Приближенное решение системы (4.1) будем искать в виде вектора кусочно-постоянных функций:

$$X^N(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{N} x_1^j \delta_j(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} x_2^j \delta_j(t) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{N} x_n^j \delta_j(t) \end{pmatrix}, \ t \in (0,T], \ \delta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \Delta_j = (t_{j-1}, t_j], \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j \end{cases}$$

с неопределенными пока коэффициентами $x_i^j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,N}$.

Для определения значений $x_i^0=x_i(0),\ i=\overline{1,n}$, продифференцируем обе части каждого уравнения системы (4.1) по t:

$$f_i'(t)=\sum_{j=1}^{n}\left(\int\limits_{\alpha_{j-1}(t)}^{\alpha_j(t)}\frac{\partial K_{ij}(t,s)}{\partial t}x_j(s)ds+\alpha_j'(t)K_{ij}(t,\alpha_j(t))x_j(\alpha_j(t))-\right.$$

$$\left.-\alpha_{j-1}'(t)K_{ij}(t,\alpha_{j-1}(t))x_j(\alpha_{i-1}(t))\right).$$

Используя последнее соотношение, приходим к необходимости решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}K_{1j}(0,0)[\alpha_j'(0)-\alpha_{j-1}'(0)]x_j^0=f_1'(0),\\ \sum\limits_{j=1}^{n}K_{2j}(0,0)[\alpha_j'(0)-\alpha_{j-1}'(0)]x_j^0=f_2'(0),\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}K_{nj}(0,0)[\alpha_j'(0)-\alpha_{j-1}'(0)]x_j^0=f_n'(0)\end{cases}\tag{4.2}$$

относительно значений $x_j^0,\ j=\overline{1,n}$. Предполагается, что компоненты уравнения (4.1) таковы, что система линейных алгебраических уравнений (4.2) имеет единственное нетривиальное решение.

Введем далее обозначение $f_i^k=f_i(t_k),\ i=1,\dots,n,\ k=1,\dots,N$. Для определения коэффициентов x_j^1 запишем каждое уравнение системы (4.1) в точке $t=t_1$:

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{j-1}(t_1)}^{\alpha_j(t_1)}K_{ij}(t_1,s)x_j(s)ds=f_i^1.\tag{4.3}$$

Поскольку на данном шаге длины всех отрезков интегрирования $\alpha_j(t_1)-\alpha_{j-1}(t_1)$ в (4.3) не превосходят максимального шага сетки h, а компоненты приближенного решения принимают значения $x_j^1,\ j=\overline{1,n}$, то, применяя квадратурную формулу средних прямоугольников, получим систему:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j(t_1)-\alpha_{j-1}(t_1))K_i(t_1,\dfrac{\alpha_j(t_1)+\alpha_{j-1}(t_1)}{2})x_j^1=f_1^1,\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j(t_1)-\alpha_{j-1}(t_1))K_i(t_1,\dfrac{\alpha_j(t_1)+\alpha_{j-1}(t_1)}{2})x_j^1=f_2^1,\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_j(t_1)-\alpha_{j-1}(t_1))K_i(t_1,\dfrac{\alpha_j(t_1)+\alpha_{j-1}(t_1)}{2})x_j^1=f_n^1,\end{cases}$$

из которой определяются значения $x_j^1,\ j=\overline{1,n}$.

Обозначим далее через l_j^k номер отрезка сетки, на который попадает значение $\alpha_j(t_k)$, т. е. выполняется условие $t_{l_j^k-1}\le\alpha_j(t_k)\le t_{l_j^k}$.

Теперь предположим, что уже найдены значения $x_j^2, x_j^3, ..., x_j^{l_j^k-1}$, $j=\overline{1,n}$. Преобразуем систему уравнений (4.1) и потребуем выполнения равенств в точке $t=t_k$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{1j}(t_k,s)x_j(s)ds = f_1^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{1j}(t_k,s)x_j^N(s)ds, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{2j}(t_k,s)x_j(s)ds = f_2^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{2j}(t_k,s)x_j^N(s)ds, \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{nj}(t_k,s)x_j(s)ds = f_n^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{nj}(t_k,s)x_j^N(s)ds. \end{cases}$$

С учетом используемой аппроксимации приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{l_j^k} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{1j}(t_k,s)ds = f_1^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{1j}(t_k,s)x_j^N(s)ds, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{l_j^k} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{2j}(t_k,s)ds = f_2^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{2j}(t_k,s)x_j^N(s)ds, \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{l_j^k} \int\limits_{t_{l_j^k-1}}^{\alpha_j(t_k)} K_{nj}(t_k,s)ds = f_n^k - \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{j-1}(t_k)}^{t_{l_j^k-1}} K_{nj}(t_k,s)x_j^N(s)ds. \end{cases} \tag{4.4}$$

При этом для вычисления интегралов в (4.4) используются составные формулы средних прямоугольников, построенные по вспомогательной сетке узлов, привязанной при каждом конкретном значении N к линиям $\alpha_i(t)$ разрывов ядра $K(t,s)$.

Очевидно, что при такой аппроксимации метод имеет первый порядок точности, а оценку погрешности можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_N = \|X - X_N\|_{C[0,T]} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Также следует отметить, что предложенный численный подход допускает использование более точной аппроксимации решения. В частности, при использовании кусочно-линейной аппроксимации порядок точности возрастает на единицу.

Список литературы

1. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, 208 p.

2. D. N. Sidorov, *Integral dynamical models: singularities, signals and control*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 260 p.

3. Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов, “Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами”, *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*, **7**:3 (2014), 107–115.

4. I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, “Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **9**:1 (2016), 130–136.

5. I. R. Muftahov, A. N. Tynda, D. N. Sidorov, “Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119–128.

6. L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 604 p.

Поступила 14.01.2018

MSC2010 65R20

Numerical method for systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels

© **A. N. Tynda** [4], **D. N. Sidorov** [5], **Ildar R. Muftahov** [6]

Abstract. In this paper we investigate the systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with kernels having jump discontinuities along the set of smooth curves. The necessary theory concerning the existence and uniqueness of solutions of such systems is described. An iterative numerical method is proposed, based on the linearization of integral operators using the modified Newton-Kantorovich scheme. For this purpose, we calculate the Fréchet derivatives of the components of integral vector-operator at the initial approximation point. The kernels of the integral equations in the linear systems remain constant for each iteration. This allows to reduce the computational expenses in numerical realization of the method. For linear systems of integral equations arising at each step of the iterative process, we use a piecewise-constant approximation of the exact solution and special adaptive grids that take into account kernels discontinuities. The error of the method is estimated. Suggested numerical approach also allows the application of some more accurate approximations of the exact solution in aggregate with the corresponding quadrature formulas. The accuracy order increases by unity when the piecewise-linear approximation is used.
Key Words: systems of nonlinear Volterra integral equations, discontinuous kernels, Newton-Kantorovich method, adaptive meshes, approximation of the integrals.

[4] **Aleksandr N. Tynda**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

[5] **Denis N. Sidorov**, Leading Research Fellow Energy Systems Institute Russian Academy of Sciences (130 Lermontov St. Irkutsk 664033, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3131-1325, contact.dns@gmail.com

[6] **I. R. Muftahov**, Postgraduate student, Main Computing Center of Joint Stock Company «Russian Railways» (25 Mayakovaskogo St., Irkutsk 664005, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2516-459X, ildar_sm@mail.ru

References

1. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical modeling in economics, ecology and the environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, 208 p.

2. D. N. Sidorov, *Integral dynamical models: singularities, signals and control*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 260 p.

3. D. N. Sidorov, A. N. Tynda, I. R. Muftahov, "[Numerical solution of Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels]", *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **7**:3 (2014), 107–115 (In Russ.).

4. I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, "Solvability and numerical solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels", *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **9**:1 (2016), 130–136.

5. I. R. Muftahov, A. N. Tynda, D. N. Sidorov, "Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119–128.

6. L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd ed., 1982, 604 p.

Submitted 14.01.2018