DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.30-38

УДК 517.938.5, 512.721

О динамике бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги

© **Е. В. Ноздринова** [1], **О. В. Починка** [2]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс диффеоморфизмов замкнутого n-мерного многообразия, являющихся бифуркационными точками простых дуг в пространстве диффеоморфизмов. Понятие простой дуги возникло в результате, исследований Ш. Ньюхауса, Дж. Палиса и Фл. Такенса, которое показало, что типичное множество дуг, стартующих в системе Морса-Смейла, имеют в качестве первой бифуркационной точки диффеоморфизм с регулярной динамикой. Именно, неблуждающее множество такого диффеоморфизма конечно, но в отличие от систем Морса-Смейла, он может иметь либо одну негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом, либо одну орбиту нетрансверсального пересечения инвариантных многообразий периодических точек. Авторами изучены асимптотические свойства и структура вложения инвариантных многообразий неблуждающих точек бифуркационных диффеоморфизмов простой дуги, также установлена возможность полного упорядочивания периодических орбит таких диффеоморфизмов.

Ключевые слова: бифуркационные точки, простая дуга.

1. Введение и формулировка результатов

Рассмотрим гладкое замкнутое многообразие $M^n, n \geq 2$ с метрикой d, пространством $Diff(M^n)$, заданных на нем диффеоморфизмов, C^1-топологией, и его подмножеством $MS(M^n)$, состоящем из диффеоморфизмов Морса-Смейла. *Гладкой дугой* в $Diff(M^n)$ называется отображение $\xi\colon M^n \times [0,1] \to M^n$, гладко зависящее от координат $(x,t) \in M^n \times [0,1]$ и являющееся диффеоморфизмом при каждом t или, равносильно, гладко зависящее от t семейство диффеоморфизмов

$$\{\xi_t \in Diff(M^n),\, t \in [0,1]\}.$$

Рассмотрим гладкие дуги такие, что $\xi_t \in MS(M^n)$ для любого $t \in ([0,1] \setminus B)$, где B конечное множество. Согласно [5], для типичного множества таких дуг, диффеоморфизм ξ_b, $b \in B$ имеет конечное неблуждающее множество Ω_{ξ_b}, все орбиты которого являются гиперболическими, кроме, возможно, одной, которая представляет собой седло-узел или флип. При этом, если все орбиты множества Ω_{ξ_b} гиперболические, то все их инвариантные многообразия пересекаются трансверсально, кроме одной пары инвариантных многообразий, которые имеют нетрансверсальное пересечение вдоль одной гетероклинической орбиты; при наличии негиперболической периодической орбиты все инвариантные

[1] **Ноздринова Елена Вячеславовна**, стажер-исследователь лаборатории топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский институт "Высшая школа экономики"» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

[2] **Починка Ольга Витальевна**, заведующая лаборатории топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский институт "Высшая школа экономики"» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305, olga-pochinka@yandex.ru

многообразия всех неблуждающих точек пересекаются трансверсально. Также диффеоморфизм ξ_b не имеет циклов (т. е. последовательности попарно различных периодических орбит $\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_k, k\geq 2$ со свойством $W^s_{\mathcal{O}_1}\cap W^u_{\mathcal{O}_2}\neq\emptyset,\dots,W^s_{\mathcal{O}_{k-1}}\cap W^u_{\mathcal{O}_k}\neq\emptyset, W^s_{\mathcal{O}_k}\cap W^u_{\mathcal{O}_1}\neq\emptyset$).

Дуга с описанными выше свойствами называется *простой дугой* [4]. Обозначим через Φ множество бифуркационных точек простых дуг или, равносильно, множество диффеоморфизмов с описанными выше свойствами. В настоящей работе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1 *Пусть $f\in\Phi$. Тогда*

1. $M^n=\bigcup\limits_{p\in\Omega_f}W^u_p$;

2. W^u_p *является гладким подмногообразием многообразия* M^n *для любой периодической точки* $p\in\Omega_f$;

3. *Множество периодических орбит* $\{\mathcal{O}_p, p\in\Omega_f\}$ *допускает отношение полного порядка* $\prec$, *удовлетворяющее отношению Смейла*

$$\mathcal{O}_p\prec\mathcal{O}_q,\quad \textit{если}\ \ W^s_{\mathcal{O}_p}\cap W^u_{\mathcal{O}_q}\neq\emptyset;$$

4. $cl(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p\cup p)\subset\bigcup\limits_{r\in\Omega_f:\ell^u_p\cap W^s_r\neq\emptyset}W^u_r$ *для любой неустойчивой сепаратрисы* ℓ^u_p *(компоненты связности множества* $W^u_p\setminus p$*) периодической точки* $p\in\Omega_f$.

2. Неблуждающее множество диффеоморфизмов класса Φ

Пусть $f:M^n\to M^n$ диффеоморфизм класса Φ; p — его неподвижная точка. Определим тип неподвижной точки с помощью дифференциала; тип периодической точки периода k определяется типом этой точки как неподвижной точки диффеоморфизма f^k.

Дифференциал Df_p индуцирует разложение касательного пространства T_pM^n в прямую сумму инвариантных подпространств $T_pM^n=E^u\oplus E^c\oplus E^s$. Линейные отображения $Df_p|_{E^u}$, $Df_p|_{E^c}$, $Df_p|_{E^s}$ имеют собственные значения внутри, на границе и вне единичного круга соответственно. Обозначим размерности данных попространств через $\lambda^u_p,\lambda^s_p,\lambda^c_p$. Если $\lambda^c_p=0$, то точка p называется *гиперболической*. В этом случае p имеет *неустойчивое многообразие*, определяемое в топологических терминах условием

$$W^u_p=\{y\in M^n:\lim_{k\to-\infty}f^k(y)=p\},$$

являющееся гладкой (с гладкостью не меньше, чем гладкость f) инъективной иммерсией пространства $\mathbb{R}^{\lambda^u_p}$ и касающееся подпространства E^u. Аналогично точка p имеет *устойчивое многообразие*, определяемое в топологических терминах условием

$$W^s_p=\{y\in M^n:\lim_{k\to+\infty}f^k(y)=p\}\},$$

являющееся гладкой инъективной иммерсией пространства $\mathbb{R}^{\lambda^s_p}$ и касающееся подпространства E^s. Согласно теореме Гробмана-Хартмана (см., например, [6]), в окрестности гиперболической точки p поведение динамической системы с точностью до гомеоморфизма совпадает с поведением ее линеаризации и, более того, топологически сопряжено отображению

$$A_h(x_1,\dots,x_n)=\left(\pm 2x_1,2x_2,\dots,2x_{\lambda^u_p},\pm\frac{x_{\lambda^u_p+1}}{2},\frac{x_{\lambda^u_p+2}}{2},\dots,\frac{x_{\lambda^u_p+\lambda^s_p}}{2}\right).\tag{2.1}$$

Гиперболическая точка называется *стоком*, если $\lambda_p^u = 0$, *источником*, если $\lambda_p^u = n$ и *седлом*, если $0 < \lambda_p^u < n$.

Если $\lambda_p^c \neq 0$, то согласно [3], существует инвариантное подмножество W_p^c многообразия M^n, касательное к E^c в точке p и являющееся гладкой (с гладкостью не меньше, чем гладкость f) инъективной иммерсией пространства $\mathbb{R}^{\lambda_p^c}$. Оно называется *центральным многообразием* точки p. Центральное многообразие не единственно, но отображения $f|_{W_p^c}$ и $f|_{\tilde{W}_p^c}$ топологически сопряжены для любых центральных многообразий W_p^c и $\tilde{W}_p^c$. Динамика в окрестности не гиперболической точки p в данном случае не определяется линейной частью диффеоморфизма, но в некоторых простейших случаях динамика в окрестности негиперболической неподвижной точки допускает каноническое описание. Опишем два из них. На поясняющих рисунках двойными стрелками схематично изображены направления движения с экспоненциальным сжатием и растяжением, а одинарными стрелками выделены направления движения по центральному многообразию негиперболической точки.

1) Неподвижная точка p диффеоморфизма f называется *седло-узлом*, если $\lambda_p^c = 1$ и отображение $f|_{W_p^c}$ для любого центрального многообразия W_p^c имеет вид:

$$f|_{W_p^c}(x) = x + \alpha x^2 + O(x^3), \alpha \neq 0.$$

Согласно, например, [3], существует устойчивое W_p^s и неустойчивое W_p^u многообразия седло-узловой неподвижной точки, топологически определяемые аналогично гиперболическому случаю, но они являются гладкой инъективной иммерсией полупространств $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^s+1}$ и $\mathbb{R}_+^{\lambda_p^u+1}$ соответственно. Устойчивое многообразие W_p^s касается подпространства $E^u \oplus E^c$, а неустойчивое – подпространства $E^s \oplus E^c$ в точке p.

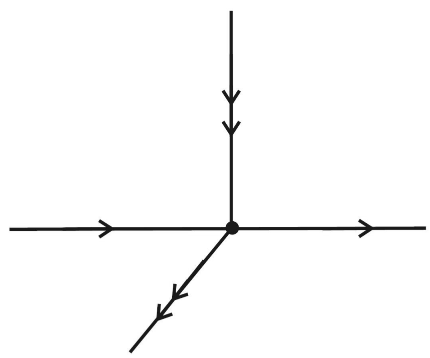

Рисунок **2.1**

Седло-узел

Согласно, например, [5], в окрестности седло-узловой точки p динамика системы топологически сопряжена отображению

$$A_s(x_1, \ldots, x_n) = \left(A_h(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n + x_n^2\right). \qquad (2.2)$$

2) Неподвижная точка p диффеоморфизма f называется *флипом*, если $\lambda_p^c = 1$ и отображение $f|_{W_p^c}$ для любого центрального многообразия W_p^c имеет вид:

$$f|_{W_p^c}(x) = -x + \alpha x^2 + \gamma x^3 + o(|x^3|), \gamma + \alpha^2 \neq 0.$$

Другими словами, точка p является негиперболическим стоком ограничения отображения f на центральное многообразие (аналогичное отображение с источником получается рассмотрением обратного отображения). Согласно, например, [3], существует устойчивое W_p^s и неустойчивое W_p^u многообразия флипа, топологически определяемые аналогично гиперболическому случаю, являющиеся гладкой инъективной иммерсией пространств $\mathbb{R}^{\lambda_p^s+1}$ и $\mathbb{R}^{\lambda_p^u}$ соответственно.

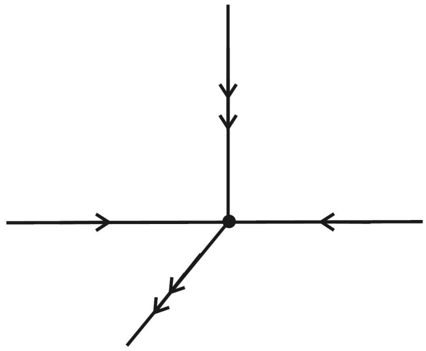

Рисунок **2.2**

Флип

Согласно, например, [5], в окрестности флипа p динамика системы топологически сопряжена отображению

$$A_f(x_1,\dots,x_n) = \left(A_h(x_1,\dots,x_{n-1}), -x_n + x_n^3\right). \qquad (2.3)$$

Лемма 2.1 *(**Lemma 2.1**[3], [1]) Пусть p — неподвижная точка диффеоморфизма $f\in\Phi$, гиперболическая или флип, и такая, что $0 < dim\, W_p^u < n$. Пусть $T_p\subset W_p^s$ – компактная окрестность точки p и $\xi\in T_p$. Тогда для любой последовательности точек $\{\xi_m\}\subset(M^n\backslash T_p)$, сходящейся к точке ξ, существует подпоследовательность $\{\xi_{m_j}\}$, последовательность целых чисел $k_{m_j}\to+\infty$ и точка $\eta\in(W_p^u\setminus p)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_{m_j}}(\xi_{m_j})\}$ сходится к точке η.*

Лемма 2.2 *Пусть p — неподвижная седло-узловая точка диффеоморфизма $f\in\Phi$. Пусть $T_p\subset W_p^s$ — компактная окрестность точки p и $\xi\in T_p$. Тогда для любой последовательности точек $\{\xi_m\}\subset(M^n\setminus T_p)$, сходящейся к точке ξ, существует подпоследовательность $\{\xi_{m_j}\}$, последовательность целых чисел $k_{m_j}\to+\infty$ и точка $\eta\in\partial W_p^u$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_{m_j}}(\xi_{m_j})\}$ сходится к точке η. При этом $\eta\neq p$, если $\partial W_p^u\neq p$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что диффеоморфизм f сохраняет ориентацию на W_p^u (в противном случае все рассуждения можно провести для диффеоморфизма f^2). Согласно формуле (2.2), существуют окрестности $V_p\subset M^n$, $V_O\subset\mathbb{R}^n$ точек p, $O\in\mathbb{R}^n$, соответственно и гомеоморфизм $\psi: V_p\to V_O$ такой, что $\psi(f(x)) = B(\psi(x))$ для любой точки $x\in(V_p\cap f(V_p))$, где A_{sf} — диффеоморфизм, заданный формулой

$$A_s(x_1,\dots,x_n) = \left(2x_1, 2x_2,\dots,2x_{\lambda_p^u}, \frac{x_{\lambda_p^u+1}}{2}, \frac{x_{\lambda_p^u+2}}{2},\dots,\frac{x_{\lambda_p^u+\lambda_p^s}}{2}, x_n + x_n^2\right).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $(V_p\cap W_p^s)\subset T_p$, $\xi\in(V_p\cap f(V_p))$ и $\{\xi_m\}\subset(V_p\cap f(V_p))$. Выберем число $r\in(0,1/2)$ так, чтобы куб $K_r(O) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_i|\le r, i = 1,\dots,n\}$ был подмножеством множества $V_O\cap A_s(V(O))$.

[3] В действительности в цитируемой монографии Лемма 2.1 доказано только для седловой точки. Но ход доказательства абсолютно верен и для флипа.

Положим $\psi(\xi_m)=\bar\xi_m=(\bar\xi_{1,m},\dots,\bar\xi_{n,m})$, $B^u_r=\{(x_1,\dots,x_{\lambda^u_p})\in Ox_1\dots x_{\lambda^u_p}\ :\ (x_1^2+\dots+x^2_{\lambda^u_p})\leq r^2\}$, $K^u_r=\{(x_1,\dots,x_{\lambda^u_p},x_n)\in Ox_1\dots x_{\lambda^u_p}x^+_n\ :\ |x_i|\leq r, i=1,\dots,\lambda^u_p, 0\leq\ x_n\leq\ r\}$. Тогда замыкание множества $B^u=B^u_r\setminus B^u_{r/2}$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма A_s на $Ox_1\dots,x_{\lambda^u_p}\setminus O$ и замыкание множества

$$K^u=K^u_r\setminus\{(x_1,\dots,x_{\lambda^u_p},x_n)\in K^u_r\ :\ |x_i|\leq r/2, i=1,\dots,\lambda^u_p, 0\leq x_n\leq\sqrt{r+1/4}-1/2\}$$

является фундаментальной области ограничения диффеоморфизма A_s на $Ox_1\dots,x_{\lambda^u_p}x^+_n\setminus O$. С точностью до рассмотрения подпоследовательности для $\bar\xi_{n,m}$ возможны два варианта: а) $\bar\xi_{n,m}\leq 0$; б) $\bar\xi_{n,m}>0$. Рассмотрим два варианта.

В случае а) отдельно рассмотрим подслучай $\lambda^u_p=0$ или, равносильно, $\partial W^u_p=p$. В этом подслучае $\bar\xi_m\in(W^s_O\setminus O)$ и из определения устойчивого многообразия следует, что существует последовательность $\{k_m\}\to\infty$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty}A^{k_m}_s(\bar\xi_m)=O$. Тогда $\xi_m=\psi^{-1}(\bar\xi_m)$ — искомая подпоследовательность.

Если $\lambda^u_p>0$, то для любого $m\in\mathbb{N}$ существует единственное целое число k_m такое, что $A^{k_m}_s\left(\bar\xi_{1,m},\dots,\bar\xi_{\lambda^u_p,m},0,\dots,0\right)\in B^u$. Положим $\bar\eta_m=A^{k_m}_s(\bar\xi_m)=(\bar\eta_{1,m},\dots,\bar\eta_{n,m})$. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\bar\xi_m=\psi(\xi)\in W^s_O$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\bar\xi_{i,m}=0$ для любого $i\in\{1,\dots,\lambda^u_p\}$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty}k_m=+\infty$. Кроме того, последовательность $\{\bar\xi_{i,m}\}$ ограничена для любого $i\in\{\lambda^u_p+1,\dots,n\}$ и, следовательно, $\bar\eta_{i,m}\to 0$ при $m\to+\infty$ для $i\in\{\lambda^u_p+1,\dots,n\}$.

Таким образом, точки $\bar\eta_m$ лежат внутри некоторого компактного подмножества $\mathbb{R}^n$. Поскольку для любой последовательности, заданной на компакте, существует сходящаяся подпоследовательность, то существуют подпоследовательность $\{k_{m_j}\}$ последовательности $\{k_m\}$ и точка $\bar\eta\in(\partial W^u_O\setminus O)$ такие, что $\lim\limits_{j\to\infty}\bar\eta_{m_j}=\bar\eta$. Тогда $\xi_{m_j}=\psi^{-1}(A_s^{-k_{m_j}}(\bar\eta_{m_j}))$ — искомая подпоследовательность.

В случае б) для любого $m\in\mathbb{N}$ существует единственное целое число k_m такое, что $A^{k_m}_s\left(\bar\xi_{1,m},\dots,\bar\xi_{\lambda^u_p,m},0,\dots,0,\bar\xi_{n,m}\right)\in K^u$. Положим $\bar\eta_m=A^{k_m}_s(\bar\xi_m)=(\bar\eta_{1,m},\dots,\bar\eta_{n,m})$. Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\bar\xi_m=\psi(\xi)\in W^s_O$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\bar\xi_{i,m}=0$ для любого $i\in\{1,\dots,\lambda^u_p,n\}$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty}k_m=+\infty$. Кроме того, последовательность $\{\bar\xi_{i,m}\}$ ограничена для любого $i\in\{\lambda^u_p+1,\dots,n-1\}$ и, следовательно, $\bar\eta_{i,m}\to 0$ при $m\to+\infty$ для $i\in\{\lambda^u_p+1,\dots,n-1\}$.

Таким образом, точки $\bar\eta_m$ лежат внутри некоторого компактного подмножества $\mathbb{R}^n$. Поскольку для любой последовательности, заданной на компакте, существуют сходящаяся подпоследовательность, то существует подпоследовательность $\{k_{m_j}\}$ последовательности $\{k_m\}$ и точка $\bar\eta\in(\partial W^u_O\setminus O)$ такие, что $\lim\limits_{j\to\infty}\bar\eta_{m_j}=\bar\eta$. Тогда $\xi_{m_j}=\psi^{-1}(A_s^{-k_{m_j}}(\bar\eta_{m_j}))$ — искомая подпоследовательность.

3. Разложение несущего многообразия в объединение инвариантных многообразий периодических точек

Доказательство пункта (1) Теоремы 1.1

Докажем, что $M^n=\bigcup\limits_{p\in\Omega_f}W^u_p$ для любого диффеоморфизма $f\in MS(M^n)$.

Не уменьшая общности, будем считать, что неблуждающее множество диффеоморфизма f неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f. Тогда Ω_f является объединением конечного числа неподвижных точек $\Omega_f=p_1\cup\dots\cup p_r$.

Пусть $x\in M^n$. Поскольку многообразие M^n компактно, то α-предельное множество $\alpha(x)$ (множество точек $y\in M^n$, для которых существует последовательность $k_n\to\infty$

такая, что $\lim\limits_{k_n\to\infty} f^{-k_n}(y) = x$) не пусто и является подмножеством Ω_f. Покажем, что $\alpha(x)$ состоит в точности из одной неподвижной точки, зависящей от x.

Предположим противное: существуют различные неподвижные точки $p_v,\ p_w \in \alpha(x)$. Поскольку Ω_f конечно, то существует $\rho > 0$ такое, что $d(p_i, p_j) > \rho$ для любых $i \neq j$. Положим $V_i = \{y \in M^n\ :\ d(y, p_i) < \dfrac{\rho}{3}\}$. Поскольку любая точка p_i, $i = \overline{1, r}$ неподвижна, то существует окрестность U_i такая, что $cl(U_i) \subset V_i$ и $f^{-1}(cl(U_i)) \cap V_j = \emptyset$ для любого $j \neq i$. Предположительно существует возрастающая последовательность q_ℓ итераций f^{-1} такая, что $f^{-q_{2m}}(x) \in U_v$, $f^{-q_{2m+1}}(x) \in U_w$ и $q_{2m+1} - q_{2m} \geq 2$. Выберем последовательность n_m так, что n_m — наибольшее натуральное число из интервала (q_{2m}, q_{2m+1}), для которого $f^{-(n_m-1)}(x) \in cl(U_v)$. Тогда $f^{-n_m}(x) \notin cl(U_v)$. С другой стороны, $f^{-n_m}(x) = f^{-1}(f^{-(n_m-1)}(x)) \notin V_j$ для $j \neq v$ и, следовательно, $f^{-n_m}(x) \in (M^n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r} U_i)$. Следовательно $\alpha(x)$ не является подмножеством Ω_f. Получили противоречие.

Таким образом, для любой точки $x \in M^n$ существует единственная точка $p_v(x) \in \Omega_f$ такая, что $\alpha(x) = p_v(x)$. Т. е. существует последовательность $k_n \to +\infty$ такая, что $\lim\limits_{k_n\to+\infty} d(f^{-k_n}(x), p_v(x)) = 0$. Из свойств динамики диффеоморфизма f в окрестности точки $p_v(x)$ (см. формулы (2.1), (2.2), (2.3)) следует, что $f^{-k_n}(x) \in W^u_{p_v(x)}$ для всех n больших некоторого n_0. В силу инвариантности неустойчивого многообразия, $x \in W^u_{p_v(x)}$.

4. Топология вложения инвариантных многообразий периодических точек

Доказательство пункта (2) Теоремы 1.1

Докажем, что W^u_p является гладким подмногообразием многообразия M^n для любой периодической точки $p \in \Omega_f$ диффеоморфизма $f \in \Phi$.

Доказательство. Пусть $x \in W^u_p$ и $T_p(x) \subset W^u_p$ — компактная окрестность точки p, содержащая точку x. Согласно разделу 2. данной работы, $W^u_p = J^u_p(R)$, где R либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p+1}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p+1}_+$ и $J^u_p : R \to M^n$ — инъективная иммерсия. В силу, например, [2], инъективная иммерсия является вложением на компакте, следовательно, существует карта $\psi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ многообразия M^n такая, что $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = Q$, где Q либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p+1}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_p+1}_+$. Если $Q = \mathbb{R}^n$ или $Q = \mathbb{R}^0$, то $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = \psi_x(U_x \cap W^u_p)$. Из этого следует, что неустойчивое многообразие точки p в этих случаях является гладким подмногообразием. Покажем теперь, что W^u_p является гладким подмногообразием M^n в оставшихся случаях.

Предположим противное: W^u_p не является гладким подмногообразием M^n. Не уменьшая общности, будем считать точку p неподвижной. Из предположения о противном следует, что существует точка $x \in W^u_p$ такая, что $(U_x \setminus T_p(x)) \cap W^u_p \neq \emptyset$ для любой карты $\psi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ многообразия M^n такой, что $\psi_x(U_x \cap T_p(x)) = Q$. Следовательно, существует последовательность $\{x_m\} \subset (W^u_p \setminus T_p(x))$ такая, что $x_m \to x$ при $m \to +\infty$.

Согласно Леммам 2.1 и 2.2, существуют подпоследовательность x_{m_j} и последовательность k_j такая, что последовательность $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j}) \subset W^u_p$ сходится к точке $y \in (W^s_p \setminus p)$. Согласно пункту (1) Теоремы 1.1, существует точка $r \in \Omega_f$ такая, что $y \in W^u_r$. Из условия, что диффеоморфизмы $f \in \Phi$ не имеют циклов, следует отсутствие у них гомоклинических точек, а значит $p \neq r$. Применяя аналогичные рассуждения к последовательности y_j, мы получим последовательность $z_i \subset W^u_p$, сходящуюся к точке $z \in (W^s_r \setminus r)$, и точку $v \in \Omega_f$ такую, что $z \in W^u_v$. В силу отсутствия циклов точка v отлична от точек p и r. Повторяя рассуждения, мы получим бесконечную последовательность различных периодических точек, что невозможно в силу конечности неблуждающего множества диффеоморфизма f.

5. Отношение порядка на множестве периодических орбит диффеоморфизма класса Φ

Доказательство пункта (3) Теоремы 1.1

Покажем, что множество периодических орбит $\{\mathcal{O}_p, p \in \Omega_f\}$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ допускает отношение полного порядка $\prec$, удовлетворяющее отношению Смейла:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q, \quad \text{если} \quad W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_q} \neq \emptyset.$$

Для этого напомним, что бинарное отношение $\prec$ на множестве X называется *отношением (нестрогого) частичного порядка*, если имеют место:

– *рефлексивность*: $\forall x \in X \Rightarrow x \prec x$;

– *антисимметричность*: $\forall x, y \in X : x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$;

– *транзитивность*: $\forall x, y, z \in X : x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

Отношение частичного порядка $\prec$ называется отношением *полного (линейного) порядка*, если $\forall x, y \in X \Rightarrow x \prec y \vee y \prec x$.

Согласно теореме Шпильрайна (см., например, [7]), любое отношение частичного порядка $\prec$ может быть продолжено до отношения полного порядка.

Из формул (2.1), (2.2), (2.3) следует, что $W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_p} \neq \emptyset$ для любой периодической орбиты $\mathcal{O}_p$ и, следовательно, отношение Смейла обладает рефлексивностью: $\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_p$. Антисимметричность отношения Смейла следует из условия отсутствия циклов у диффеоморфизмов класса Φ. Для выполнения транзитивности достаточно добавить к отношению Смейла следующее условие:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_q, \quad \text{если} \quad W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_q} = \emptyset \ \text{ и существует периодическая орбита } \ \mathcal{O}_r :$$

$$W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \emptyset \ \text{ и } \ W^s_{\mathcal{O}_r} \cap W^u_{\mathcal{O}_q} \neq \emptyset.$$

Таким образом, дополненное отношение Смейла является отношением частичного порядка, а значит, множество периодических орбит диффеоморфизма $f \in \Phi$ допускает полное упорядочивание.

6. Асимптотическое поведение инвариантных многообразий периодических точек

Доказательство пункта (4) Теоремы 1.1

Докажем, что $cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p) \subset \bigcup\limits_{r \in \Omega_f : \ell^u_p \cap W^s_r \neq \emptyset} W^u_r$ для любой периодической точки $p \in \Omega_f$ диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства утверждения достаточно показать импликацию (i): если $x \in (cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p))$, то $x \in W^u_r$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$ такой, что $\ell^u_p \cap W^s_r \neq \emptyset$. Не уменьшая общности, будем считать, что неблуждающее множество диффеоморфизма f неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f.

Пусть $x \in (cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p))$. Тогда существует последовательность $\{x_m\} \subset \ell^u_p$ такая, что $d(x_m, x) \to 0$ при $m \to +\infty$. В силу пункта (1) Теоремы 1.1 $x \in W^u_r$ для некоторой точки $r \in \Omega_f$. В силу пункта (2) Теоремы 1.1, существует карта $\psi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ многообразия M^n

такая, что $\psi_x(U_x \cap W^u_r(x)) = Q$, где Q либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_r}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_r+1}$, либо $\mathbb{R}^{\lambda^u_r+1}_+$. Покажем, что $Q \neq \mathbb{R}^n$. Предположим противное, тогда $x_m \in W^u_r$ для всех m, начиная с некоторого, а значит $r = p$. Следовательно, $\ell^u_p \cup p = W^u_r$ и $x \notin W^u_r$. Получили противоречие.

Таким образом, $Q \neq \mathbb{R}^n$. Рассмотрим два случая: a) $Q = \mathbb{R}^0$, б) $Q \neq \mathbb{R}^n$ и $Q \neq \mathbb{R}^0$.

В случае a) $W^u_r = r$, $x = r$ и $x_m \in W^s_r$ для всех m, начиная с некоторого. Следовательно, $\ell^u_p \cap W^s_r \neq \emptyset$, т. е. импликация (i) верна.

В случае б), согласно Леммам 2.1 и 2.2, существует подпоследовательность x_{m_j} и последовательность k_j такая, что последовательность $y_j = f^{-k_j}(x_{m_j})$ сходится к точке $y \in (W^s_r \setminus r)$. Согласно пункту (1) Теоремы 1.1, существует точка $v \in \Omega_f$ такая, что $y \in \ell^u_v$. Если $\ell^u_v = \ell^u_p$, то утверждение доказано. В противном случае, повторяя процесс и учитывая конечность неблуждающего множества и отсутствие циклов, мы получим утверждение через конечное число шагов.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01041, введение отношения полного порядка в разделе 5 выполнено в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018.

Список литературы

1. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.

2. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, New York, 1979, 280 p.

3. M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub., *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1977, 583 p.

4. S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs”, *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–8.

5. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, “Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms”, *Publ. Math. de l’ IHES*, **57**:1 (1983), 5–71.

6. Я. Палис, В. Мело, *Геометрическая теория динамических систем*, Изд.-во Мир, Москва, 1998, 301 с.

7. Фукс Л., *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Изд.-во Мир, Москва, 1965, 342 с.

Поступила 26.12.2017

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

On the dynamics of bifurcation diffeomorphisms of a simple arc

© **E. V. Nozdrinova** [4], **O. V. Pochinka** [5]

Abstract. In this paper we consider the class of diffeomorphisms of a closed n-dimensional manifold that are bifurcation points of simple arcs in the space of diffeomorphisms. The concept of a simple arc arose as a result of research by S. Newhouse, J. Palis and Fl. Takens. They showed that a generic set of arcs starting in a Morse-Smale system have a diffeomorphism with a regular dynamics as the first bifurcation point. Namely, the non-wandering set of such a diffeomorphism is finite, but unlike Morse-Smale systems, it can have either one non-hyperbolic periodic orbit that is a saddle-node or a flip, or one orbit of a non-transversal intersection of invariant manifolds of periodic points. The authors studied the asymptotic properties and the embedding structure of the invariant manifolds of non-wandering points of bifurcation diffeomorphisms of a simple arc. The possibility of complete ordering of periodic orbits of such diffeomorphisms is also established.
Key Words: bifurcation points, simple arc.

References

1. V. Z. Grines, T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Switzerland, 2016, 313 p.

2. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer, New York, 1979, 280 p.

3. M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub., *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1977, 583 p.

4. S. Matsumoto, "There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs", *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–8.

5. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, "Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms", *Publ. Math. de l' IHES*, **57**:1 (1983), 5–71.

6. J. Palis, W. Melo, *Geometricheskaja teorija dinamicheskih sistem [Geometric theory of dynamical systems]*, Mir Publ., Moscow, 1998 (In Russ.), 301 p.

7. L. Fuchs, *Chastichno uporjadochennye algebraicheskie sistemy [Partially ordered algebraic systems]*, Mir Publ., Moscow, 1965 (In Russ.), 342 p.

Submitted 26.12.2017

[4] **Elena V. Nozdrinova**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12, Bolshaya Pecherskaya st., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5209-377X, maati@mail.ru

[5] **Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12, Bolshaya Pecherskaya st., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6587-5305, olga-pochinka@yandex.ru