Математика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201801.13-22

УДК 517.9

Устойчивость асимптотического положения покоя возмущенных однородных нестационарных систем

© **А. П. Жабко** [1], **О. Г. Тихомиров** [2], **О. Н. Чижова** [3]

Аннотация. В статье получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя для однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде исчезающих со временем функций. Метод доказательства основан на построении функции Ляпунова, которая удовлетворяет условиям доказанной В. И. Зубовым теоремы о существовании асимптотического положения покоя. Рассмотрен пример системы нелинейных и нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений, который иллюстрирует полученные результаты.

Ключевые слова: асимптотическое положение покоя, асимптотическая устойчивость, нестационарные дифференциальные уравнения, однородные дифференциальные уравнения, почти периодические функции, равномерное среднее

1. Введение

Понятие асимптотического положения покоя было введено В. И. Зубовым в работе [1]. При исследовании систем, не имеющих нулевого решения, актуальным является изучение поведения решений, начинающихся в достаточно малой окрестности нуля. Были получены достаточные условия [1]–[2] для указанных систем и рассмотрен случай системы стационарных однородных дифференциальных уравнений под воздействием стремящейся к нулю функции. Нестационарные однородные системы, для которых существует среднее, были рассмотрены в работах [3]–[4]. Для данных систем были приведены [5] достаточные условия существования асимптотического положения покоя под воздействием аналогичных возмущений. В настоящей работе рассмотрены обобщения ранее полученных результатов на случай более широкого класса возмущающих функций; получены достаточные условия существования асимптотического положения покоя для систем с малым параметром. Рассмотрен пример, показывающий роль малого параметра в поведении решений.

[1] **Алексей Петрович Жабко**, профессор кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»(Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682, zhabko.apmath.spbu@mail.ru

[2] **Олег Геннадьевич Тихомиров**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2321-5525, olegtikhomirov@mail.ru

[3] **Ольга Николаевна Чижова**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»(Россия, 198504 Петергоф, Университетский пр., 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9251-9915, chizhovolg@yandex.ru

2. Постановка задачи

Приведем определение асимптотического положения покоя [1].

Определение 2.1 *Положение $x = 0$ будем называть асимптотическим положением покоя для системы траекторий, определяемых дифференциальными уравнениями*

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{2.1}$$

если существует некоторая окрестность положения $x = 0$, $\|x\| < \varepsilon$ такая, что любое решение

$$x = x(t, x_0, t_0)$$

системы (2.1), начинающееся в этой окрестности при $t = t_0$, $t_0 \geqslant 0$, будет ограничено при $t \geqslant t_0$, а, кроме того,

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \to 0 \qquad \textit{при} \qquad t \to +\infty.$$

Рассмотрим две системы следующего вида:

$$\dot{x} = F^{\mu}(t, x) + G(t, x), \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = F^{\mu}(t, x) + \nu G(t, x), \tag{2.3}$$

где $F^{\mu}(t, x)$ – однородная по x функция порядка $\mu > 1$, определенная при $t \in [0, +\infty)$ и $x \in E^n$. Будем считать, что вещественная функция $G(t, x)$ задана и непрерывна по t, непрерывно дифференцируема по x при $t \in [0, +\infty)$ и $x \in E^n$, ν – вещественная постоянная. Кроме того,

$$G(t, x) \underset{t \to +\infty}{\overset{x}{\rightrightarrows}} 0 \tag{2.4}$$

во всякой ограниченной области, содержащей точку $x = 0$. Невозмущенной системой для (2.2) и (2.3) будем называть

$$\dot{x} = F^{\mu}(t, x). \tag{2.5}$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения относительно функции $F^{\mu}(t, x)$. Пусть она является непрерывной по t и непрерывно дифференцируемой по x. Кроме того, найдутся постоянные $\alpha > 0$ и $\beta_i > 0$, $i = 1, ..., n$, такие, что при любых t и x из области определения выполняются следующие неравенства

$$\|F^{\mu}(t, x)\| \leq \alpha \|x\|^{\mu}, \tag{2.6}$$

$$\left\| \frac{\partial F^{\mu}(t, x)}{\partial x_i} \right\| \leq \beta_i \|x\|^{\mu - 1}. \tag{2.7}$$

Также будем считать, что для функции $F^{\mu}(t, x)$ существует среднее

$$\tilde{F}^{\mu}(x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t}^{t+T} F^{\mu}(\tau, x) d\tau, \tag{2.8}$$

причем имеет место равномерная сходимость по $(t, x) \in [0, +\infty) \times \{\|x\| \leq 1\}$. В этом случае усредненная система для невозмущенной системы (2.5) будет иметь вид

$$\dot{x} = \tilde{F}^{\mu}(x). \tag{2.9}$$

Далее предположим, что функция $\tilde{F}^\mu(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а система (2.9) асимптотически устойчива по Ляпунову. В этом случае [6] для данной системы найдется функция Ляпунова, непрерывно дифференцируемая столько же раз, как и функция $\tilde{F}^\mu(x)$.

Для того чтобы система (2.1) имела асимптотическое положение покоя, необходимо [1], чтобы выполнялись условия следующей теоремы.

Теорема 2.1 *Если:*
1) найдется функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ – положительно-определенная и

$$V \underset{x \to 0}{\overset{t}{\rightrightarrows}} 0 \text{ при } t \geqslant 0;$$

2) полная производная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} F_s = W + W_1,$$

определяемая в силу системы (2.1), обладает такими свойствами: функция $W = W(t, x_1, \ldots, x_n)$ – отрицательно-определенная, функция $W_1 = W_1(t, x_1, \ldots, x_n)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно относительно $x_1, \ldots, x_n$ во всякой ограниченной области, содержащей точку $x = 0$;
3) существуют числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такие, что

$$\inf_{\|x\|=\varepsilon_2} V(t,x) > \sup_{\|x\|=\varepsilon_1} V(t,x) \text{ для всех } t \geqslant 0$$

и $W + W_1 < 0$ при $\varepsilon_1 \leqslant \|x\| < \varepsilon_2$, $t \geqslant 0$, то положение $x = 0$ есть асимптотическое положение покоя.

Также для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1 [4] *Если для определенной, кусочно непрерывной по $t \in (-\infty, +\infty)$, непрерывной по $x \in E^n$ и однородной по x порядка однородности $\mu > 1$ функции $f^\mu(t, x)$ выполнены условия:*

$$|f^\mu(t,x)| \leq M\|x\|^\mu,$$

где M – неотрицательная постоянная;

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f^\mu(\tau, x)d\tau \to 0 \qquad \text{при} \qquad T \to +\infty \tag{2.10}$$

равномерно по $(t, x) \in (-\infty, +\infty) \times \{\|x\| \leq 1\}$, то будет верна оценка

$$\left|\varepsilon \int_{-\infty}^{t} e^{-\varepsilon(t-\tau)} f^\mu(\tau, x)d\tau\right| \leq \varphi(\varepsilon)\,\|x\|^\mu, \tag{2.11}$$

где $\varphi(\varepsilon) \geq 0$ и $\varphi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

3. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя

Т е о р е м а 3.1 *Если нулевое решение системы (2.9) асимптотически устойчиво по Ляпунову и выполнены указанные выше условия (2.4), (2.6), (2.7) и (2.8), то существует величина $\Delta > 0$ такая, что при $|\nu| < \Delta$ система (2.3) имеет асимптотическое положение покоя в точке $x = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из устойчивости усредненной невозмущенной системы (2.9) следует [6], что существуют однородная порядка m положительно-определенная функция $\tilde{V}(x)$ и положительно-определенная однородная функция $\tilde{W}(x)$ порядка $m+\mu-1$, связанные равенством

$$\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\tilde{F}^{\mu}(x) = -\tilde{W}(x).$$

Кроме того, как мы предположили выше, функция $\tilde{V}(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая. Для решения задачи используем функцию Ляпунова, которая строится на основе функции Ляпунова для усредненной системы

$$V(t,x) = \tilde{V}(x) + \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\left[\tilde{F}^{\mu}(x) - F^{\mu}(\tau,x)\right]d\tau.$$

Поскольку $\tilde{V}(x)$ и $\tilde{W}(x)$ – однородные функции порядков m и $m+\mu-1$ соответственно, имеют место оценки:

$$a_2\|x\|^m \geq \tilde{V}(x) \geq a_1\|x\|^m,$$
$$b_2\|x\|^{m+\mu-1} \geq \tilde{W}(x) \geq b_1\|x\|^{m+\mu-1},$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – положительные постоянные. Используя эти оценки, свойства однородных функций и (2.6), получим следующее неравенство:

$$V(t,x) \leq a_2\|x\|^m + \frac{c}{\varepsilon}\|x\|^{m+\mu-1},$$

где c – положительная постоянная. Очевидно, что $V \underset{x\to 0}{\overset{t}{\rightrightarrows}} 0$ при $t \geqslant 0$. Дифференцируя $V(t,x)$, в силу системы (2.3), получим

$$\left.\tfrac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(2.3)} = \tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}F^{\mu}(t,x) + \tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\nu G(t,x) + \tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\tilde{F}^{\mu}(x) \quad -$$

$$-\tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}F^{\mu}(t,x) - \varepsilon\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\left[\tilde{F}^{\mu}(x) - F^{\mu}(\tau,x)\right]d\tau \quad +$$

$$+\tfrac{\partial}{\partial x}\left\{\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\left[\tilde{F}^{\mu}(x) - F^{\mu}(\tau,x)\right]d\tau\right\}\left[F^{\mu}(t,x) + \nu G(t,x)\right].$$

Упростив данное равенство, получим:

$$\left.\tfrac{dV(t,x)}{dt}\right|_{(2.3)} = -\tilde{W}(x) + \tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\nu G(t,x) - \varepsilon\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\left[\tilde{F}^{\mu}(x) - F^{\mu}(\tau,x)\right]d\tau \quad +$$

$$+\tfrac{\partial}{\partial x}\left\{\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\tfrac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x}\left[\tilde{F}^{\mu}(x) - F^{\mu}(\tau,x)\right]d\tau\right\}\left[F^{\mu}(t,x) + \nu G(t,x)\right].$$

Проверим выполнение второго условия теоремы:

$$W = -\tilde{W}(x) - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \quad +$$
$$+ \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} F^\mu(t, x),$$

$$W_1 = \nu \left[\frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} \right] G(t, x), \tag{3.1}$$

Используя условия (2.4), (2.6) и (2.7) запишем, что $W_1 \to 0$ равномерно по x на любом ограниченном множестве при $t \to +\infty$. Если в качестве $f^{m+\mu-1}(t, x)$ взять функцию

$$f^{m+\mu-1}(t, x) = 0, \qquad t < 0,$$
$$f^{m+\mu-1}(t, x) = \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right) \left(\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(t, x) \right), \qquad t \geq 0,$$

то для для нее, в силу предельного соотношения (2.8), справедливо условие (2.10). Следовательно, выполнены условия леммы и, таким образом, из неравенства (2.11) получим

$$\left| \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right| \leq \eta(\varepsilon) \left\| x \right\|^{m+\mu-1} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.2}$$

Используя свойства (2.4), (2.6), построим оценку следующего вида:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial \tilde{V}(x)}{\partial x} \left[\tilde{F}^\mu(x) - F^\mu(\tau, x) \right] d\tau \right\} F^\mu(t, x) \right| \leq d \|x\|^{m+2\mu-2}.$$

После этого выберем величины ε и δ такие, чтобы при $\|x\| \leq \delta$ выполнялись неравенства:

$$a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \|x\|^{\mu-1} > 0,$$
$$-b_1 + \eta(\varepsilon) + d\|x\|^{\mu-1} < 0.$$

Это возможно в силу теоремы и условия (3.2). Тогда $V(t, x)$ положительно определена, а $W(t, x)$ отрицательно определена. Осталось убедиться в том, что выполняется третье условие теоремы 2.1. Покажем, что существуют такие числа $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n_1 < n_2$, что неравенство

$$\inf_{\|x\|=n_2} V(t, x) > \sup_{\|x\|=n_1} V(t, x), \text{справедливо для всех } t \geqslant 0.$$

Для величин в правой и левой частях последнего неравенства можно построить оценки:

$$\inf_{\|x\|=n_2} V(t, x) \geqslant n_2^m \left[a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right], \quad \sup_{\|x\|=n_1} V(t, x) \leqslant n_1^m \left[a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right].$$

Следует отметить, что величина $\dfrac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ зафиксирована и равна некоторой константе. Таким образом, достаточно найти такие $0 < n_1 < n_2$, чтобы выполнялось неравенство:

$$n_1^m \left[a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1} \right] < n_2^m \left[a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1} \right].$$

Будем искать их в множестве $n_2 < \delta$. В этом случае требуемое неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{\left[a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1}\right]}{\left[a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1}\right]} < \left[\frac{n_2}{n_1}\right]^m. \tag{3.3}$$

Дробь в левой части неравенства (3.3) стремится к a_2/a_1 при $n_1, n_2 \to 0$. Поэтому для произвольного $\tilde{\varepsilon} > 0$ можно выбрать такое достаточно малое $\tilde{\delta}$, что при $n_1, n_2 < \tilde{\delta}$ будет выполняться включение

$$\frac{\left[a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1}\right]}{\left[a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1}\right]} \in \left[\frac{a_2}{a_1} - \tilde{\varepsilon}, \frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon}\right].$$

Рассмотрим неравенство $\dfrac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon} < \left[\dfrac{n_2}{n_1}\right]^m$, которое выполняется при $n_1 < \dfrac{n_2}{\sqrt[m]{\frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon}}}$. Теперь выберем $n_2 < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$, $n_1 < \min\{\tilde{\delta}, \dfrac{n_2}{\sqrt[m]{\frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon}}}\}$. Очевидно такие n_1, n_2 существуют, и для них выполняется цепочка неравенств

$$\left[\frac{n_2}{n_1}\right]^m > \frac{a_2}{a_1} + \tilde{\varepsilon} \geqslant \frac{\left[a_2 + \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_1^{\mu-1}\right]}{\left[a_1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} n_2^{\mu-1}\right]}.$$

Таким образом, условие (3.3) выполнено и $n_2 < \delta$. Далее будем считать, что параметры ε и δ выбраны таким образом, чтобы при $\|x\| \le \delta$

$$-b_1 + \eta(\varepsilon) + d\,\|x\|^{\mu-1} < -\frac{h}{2},$$

где h – некоторая положительная постоянная. Тогда при $n_1 \le \|x\| \le n_2$,

$$W < -\frac{h}{2}\,\|x\|^{m+\mu-1} \le -\frac{h}{2} {n_1}^{m+\mu-1}.$$

Выберем Δ таким образом, чтобы при $n_1 \le \|x\| \le n_2$ и $t \geqslant 0$ было справедливым неравенство:

$$W_1 \le \frac{h}{2} {n_1}^{m+\mu-1}. \tag{3.4}$$

Очевидно, это возможно в силу условий (2.4), (2.6) и (2.7). Тогда будет справедливо неравенство $W + W_1 < 0$. Третье условие теоремы 2.1 доказано. Следовательно [1], у системы (2.3) есть асимптотическое положение покоя в точке $x = 0$.

Замечание 3.1 *Следует отметить, что наличие малого параметра носит существенный характер. Для системы (2.2) точка $x = 0$ при $t_0 = 0$ может не входить в область притяжения. Ниже будет рассмотрен пример, подтверждающий данное утверждение.*

Теорема 3.2 *Для системы (2.2) существует t_0 такое, что точка $x = 0$ будет включена в область притяжения при $t \geqslant t_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем t_0 таким образом, чтобы выполнялось неравенство (3.4). Это можно сделать в силу (2.4) и (3.1) при $\nu = 1$. Тогда с помощью замены $\tau = t + t_0$ получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}^{\mu}(\tau, x) + \tilde{G}(\tau, x), \tag{3.5}$$

где $\tilde{F}^{\mu}(\tau, x) = F^{\mu}(t + t_0, x)$, $\tilde{G}(\tau, x) = G(t + t_0, x)$. Для системы (3.5) верны все условия доказанной выше теоремы 3.1. Наличие малого параметра уже не является необходимым, т. к. условие (3.4) выполнено. Таким образом, $x = 0$ является асимптотическим положением покоя. Отсюда следует, что для исходной системы (2.2) все решения из некоторой окрестности нулевой точки будут стремится к нулю при $t \geqslant t_0$. Следствие доказано.

4. Пример системы с асимптотическим положением покоя

П р и м е р 4.1 *Приведем пример, иллюстрирующий полученные результаты. Для этого рассмотрим систему*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + \varphi(t)y^3 + \nu\frac{e^y}{t+1}, \\ \dot{y} &= -y^3 + \psi(t)x^3 + \nu\frac{e^x}{t^2+1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В качестве функций $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *возьмем следующие почти периодические функции:*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \cos(\sqrt{2}t) + \sin(t), \\ \psi(t) &= \sin(\sqrt{2}t) + \cos(t). \end{aligned}$$

Известно [7], что для них существует равномерное среднее и будет выполнено условие (2.8). Усредненная невозмущенная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3, \\ \dot{y} &= -y^3. \end{aligned}$$

Очевидно, что нулевое решение для нее является асимптотически устойчивым. Для исходной системы (4.1) выполнены все условия теоремы 3.1. Рассмотрим траектории решений, начинающихся в точке $(0, 0)$, при различных начальных данных и значениях параметра ν (Рис. 4.1).

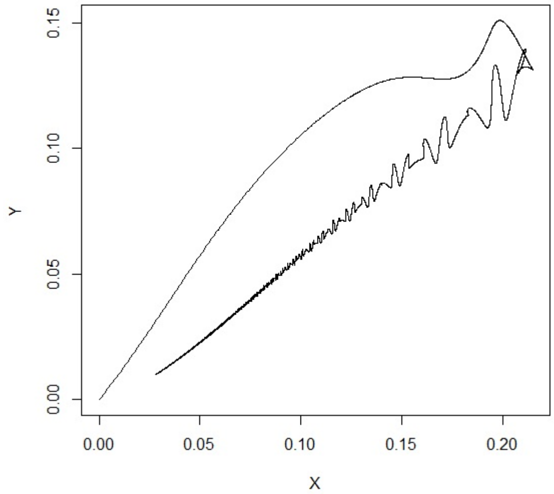

Рисунок **4.1**

Траектория при $t_0 = 0$ и $\nu = 0.1$

Из рисунка видно, что при данных значениях траектория начинается в нулевой точке, отдаляется от нее, а затем возвращается к ней с течением времени. Можно показать, что система имеет асимптотическое положение покоя (Рис. 4.2).

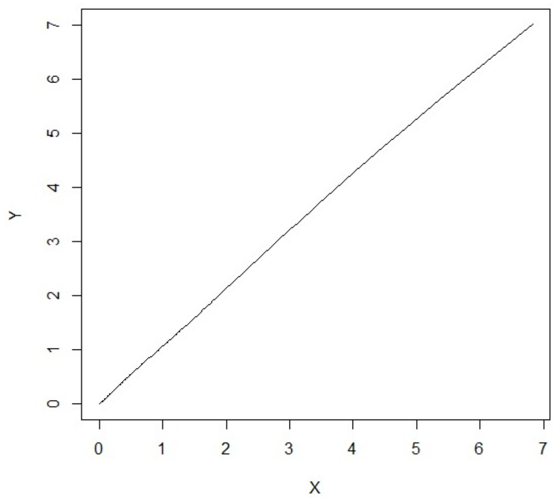

Рисунок **4.2**

Траектория при $t_0 = 0$ и $\nu = 1$

График показывает, что система перестает иметь асимптотическое положение покоя при увеличении параметра ν. Это следует из того, что решение, начинающееся в нулевой точке, отдаляется от нее и не возвращается с течением времени.

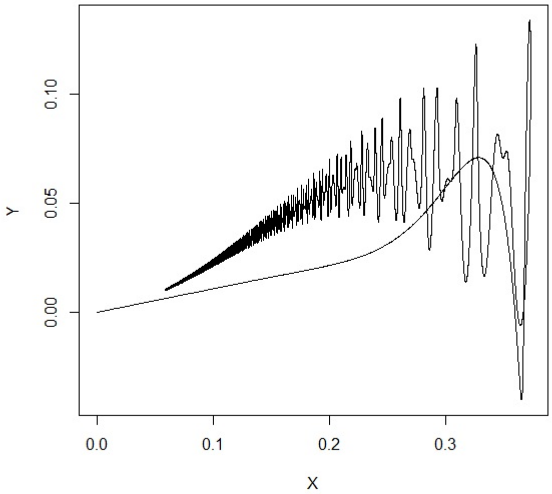

Рисунок **4.3**
Траектория при $t_0 = 10$ и $\nu = 1$

Из траектории (Рис. 4.3) видно, что точка $(0, 0)$ попадает в область притяжения при увлечении t_0. График имеет сходство с изображенным на Рис. 4.1. Другими словами, решение, начинающееся в нулевой точке, отдаляется от нее, но с течением времени приближается к ней снова. Можно сказать, что система будет иметь асимптотическое положение покоя начиная с некоторого t_0.

Список литературы

1. В. И. Зубов, *Колебания и волны*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1989, 415 с.
2. С. Е. Купцова, “Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений”, *Труды Средневолжского математического общества*, **8**:1 (2006), 235–243.
3. А. Ю. Александров, *Устойчивость движений неавтономных динамических систем*, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб., 2004, 183 с.
4. О. Г. Тихомиров, “Устойчивость однородных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вестник СПбГУ*, **10**:3 (2007), 123–192.
5. О. Г. Тихомиров, Е. В. Темкина, “Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений”, *Вестник СПбГУ*, **10**:3 (2014), 58–65.
6. В. И. Зубов, *Устойчивость движения*, Высшая Школа, М., 1973, 272 с.
7. H. A. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company, Chelsea, 1947, 113 p.

Поступила 10.01.2018

MSC2010 34D05

Stability of the asymptotic quiescent position of perturbed homogeneous nonstationary systems

© **A. P. Zhabko** [4], **O. G. Tikhomirov** [5], **O. N. Chizhova** [6]

Abstract. Sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position for homogeneous non-stationary systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of functions that disappear with time are obtained in this article. The method of proof is based on the construction of the Lyapunov function, which satisfies the conditions of the theorem proved by V. I. Zubov for the existence of an asymptotic quiescent position. An example of a system of non-linear and non-stationary ordinary differential equations is considered, which illustrates the obtained results.
Key Words: asymptotic quiescent position, asymptotic stability, non-autonomous differential equations, homogeneous differential equation, almost periodic functions, almost uniform average.

References

1. V. I. Zubov, *Kolebaniya i volny [Oscillations and waves]*, Leningrad University Publ., Leningrad, 1989 (In Russ.), 415 p.

2. S. E. Kuptsova, "[On the asymptotic behavior of solutions of systems of nonlinear nonstationary differential equations]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **8**:1 (2006), 235–243 (In Russ.).

3. A. Yu. Aleksandrov, *[Stability of motions of nonautonomous dynamical systems]*, Saint-Petersburg University Publ., Saint-Petersburg, 2004 (In Russ.), 183 p.

4. O. G. Tikhomirov, "[Stability of homogeneous nonstationary systems of ordinary differential equations]", *Vestnik SPbGU*, **10**:3 (2007), 123–192 (In Russ.).

5. O. G. Tikhomirov, E. V. Temkina, "[Asymptotic quiescence position for systems of homogeneous non-stationary differential equations]", *Vestnik SPbGU*, **10**:3 (2014), 58–65 (In Russ.).

6. V. I. Zubov, *[Stability of motion]*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 272 p.

7. H. A. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea Publishing Company, Chelsea, 1947, 113 p.

Submitted 10.01.2018

[4] **Aleksei P. Zhabko**, Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682, zhabko.apmath.spbu@mail.ru

[5] **Oleg G. Tikhomirov**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2321-5525, olegtikhomirov@mail.ru

[6] **Olga N. Chizhova**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (35 Universitetskiy pr., Petergof 198504, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9251-9915, chizhovolg@yandex.ru