DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.79-94

УДК 517.9

Численные методы решения задач в нелинейных макроэкономических интегральных моделях

© **А. Н. Тында** [1], **Н. Ю. Кудряшова** [2]

Аннотация. В работе предлагается ряд методов численного исследования интегральных динамических систем, описываемых нелинейными интегральными уравнениями специального вида. Первая группа задач связана с решением системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в нижних пределах интегрирования. Предложено два эффективных численных метода — прямой и итерационный, основанный на линеаризации интегральных операторов по модифицированной схеме Ньютона-Канторовича. Вторая группа рассмотренных задач связана с построением оптимальных траекторий в макроэкономических моделях класса VCM. Предложено два оригинальных подхода решения таких задач оптимального управления, позволяющих численно определить экстремали в первом приближении. Предложенная методика построения численных решений позволяет получать и более точные приближения при использовании соответствующих аппроксимаций. В заключении приведены результаты решения ряда модельных задач, позволяющие судить об эффективности предложенных подходов.

Ключевые слова: системы нелинейных интегральных уравнений, модели VCM, метод Ньютона-Канторовича, нелинейные задержки, экстремали функционала, аппроксимация интегралов.

1. Введение

При моделировании макроэкономических и производственных процессов, таких как задачи определения оптимального срока службы производственного оборудования и его замены в производстве, применяются интегральные динамические системы. Также они используются в теории восстановления и математической экологии [1]–[4].

Такие системы описываются линейными и нелинейными интегральными уравнениями Вольтерра и их системами специального вида. При этом наиболее полные модели такого класса содержат разного вида временные задержки. В отличии от хорошо изученных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с задержками, модели, основанные на интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях с задержками, остаются недостаточно разработанными. Например, в теории автоматического управления мало исследована интегральная модель нелинейной динамической системы с неизвестными величинами задержки. В работе [5] предлагается ряд численных методов решения линейных и нелинейных интегральных уравнений с переменными в пределах интегрирования, играющими роль временных задержек.

В последнее время также возрос интерес к одному из применений такого рода моделей, а именно к моделированию оптимального срока службы основного оборудования, как

[1] **Тында Александр Николаевич**, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

[2] **Кудряшова Наталья Юрьевна**, доцент кафедры высшей и прикладной математики ФГБОУ ВО "Пензенский государственный университет" (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0789-4559, math.kudryashova@yandex.ru

правило, с учетом технологических изменений. В экономической теории такие модели известны как Vintage Capital Models (VCM) [4]. Математически модели VCM описываются с помощью нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной функцией в пределах интегрирования. Такие модели играют важную роль при изучении экономико-технологических процессов. Несмотря на большой практический интерес к моделям VCM, их оптимальная динамика полностью не изучена [4],[6] и [7].

2. Системы нелинейных интегральных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \\ c(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} L(t,\tau,x(\tau))d\tau, \end{cases} \quad t \in [t_0, T),\ t_0 < T \leqslant \infty, \tag{2.1}$$

относительно неизвестных функций $x(t), y(t)$ и $c(t)$ с заданными начальными условиями

$$y(t_0) = Y_0 < t_0,\ x(\tau) \equiv \varphi_0(\tau),\ \tau \in (-\infty, t_0],$$

где $f(t)$ – прирост производительности в единицу времени новых рабочих мест, создаваемых в момент t; $x(t)$ – количество новых рабочих мест, создаваемых за единицу времени в момент t; $y(t)$ – временные границы ликвидации устаревших рабочих мест; $c(t)$ – объем выпуска предметов потребления за единицу времени в момент t. Также здесь предполагается, что заданные функции $H(t,\tau,x), K(t,\tau,x), L(t,\tau,x), f(t), \varphi_0(t)$ непрерывны, неотрицательны при $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $x \in [0, \infty)$ и удовлетворяют уравнениям системы (2.1) в точке $t = t_0$.

В работе Ю. П. Яценко [8] приведена и доказана теорема о существовании и единственности решения системы (2.1).

2.1. Итерационный метод

Благодаря тому, что неизвестная функция $c(t)$ не содержится в первых двух уравнениях системы (2.1), целесообразно решать подсистему вида

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T),\ t_0 < T \leqslant \infty. \tag{2.2}$$

После получения значений $\big(x(t), y(t)\big)$, подставив их в третье уравнение системы (2.1), находим значение $c(t)$.

Построим приближенный метод решения системы (2.2) на отрезке $[t_0, T]$. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} P_1(x(t), y(t)) \equiv x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) \equiv f(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = 0, \end{cases} \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.3}$$

или в операторной форме

$$P(X) = \big(P_1(X), P_2(X)\big) = 0, \ X = (x(t), y(t)). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) будем решать модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Предложенный ниже алгоритм является обобщением итерационно-проекционного метода, построенного в [9] и [10], на случай нелинейности по переменной x ядер $H(t,\tau,x)$ и $K(t,\tau,x)$ интегральных уравнений системы (2.1).

Итерационный процесс примет вид

$$X_{m+1} = X_m - [P'(X_0)]^{-1}(P(X_m)), \ m = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

где $X_0 = (x_0(t), y_0(t))$ — начальное приближение.

Нетрудно показать, что производная $P'(X_0)$ нелинейного оператора $P(X)$ в точке X_0 определяется матрицей из частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial P_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial P_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система относительно поправки на первой итерации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial x(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x(t)) + \frac{\partial P_1}{\partial y(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta y(t)) = -P_1(x_0(t), y_0(t)), \\ \frac{\partial P_2}{\partial x(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x(t)) + \frac{\partial P_2}{\partial y(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta y(t)) = -P_2(x_0(t), y_0(t)), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\Delta x(t) = x_1(t) - x_0(t), \ \Delta y(t) = y_1(t) - y_0(t)$;

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{s\to 0}\frac{P_1(x_0 + sx, y_0) - P_1(x_0, y_0)}{s} = x(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = H\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)y(t); \ \ \frac{\partial P_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = K\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)y(t);$$

$$H_3(t,\tau,x_0) = \frac{\partial H(t,\tau,x)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}, \ \ K_3(t,\tau,x_0) = \frac{\partial K(t,\tau,x)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}.$$

Предполагается, что ядра H и K дифференцируемы по переменной x в точке x_0. Таким образом, система (2.6) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta x(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + H\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad\qquad = \int\limits_{y_0(t)}^{t} H(t,\tau,x_0(\tau))d\tau - x_0(t), \\ -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + K\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad\qquad = \int\limits_{y_0(t)}^{t} K(t,\tau,x_0(\tau))d\tau - f(t). \end{cases} \tag{2.7}$$

Система интегральных уравнений (2.7) — линейна, решая ее относительно $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$, находим $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$. Подставляя полученные значения $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ в третье уравнение системы (2.1), находим значение $c_1(t)$. Продолжив этот процесс, получим последовательность приближенных решений $\big(x_m(t), y_m(t), c_m(t)\big)$, определяемых из систем

$$\begin{cases} \Delta x_m(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x_m(\tau)d\tau + H\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)\Delta y_m(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} H(t,\tau,x_{m-1}(\tau))d\tau - x_{m-1}(t), \\ -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x_m(\tau)d\tau + K\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)\Delta y_m(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} K(t,\tau,x_{m-1}(\tau))d\tau - f(t), \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t)$, $\Delta y_m(t) = y_m(t) - y_{m-1}(t)$, $m = 2, 3, \ldots$.

Таким образом, для нахождения каждого следующего приближения требуется решение системы двух линейных интегральных уравнений Вольтерра. При этом ядра уравнений в левых частях на каждом шагу остаются неизменными.

2.2. Уравнения Вольтерра с переменной задержкой

На каждом шаге итерационного процесса (2.8) возникает необходимость решения линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода следующего вида

$$x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = F(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.9}$$

где $y(t) < t$ — неубывающая функция, $y(t_0) = Y_0 < t_0$, $x(t) = \varphi_0(t)$ при $t \leqslant t_0$.

Для решения уравнения (2.9) воспользуемся методом последовательных приближений:

$$x_{n+1}(t) = F(t) + \int\limits_{y(t)}^{t} h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, T], \ x_0(t) = F(t). \tag{2.10}$$

Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку (w), состоящую из точек $t_i = t_0 + (T - t_0)\frac{i}{N}$, $i = \overline{1, N}$. Каждый из интервалов $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N}$, разобьем в свою очередь точками

$$t_k^j = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} + \frac{t_k - t_{k-1}}{2}\xi_j, \quad t_k^0 = t_{k-1} \ j = \overline{1, r-2}, \ k = \overline{1, N},$$

где ξ_j — нули многочлена Лежандра степени $(r-2)$, а параметр r зависит от гладкости входящих в интегральное уравнение (2.9) функций.

Значения очередного приближения в точках t_k^j будем определять из равенств

$$x_{n+1}(t_k^j) = F(t_k^j) + \int\limits_{y(t_k^j)}^{t_k^j} h(t_k^j,\tau)x_n(\tau)d\tau, \ j = \overline{0, r-2}, \ k = \overline{1, N}. \tag{2.11}$$

Приближенное решение на каждой итерации представляет собой непрерывный полиномиальный сплайн $\tilde{x}_n(t)$, составленный из N интерполяционных полиномов степени $(r-1)$, построенных по узлам t_k^j и t_k, $j=\overline{0,r-2}$, для каждого интервала $[t_{k-1},t_k]$, $k=\overline{1,N}$.

Введем на сетке (w) целочисленную функцию

$$V_w(t)=\begin{cases} l, & \text{при } t\in(t_{l-1},t_l],\ l=\overline{1,N},\\ 0, & \text{при } t\notin(t_0,T],\end{cases}$$

и обозначим $V_{k,j}=V_w(y(t_k^j))$. Тогда равенства (2.11) можно записать в виде

$$x_{n+1}(t_k^j)=F(t_k^j)+\int\limits_{y(t_k^j)}^{t_{V_{k,j}}}h(t_k^j,\tau)\varphi_0(\tau)d\tau+$$
$$+\sum_{i=V_{k,j}+1}^{k-1}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}h(t_k^j,\tau)x_n(\tau)d\tau+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k^j}h(t_k^j,\tau)\tilde{x}_n(\tau)d\tau,\quad j=\overline{0,r-2},\ k=\overline{1,N}. \tag{2.12}$$

Первый интеграл по отрезку $[y(t_k^j),t_{V_{k,j}}]$ в формуле (2.12) вычисляем по квадратурной формуле Гаусса с $(r-2)$ узлами, а в случае если $t_{V_{k,j}}-y(t_k^j)>\frac{T-t_0}{N}$ — по составной формуле Гаусса с шагом, не большим $\frac{T-t_0}{N}$. Для вычисления остальных интегралов в (2.12) также используется формула Гаусса с $(r-2)$ узлами, при этом в качестве промежуточных значений приближения $x_n(t)$ при аппроксимации последнего интеграла используются значения сплайна $\tilde{x}_n(t)$.

2.3. Прямой метод

Систему (2.2) также можно решить, обобщая прямой численный метод первого порядка точности, предложенный в [11]. Это связано с тем, что при применении итерационных методов важную роль играет выбор достаточно хорошего начального приближения, обеспечивающего сходимость процесса.

Основная сложность построения численного метода для системы (2.2) лежит в аппроксимации интегралов квадратурными суммами. Так как одна из неизвестных функций содержится в пределе интегрирования, длина интервала интегрирования остается неизвестной, даже при фиксированных значениях $t=t_k$.

Опишем численный метод решения системы (2.2), основанный на кусочно-постоянной аппроксимации точного решения $\big(x(t),y(t)\big)$ с точностью $O(\frac{1}{N})$.

Разделим интервал планирования $[t_0,T]$ на N частей узлами

$$t_k=t_0+(T-t_0)\frac{k}{N},k=\overline{0,N}.$$

Решения $x(t)$ и $y(t)$ будем аппроксимировать кусочно-постоянными функциями $x_N(t)$ и $y_N(t)$, построенными на значениях $x(t_k)$ и $y(t_k),k=\overline{0,N}$.

Потребуем, чтобы в точках $t=t_k$ уравнения системы (2.1) обращались в равенства

$$\begin{cases} x(t_k)=\int\limits_{y(t_k)}^{t_k}H(t_k,\tau,x(\tau))d\tau,\\ \int\limits_{y(t_k)}^{t_k}K(t_k,\tau,x(\tau))d\tau=f(t_k),\end{cases}\qquad k=\overline{1,N}. \tag{2.13}$$

Заметим, что значения функций $x(t)$ и $y(t)$ при $0 < t \leqslant t_0$ считаются известными (заданная предыстория).

Обозначим через v_k номер сегмента, на который попадает значение $y_k = y(t_k)$, т.е. $y_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$.

Далее представим систему (2.13) в виде

$$\begin{cases} x_0 = \int\limits_{Y_0}^{t_0} H(t_0, \tau, \phi_0(\tau))d\tau, \\ y_0 = Y_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k = \int\limits_{y_k}^{t_{v_k}} H(t_k, \tau, x(\tau))d\tau + \sum\limits_{j=v_k}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau, x(\tau))d\tau, \\ f_k = \int\limits_{y_k}^{t_{v_k}} K(t_k, \tau, x(\tau))d\tau + \sum\limits_{j=v_k}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau, x(\tau))d\tau, \\ k = \overline{0, N}, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $x_k = x(t_k), y_k = y(t_k), f_k = f(t_k), k = \overline{0, N}$.

Возможны два случая для каждого k

Случай I. $v_k = k$.

Используя на малых участках для интегралов квадратурную формулу прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_k - y_k)H(t_k, t_k, x_k), \\ f_k = (t_k - y_k)K(t_k, t_k, x_k), \ k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_k K(t_k, t_k, x_k) = f_k(t_k - y_k)H(t_k, t_k, x_k), \\ y_k = t_k - \frac{f_k}{K(t_k,t_k,x_k)} \ \ k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Используя соответствующие квадратичные аппроксимации для H и K, получаем

$$\begin{cases} \Big[K(t_k, t_k, x_{k-1}) + K'_x(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + K''_{xx}(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2\Big]x_k = \\ = f_k\Big[H(t_k, t_k, x_{k-1}) + H'_x(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + H''_{xx}(t_k, t_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2\Big], \\ y_k = t_k - \frac{f_k}{K(t_k,t_k,x_k)} \ \ k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Из первого уравнения системы (2.17) определим x_k. Затем неизвестная y_k может быть найдена из решения второго уравнения этой системы. Соответствующее решение выбирается из условия $y_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Случай II. $v_k < k$.

Применяя к интегралам в (2.14) формулу средних прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_{v_k} - y_k)H(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + \\ \qquad\qquad + (t_k - t_{k-1})H(t_k, t_{k-0.5}, x_k) + S_H(v_k), \\ f_k = (t_{v_k} - y_k)K(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + \\ \qquad\qquad + (t_k - t_{k-1})K(t_k, t_{k-0.5}, x_k) + S_K(v_k), \end{cases} \tag{2.18}$$

где

$$S_H(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} H(t_k, t_{j+0.5}, x_{j+1}),$$

$$S_K(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} K(t_k, t_{j+0.5}, x_{j+1}),$$

$$t_{k-0.5} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2},\ t_{k+0.5} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x_k = (t_{v_k} - y_k) H(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + S_H(v_k) + \\ +(t_k - t_{k-1}) \Big[H(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) + H'_x(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ +H''_{xx}(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} \Big], \\ f_k = (t_{v_k} - y_k) K(t_k, t_{v_k}, x_{v_k}) + S_K(v_k) + \\ +(t_k - t_{k-1}) \Big[K(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) + K'_x(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ +K''_{xx}(t_k, t_{k-0.5}, x_{k-1}) \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} \Big]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Таким образом, при знании номеров v_k, $k = \overline{1, N}$, приближенные значения x_k и y_k искомых функций в точках сетки могут быть найдены по формулам (2.18), (2.19).

Идея определения номеров v_k состоит в последовательном для каждого номера узла $k = 1, 2, \ldots, N$, переборе возможных значений v_k : $v_k = 1$, $v_k = 2, \ldots, v_k = k$, и нахождении соответствующих значений x_k и y_k по формулам (2.15), (2.17). Перебор прекращается в случае выполнения условия $y_k \in [t_{v_k - 1}, t_{v_k}]$, подтверждающего предположение о принадлежности y_k указанному интервалу.

3. Оптимизационные задачи

Рассмотрим, следуя работам [4], [6], [7] и [12], следующую оптимизационную задачу, состоящую в нахождении функций $a(t)$ и $m(t)$, $t \in [t_0, T)$, $T < \infty$, которые максимизируют функционал

$$I(a(t), m(t)) = \int_{t_0}^{t} \rho(\tau) \left[\int_{a(t)}^{t} \beta(\tau, t) m(\tau) d\tau - \lambda(t) m(t) \right] dt \longrightarrow \max_{a,m} \tag{3.1}$$

при условиях

$$P(t) = \int_{a(t)}^{t} m(\tau) d(\tau), \tag{3.2}$$

$$m_{\min}(t) \leqslant m(t) \leqslant M(t), \tag{3.3}$$

где $m_{\min}(t) = \max\{0, P'(t)\}$,

$$a(t_0) = a_0 \leqslant t_0,\ m(\tau) = m_0(\tau),\ \tau \in [a_0, t_0]. \tag{3.4}$$

Оптимизационная задача (3.1)–(3.4) описывает максимизацию чистого дохода экономической системы в этой модели. Тогда $a(t)$ — дата списывания устаревшего капитала (время, прошедшее с момента ввода в эксплуатацию старейшего оборудования), $m(t)$ — новый капитал, $\beta(\tau, t)$ — удельная производительность, $\lambda(t)$ — удельная стоимость нового оборудования, $P(t)$ — рабочий ресурс, $\rho(t)$ — коэффициент дисконтирования, $0 < \rho(t) \leqslant 1$, $\rho'(t) \leqslant 0$. Производительность $\beta(\tau, t)$ возрастает по переменной τ, т.к. учитывается научно-технический прогресс. Также зависимость $\beta(\tau, t)$ от текущего времени t позволяет учитывать износ капитала, автономный прогресс и колебания внешних рыночных цен.

3.1. Эквивалентное уравнение

Как известно [13], от оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) мы можем перейти к эквивалентной задаче:

$$I'(t) = \int\limits_t^{b(t)} \rho(\tau)[\beta(t,\tau) - \beta(a(\tau),\tau)]d\tau - \lambda(t)\rho(t) = 0,\ t \in [t_0, T), \tag{3.5}$$

где $I'(t)$ — градиент функционала (3.1),

$$b(t) = \begin{cases} a^{-1}(t), & t \in [t_0, a(T)], \\ T, & t \in (a(t), T). \end{cases}$$

Для того, чтобы $m^*(t)$, $t \in [t_0, T)$ была решением оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) необходимо и достаточно [6], чтобы

$$\begin{aligned} &I'(a^*; t) < 0,\ m^*(t) = m_{min}(t), \\ &I'(a^*; t) > 0,\ m^*(t) = M(t), \\ &I'(a^*; t) \equiv 0,\ m_{min}(t) \leqslant m^*(t) \leqslant M(t),\ t \in [t_0, T). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Таким образом, приходим к необходимости решения нелинейного интегрального уравнения специального вида относительно неизвестной функции $a(t)$)

$$\int\limits_t^{b(t)} \rho(\tau)[\beta(t,\tau) - \beta(a(\tau),\tau)]d\tau = \lambda(t)\rho(t),\ t \in [t_0, T). \tag{3.7}$$

При этом с учетом экономического контекста модели, полагаем, что $a(t) < t$ — неубывающая функция, отвечающая за управление заменой оборудования и списанные мощности никогда не используются вновь.

3.2. Решение уравнения (3.7)

Перепишем уравнение (3.7) в обобщенном виде

$$\int\limits_t^{b(t)} H(t, s, a(s))ds = f(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{3.8}$$

Следует отметить, что уравнение (3.8) содержит функцию, обратную к неизвестной функции $a(t)$, в верхнем пределе интегрирования. Это вызывает значительные математические трудности при построении любого численного алгоритма, связанного с аппроксимацией интегралов.

В связи с этим представляется разумным выделять классы функций, аппроксимирующих решение уравнения $a(t)$ с учетом его специфики ($a(t) < t$, $a'(t) > 0$ и т. д.) А именно, решение будем искать в виде

$$\tilde{a}_n(t) = \Phi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{3.9}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — параметры, подлежащие определению (n — некоторое натуральное число), а функция Φ такова, что допускает аналитическое построение обратной функции Φ^{-1}.

Приближенное уравнение принимает в этом случае вид

$$\int_{t}^{\tilde{b}_n(t)} H(t, s, \tilde{a}_n(s))ds = f(t), \tag{3.10}$$

где

$$\tilde{b}_n(t) = \begin{cases} \Phi^{-1}(t), & t \in [t_0, \tilde{a}_n(T)], \\ T, & t \in (\tilde{a}_n(t), T]. \end{cases}$$

Пусть ядро $H(t, s, \tilde{a}_n(s))$ уравнения (3.10) имеет первообразную по переменной s, выражающуюся в элементарных или классических специальных функциях. Для аналитического вычисления интеграла в (3.10) в этом случае можно применить один из современных пакетов символьной математики. В результате приходим к нелинейной функциональной зависимости параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$ следующего вида:

$$\Psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = f(t). \tag{3.11}$$

Для определения констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ потребуем выполнения равенства (3.11) в точках $t_k = t_0 + \frac{(T-t_0)k}{n}$, $k = \overline{1,n}$:

$$\Psi(t_k, C_1, C_2, \ldots, C_n) = f(t_k),\ k = \overline{1,n}. \tag{3.12}$$

Система нелинейных уравнений (3.12) может иметь весьма сложный вид, т. к. верхний предел интегрирования в (3.10) являлся функцией, заданной кусочно. Однако при небольших n система может быть решена численно с помощью встроенных средств пакетов символьной математики.

Дальнейшее развитие предложенного подхода может состоять, в частности, в спецификации вида функции H с учетом ее роли в моделях VCM. В этом случае можно будет строить специальные методы решения нелинейной системы (3.12), учитывающие ее особенности.

3.3. Непосредственная аппроксимация

В данном параграфе предложим приближенный метод решения оптимизационной задачи (3.1)–(3.4) в исходной форме. Метод основан на аппроксимации искомых функций отрезками рядов по линейно независимым полным системам базисных функций. С учетом сложности функционала (3.1) в качестве базисных функций разумно использовать систему степенных функций $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Приближенное решение $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{m}(t)$ задачи (3.1)–(3.4) будем искать в следующем виде:

$$\tilde{a}(t) = \sum_{i=0}^{N_a} A_i t^i, \tag{3.13}$$

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=0}^{N_m} M_i t^i, \tag{3.14}$$

где A_i и M_i — коэффициенты, подлежащие определению. Условие (3.2), таким образом, аппроксимируется следующим условием

$$P(t) = \int_{\tilde{a}(t)}^{t} \tilde{m}(\tau)d(\tau). \tag{3.15}$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в условие (3.15), получим уравнение связи:

$$\sum_{i=0}^{N_m} \frac{M_i}{i+1} \left(t^{i+1} - \left(\sum_{k=0}^{N_a} A_k t^k \right)^i \right) = P(t). \tag{3.16}$$

Таким образом, приближение $\tilde{I}$ исходного функционала (3.1) можно представить в виде

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t} \rho(t) \left[\int_{\sum\limits_{i=0}^{N_a} A_i t^i}^{t} \left(\beta(\tau, t) \sum_{i=0}^{N_m} M_i t^i d\tau \right) - \lambda(t) \sum_{k=0}^{N_m} M_k t^k \right] dt = \tag{3.17}$$

$$= \Phi(A_0, A_1, ..., A_{N_a}, M_0, M_1, ..., M_{N_m}).$$

Для нахождения экстремалей функционала (3.17) с условием связи (3.16) воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа

$$L(A_0, A_1, ..., A_{N_a}, M_0, M_1, ..., M_{N_m}) = \Phi + \lambda\Psi, \tag{3.18}$$

где

$$\Psi(A_0, ..., A_{N_a}, M_0, ..., M_{N_m}) = \sum_{i=0}^{N_m} \frac{M_i}{i+1} \left(t^{i+1} - \left(\sum_{k=0}^{N_a} A_k t^k \right)^i \right) - P(t).$$

При этом отметим, что поскольку специфика модели подразумевает возможность использования для функций $\rho(t)$, $\lambda(t)$ и $\beta(\tau, t)$ степенных и показательных представлений, то при формировании функции Φ интегрирование можно выполнять аналитически.

Таким образом, приходим к решению нелинейной системы $((N_a + 1) \times (N_m + 1) + 1)$ уравнений, определяющей необходимые условия существования экстремума функционала (3.17)

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_i} = 0, \quad i = \overline{0, N_a}, \\ \frac{\partial(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_k} = 0, \quad k = \overline{0, N_m}, \\ \Psi(A_0, A_1, ..., A_{N_a}, M_0, M_1, ..., M_{N_m}) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Система нелинейных уравнений (3.19) может иметь весьма сложный вид. Однако, по крайней мере при небольших величинах N_a и N_m, может быть решена численно с помощью встроенных средств пакетов символьной математики.

Решая систему (3.19), определим стационарные точки, в каждой из которых проверим отрицательную определенность матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0^2} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0 \partial A_1} & \cdots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_0 \partial M_{N_m}} \\ \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1 \partial A_0} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial A_1 \partial M_{N_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m} \partial M_0} & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m} \partial M_1} & \cdots & \frac{\partial^2(\Phi+\lambda\Psi)}{\partial M_{N_m}^2} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Для этого воспользуемся критерием Сильвестра, который в данном случае формулируется следующим образом: для того, чтобы матрица (3.20) была отрицательно определена необходимо и достаточно, чтобы знаки ее угловых миноров чередовались, начиная с « $-$ ».

Таким образом, определив набор коэффициентов $\{A_0, A_1, ..., A_{N_a}, M_0, M_1, ..., M_{N_m}\}$, удовлетворяющий критериям экстремальности, получим приближенное решение оптимизационной задачи (3.1)-(3.4) в форме (3.13)-(3.14).

Дальнейшее развитие предложенного подхода может состоять, в частности, в спецификации вида функций $\rho(t)$, $\lambda(t)$ и $\beta(\tau,t)$ с учетом их роли в моделях VCM. В этом случае можно будет строить специальные методы решения нелинейной системы (3.19), учитывающие вид ее уравнений.

4. Численные результаты

4.1. Итерационный метод

Для реализации численных методов решения системы (2.2) было создано приложение с использованием среды разработки Embarcadero C++ Builder XE5 и языка программирования C++. Для представления графического интерфейса пользователя (GUI) была использована библиотека быстрого прототипирования приложений с GUI Visual Component Library (VCL), которая входит в поставку используемой среды разработки.

Работу предложенного итерационного метода проиллюстрируем на следующих модельных задачах.

Модельная задача 1:

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} t\tau x^2(\tau)d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} \tau\sqrt{x(\tau)}d\tau = \frac{2}{5}\Big(t^{5/2} - (t^4-4)^{5/8}\Big), \qquad t \in [3,5]. \\ c(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} t^2(\tau - x^3(\tau))d\tau, \end{cases} \tag{4.1}$$

Точное решение системы (4.1) имеет вид

$$x^*(t) = t,\ y^*(t) = t,\ c^*(t) = \frac{t^2}{2}\Big(t^2 - \sqrt{t^4-4} + 2\Big).$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: **N** — число узлов разбиения, **m** — число итераций; $\varepsilon_x = \max\limits_i |X_m^N(t_i) - x^*(t_i)|$, $\varepsilon_y = \max\limits_i |Y_m^N(t_i) - y^*(t_i)|$, $\varepsilon_c = \max\limits_i |C_m^N(t_i) - c^*(t_i)|$ — погрешность в узлах сетки.

Результаты решения системы (4.1) представлены в таблице 2.

Таблица 2: Точность решения системы (4.1)

N	m	$\varepsilon_\mathbf{x}$	$\varepsilon_\mathbf{y}$	$\varepsilon_\mathbf{c}$
100	1	$6.1 \cdot 10^{-5}$	0.55	0.37
100	2	$3.21 \cdot 10^{-7}$	$2.44 \cdot 10^{-3}$	$2.44 \cdot 10^{-2}$
100	3	$7.91 \cdot 10^{-11}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
100	5	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$	$3.17 \cdot 10^{-6}$
100	10	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$6.19 \cdot 10^{-11}$	$9.1 \cdot 10^{-11}$
100	20	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$6.17 \cdot 10^{-11}$	$7.21 \cdot 10^{-11}$

Модельная задача 2:

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} e^{t\tau} x^3(\tau) d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} \sqrt{x(\tau)} d\tau = e^t - \left(e^{2t} \left[e^{t^2+6t} - t - 6 \right] \right)^{\frac{1}{t+6}}, \qquad t \in [3,4]. \\ c(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} \frac{1}{t x(\tau)} d\tau, \end{cases} \tag{4.2}$$

Отметим, что первое уравнение системы (4.2) имеет вырожденное быстрорастущее ядро.

Точным решением системы (4.2) являются следующие функции

$$x^*(t) = e^{2t}, \; y^*(t) = \frac{\ln(e^{t^2+6t} - e^{2t}t - 6e^{2t})}{t+6}, \; c^*(t) = \frac{\left[e^{2t}(e^{t^2+4t} - t - 6) \right]^{-\frac{2}{t+6}} - e^{-2t}}{2}.$$

В качестве начального приближения использовались функции $x_0(t) = 10t$, $y_0(t) = 0.8t$.

В таблице 3 показаны результаты для задачи (4.2).

Таблица 3: Точность решения системы (4.2)

N	**m**	$\varepsilon_{\mathbf{x}}$	$\varepsilon_{\mathbf{y}}$	$\varepsilon_{\mathbf{c}}$
100	1	0.049	0.00015	0.0025
100	2	0.0092	$1.10 \cdot 10^{-6}$	$3.15 \cdot 10^{-4}$
100	3	0.0014	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$
100	5	0.0012	$9.07 \cdot 10^{-10}$	$1.11 \cdot 10^{-9}$
100	10	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.76 \cdot 10^{-10}$	$7.16 \cdot 10^{-10}$
200	10	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-10}$	$8.43 \cdot 10^{-10}$
500	10	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$7.92 \cdot 10^{-11}$	$2.21 \cdot 10^{-10}$
1000	10	$5.72 \cdot 10^{-7}$	$9.18 \cdot 10^{-13}$	$8.02 \cdot 10^{-12}$

4.2. Прямой метод

Проиллюстрируем работу прямого численного метода на следующей модельной задаче.

Модельная задача 3:

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} t e^{x(\tau)} d\tau = 0, \\ \frac{25}{2} t^2 - \ln(e^{5t} - 25t) = \int\limits_{y(t)}^{t} \frac{x^2(\tau)}{\tau} d\tau, \qquad t \in [3,4]. \\ c(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} (3\tau x(\tau))^3 d\tau, \end{cases} \tag{4.3}$$

Точное решение системы (4.3) имеет вид

$$x^*(t) = 5t,\ y^*(t) = \frac{\ln\left(e^{5t} - 25t\right)}{5},\ c^*(t) = \frac{27}{20}t^3\Big(625t^4 - 4\ln\left(e^{5t} - 25t\right)\Big).$$

Результаты решения системы (4.3) представлены в таблице 4.

Таблица 4: Точность решения системы (4.3)

N	$\varepsilon_{\mathbf{x}}$	$\varepsilon_{\mathbf{y}}$	$\varepsilon_{\mathbf{c}}$
10	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$7.37 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$
20	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{-9}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$
50	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-10}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$
100	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-11}$	$2.50 \cdot 10^{-5}$
300	$1.22 \cdot 10^{-5}$	$3.96 \cdot 10^{-12}$	$7.72 \cdot 10^{-6}$
500	$1.30 \cdot 10^{-5}$	$4.46 \cdot 10^{-12}$	$7.24 \cdot 10^{-6}$

4.3. **Результаты решения уравнения** (3.7)

Предложенный в параграфе 3.2. метод был реализован в среде Maple. Проиллюстрируем его работу на следующем модельном уравнении

$$\int\limits_t^{b(t)} (t+s)^2 a(s)ds = \begin{cases} -\frac{31}{30}t^5 + \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3}t^{\frac{7}{2}}, & t \in [0.2, 0.81], \\ -\frac{31}{30}t^5 + \frac{59049}{500000} + \frac{6561}{20000}t + \frac{243}{1000}t^2, & t \in (0.81, 0.9], \end{cases} \tag{4.4}$$

точным решением которого является функция $a(t) = t^2,\ t \in [0.2, 0.9]$.

Если приближенное решение искать в виде $\tilde{a}_2(t) = C_1 t^{C_2}$, то программа выдает результат $C_1 = 1,000000000,\ C_2 = 2,000000000$, т.е. параметры решения определяются с точностью, определяемой числом значащих цифр после запятой при выполнении арифметических действий (в данном случае 10 цифр).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int\limits_t^{b(t)} (t+s)^2 a(s)ds = f(t),\ t \in [0.2, 1], \tag{4.5}$$

в котором правая часть $f(t)$ подобрана таким образом, чтобы точным решением была функция $a(t) = \sin(0,9t)$. В этом случае имеем следующий результат $C_1 = 0,8007050861$, $C_2 = 0,9273393370$. При этом абсолютная погрешность аппроксимации составляет $\varepsilon = 0,0173781765$.

Список литературы

1. В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко, *Моделирование развивающихся систем*, Наука, Москва, 1983, 352 с.

2. D. Sidorov, *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In: L. O. Chua ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 300 с.

3. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.

4. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models”, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **1**:4 (2005), 415-432.

5. I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov, “Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119-128.

6. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay”, *Jour. Appl. Math.*, **5** (2004), 433-445.

7. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, “Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **127** (2005), 109-127.

8. Yu. Yatsenko, “Volterra integral equations with unknown delay time”, *Methods and Applications of Analysis*, **2**:4 (1995), 408-419.

9. А. Н. Тында, “Решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной задержкой”, *Труды СВМО*, **9**:1 (2007), 253-259.

10. A. N. Tynda, “Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay”, *PAMM*, **9**:1 (2009), 591-592.

11. A. N. Tynda, “On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays”, *PAMM*, **8**:1 (2008), 10857 - 10858.

12. А. Н. Тында, Е. С. Карпухина, “Приближенное решение одной задачи оптимизации в нелинейных интегральных моделях экономики”, *Сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. "Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем". Пенза. Изд-во ПГУ*, 2015, 99-103.

13. Ю. П. Яценко, *Интегральные модели систем с управляемой памятью*, Наукова думка, Киев, 1991, 217 с.

Поступила 4.10.2017

MSC2010 65R20, 37N40

Numerical methods for the problems of nonlinear macroeconomic integral models

© **A. N. Tynda** [3], **N. Yu. Kudryashova** [4]

Abstract. In this paper we suggest several methods for numerical treatment of integral dynamical systems described by nonlinear integral equations of the special form. The first group of problems is connected with solution of nonlinear integral Volterra-type equations' system with unknown function placed at the lower limits of integration. Two effective methods for solution of such systems are suggested. The first method is direct. The second method is iterative; it is based on the linearization of the integral operators using modified Newton-Kantorovich scheme. The second group of problems is connected with the optimal control problems in macroeconomical VCM models. We suggest two original approaches to these problems' solution; these approaches allow to determine the extremals of functionals in the first approximation. Proposed algorithms also allow to obtain more accurate approximations. In the conclusion several numerical results for model problems are stated. These results allow to judge the effectiveness of the proposed approaches.

Key Words: Systems of nonlinear integral equations, VCM models, Newton-Kantorovich method, nonlinear delays, extremal of functional, approximation of integrals.

References

1. V. M. Glushkov, V. V. Ivanov, V. M. Yanenko, *Modelirovanie razvivajuschihsja sistem [Modelling of developing systems]*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 352 p.
2. D. Sidorov, *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. In: L. O. Chua ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87*, World Scientific Press, Singapore, 2014, 300 p.
3. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.
4. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models", *Journal of Industrial and Management Optimization*, **1**:4 (2005), 415-432.
5. I. Muftahov, A. Tynda, D. Sidorov, "Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**:15 (2017), 119-128.
6. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Structure of Optimal Trajectories in a Nonlinear Dynamic Model with Endogenous Delay", *Jour. Appl. Math.*, **5** (2004), 433-445.
7. N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, "Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **127** (2005), 109-127.

[3] **Aleksandr N. Tynda**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6023-9847, tyndaan@mail.ru

[4] **Natalia Yu. Kudryashova**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya Str., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0789-4559, math.kudryashova@yandex.ru

8. Yu. Yatsenko, "Volterra integral equations with unknown delay time", *Methods and Applications of Analysis*, **2**:4 (1995), 408-419.

9. A. N. Tynda, "Reshenie sistem nelineynykh integralnykh uravneniy Volterra s neizvestnoy zaderzhskoy [Solution of the systems of nonlinear Volterra integral equations with unknown delay]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **9**:1 (2007), 253-259 (In Russ.).

10. A. N. Tynda, "Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay", *PAMM*, **9**:1 (2009), 591-592.

11. A. N. Tynda, "On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays", *PAMM*, **8**:1 (2008), 10857 - 10858.

12. A. N. Tynda, E. S. Karpukhina, "Priblizhennoe reshenie odnoy zadachi optimizatsii v nelineynykh integralnykh modeljakh ekonomiki [Approximate solution of the optimization problem in nonlinear integral models of economics]", *Sbornik statei X Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Analiticheskie i chislennye metody modelirovanija estestvenno-nauchnykh i socialnykh problem". Penza. Izdatelstvo PGU*, 2015, 99-103 (In Russ.).

13. Yu. P. Yatsenko, *Integralnye modeli sistem s upravljaemoy pamjatju [Integral models of the systems with controllable memory]*, Naukova dumka, Kiev, 1991 (In Russ.), 217 p.

Submitted 4.10.2017