DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.33-44

УДК 514

Слоеные модели для гладких орбифолдов и их применение

© **Н. И. Жукова** [1]

Аннотация. Для любого орбифолда построена слоеная модель, представляющая собой слоение, пространство слоев которого совпадает с этим орбифолдом, каноническая проекция на пространство слоев является субмерсией в категории орбифолдов. Доказано, что группа всех диффеоморфизмов орбифолда изоморфна группе базовых автоморфизмов (в категории слоений) построенного модельного слоения. На языке модельных слоений найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы орбифолды были хорошими. В качестве приложения получено, что любой орбифолд, допускающий картанову геометрию нулевой кривизны, является хорошим.

Ключевые слова: орбифолд, слоение, связность Эресмана для слоения, картанова геометрия.

1. Введение. Основные результаты.

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями. Они введены Сатаки [1] как обобщения многообразий. Термин "орбифолд"предложен Терстоном, который применил классификацию двумерных орбифолдов при получении известных результатов о структуре замкнутых трехмерных многообразий [2].

Орбифолды широко используются в современной теоретической физике: как пространства распространения струн, в конформной теории поля, в теории деформационного квантования, обзор можно найти в [3].

Орбифолд локально является фактор-пространством $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов Γ. При этом группа Γ не является фиксированной и может меняться при переходе от одной карты орбифолда к другой. Изоморфизм координатных окрестностей соответствует сопряженным действиям одной и той же группы Γ на $\mathbb{R}^n$.

Существуют различные методы исследований орбифолдов. В ряде работ (см., например, [4]) разрабатывается группоидный подход, позволяющий свести проблемы для орбифолда к проблемам для соответствующих группоидов, теория которых в настоящее время активно развивается. Категория орбифолдов эквивалентна также категории псевдогрупп изометрий гладких, вообще говоря, несвязных римановых многообразий, пространство орбит которых хаусдорфовы и стационарные подгруппы конечны. Известны также и другие подходы к определению и изучению орбифолдов.

Цель данной работы — показать, что орбифолды тесно связаны со слоениями, установить эту связь и применить результаты о слоениях к исследованию орбифолдов.

Важную роль при этом играют слоения со связностью Эресмана. Понятие связности Эресмана для слоений введено Блюменталем и Хебдой [6]. Подчеркнем, что связность Эресмана имеет глобальный дифференциально-топологический характер.

[1] **Жукова Нина Ивановна**, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4553-559X, nzhukova@hse.ru

Через $\mathcal{F}ol$ обозначается категория слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого. Через $Diff(M,F)$ обозначается группа всех автоморфизмов слоения (M,F) в категории $\mathcal{F}ol$. Подчеркнем, что подгруппа $Diff_L(M,F) := \{f \in Diff(M,F) \,|\, f(L) = L, L \in F\}$ группы $Diff(M,F)$, образованная диффеоморфизмами многообразия M, относительно которых каждый слой слоения инвариантен, является нормальной подгруппой и называется группой слоевых автоморфизмов.

Определение 1.1. *Фактор-группа*

$$Diff_b(M,F) = Diff(M,F)/Diff_L(M,F)$$

группы автоморфизмов слоения $Diff(M,F)$ по нормальной подгруппе слоевых автоморфизмов $Diff_L(M,F)$ называется группой базовых автоморфизмов слоения (M,F).

Мы напоминаем, что гладкие орбифолды образуют категорию $\mathfrak{Orb}$ (Раздел 1).

Для любого n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ мы стоим слоеную модель, представляющую собой слоение (M,F) со связностью Эресмана, пространство слоев которого гомеоморфно $\mathcal{N}$, а фактор-отображение $r : M \to \mathcal{N} \cong M/F$ является субмерсией в категории орбифолдов $\mathfrak{Orb}$ (Определение 1.2.). При этом слоение (M,F) называется *модельным* или *ассоциированным.*

Напомним, что слоение называется компактным, если все его слои компактны. Доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого гладкого n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ существует слоения модель (M,F). В частности, для любого орбифолда $\mathcal{N}$ существует компактное модельное слоение (M,F).*

В зависимости от задачи используется та или иная слоеная модель для орбифолда. Применяя некомпактную модель, мы доказываем следующее утверждение о связи групп автоморфизмов орбифолда и его модельного слоения.

Теорема 1.2. *Группа $Diff(\mathcal{N})$ всех автоморфизмов гладкого орбифолда $\mathcal{N}$ в категории $\mathfrak{Orb}$ изоморфна группе базовых диффеоморфизмов $Diff_b(M,F)$ некоторого модельного слоения (M,F).*

Терстоном [2] введено следующее понятие хороших орбифолдов.

Определение 1.2. *Орбифолд называется хорошим, если его универсальный накрывающий орбифолд является многообразием.*

Заметим, что любой хороший орбифолд представим в виде пространства орбит M/Ψ многообразия M по некоторой группе диффеоморфизмов Ψ.

Определение 1.3. *Слоение (M,F) называется слоением, накрытым расслоением, если существует накрывающее отображение $k : \widetilde{M} \to M$ такое, что индуцированное слоение f^*F образованное слоями некоторой субмерсии $s : \widetilde{M} \to N$. со связностью Эресмана.*

Следующий критерий переводит термин "хороший орбифолд"на язык модельных слоений.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{N}$ — n-мерный орбифолд и (M,F) — его модельное слоение. Для того, чтобы орбифолд $\mathcal{N}$ был хорошим, необходимо и достаточно, чтобы слоение (M,F) было накрыто расслоением.*

Далее мы рассматриваем орбифолды, снабженные картановой геометрией, которые называем картановыми орбифолдами. Для удобства читателя приведены необходимые сведения о картановой геометрии и о картановых слоениях (Раздел 6).

В качестве приложения Теоремы 1.4. к картановым обифолдам, мы получаем следующее достаточное условие для того, чтобы картанов орбифолд был хорошим. При этом существенно используются результаты о картановых слоениях из [10].

Теорема 1.4. *Пусть $\xi = (P(\mathcal{N},H),\omega)$ — картанова геометрия на орбифолде $\mathcal{N}$. Если кривизна картановой связности ω равна нулю, то есть, $d\omega = 0$, то орбифолд $\mathcal{N}$ является хорошим.*

Следствие 1.1. *Римановы и псевдоримановы орбифолды постоянной кривизны являются хорошими.*

Благодарности
Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01041).

2. Категория орбифолдов

Точные определения и теоремы из теории орбифолдов можно найти, например, в [3].

Везде в этой работе под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Если $f\colon M \to \mathcal{N}$ — гладкое отображение многообразий, то через f_* (соответственно f^*) мы обозначаем дифференциал (соответственно, кодифференциал) отображения f.

Напомним определение гладкого орбифолда. Пусть $\mathcal{N}$ — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, U — открытое подмножество в $\mathcal{N}$, n — фиксированное натуральное число. *Картой* на $\mathcal{N}$ называется тройка (Ω,Γ,p), где Ω — связное открытое подмножество в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, Γ — конечная группа диффеоморфизмов Ω, а $p\colon \Omega \to \mathcal{N}$ — композиция фактор-отображения $r\colon \Omega \to \Omega/\Gamma$ и некоторого гомеоморфизма $q\colon \Omega/\Gamma \to U$ фактор-пространства Ω/Γ на U. Подмножество U называется *координатной окрестностью карты* (Ω,Γ,p). Отметим, что в отличие от Сатаки [1] мы не требуем, чтобы размерность множества неподвижных точек $\mathrm{Fix}\Gamma$ группы Γ была меньше $n-1$.

Инъекцией карты (Ω,Γ,p) *в карту* (Ω',Γ',p'), *соответствующей включению координатных окрестностей* $U \subset U'$, называется вложение $\phi\colon \Omega \to \Omega'$, удовлетворяющее равенству $p' \circ \phi = p$. Как известно ([4]), любая инъекция ϕ индуцирует (единственный) мономорфизм групп $\psi\colon \Gamma \to \Gamma'$, для которого $\phi \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \phi$, $\forall \gamma \in \Gamma$, при этом, если ϕ — диффеоморфизм, то ψ — изоморфизм групп Γ и Γ'.

Две карты (Ω_1,Γ_1,p_1) и (Ω_2,Γ_2,p_2) с координатными окрестностями U_1 и U_2 называются *согласованными,* если при $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ для любой точки $x \in U_1 \cap U_2$ существуют: a) карта (Ω,Γ,p) с такой координатной окрестностью U, что $x \in U \subset U_1 \cap U_2$, b) инъекции карт $\phi_1\colon \Omega \to \Omega_1$ и $\phi_2\colon \Omega \to \Omega_2$, соответствующие включениям $U \subset U_1$ и $U \subset U_2$. Множество карт $\mathcal{A} = \{(\Omega_i,\Gamma_i,p_i) \mid i \in J\}$ называется *атласом,* если семейство $\{U_i := p_i(\Omega_i) \mid i \in J\}$ — открытое покрытие топологического пространства $\mathcal{N}$ и любые две карты из $\mathcal{A}$ согласованы. Атлас $\mathcal{A}$ называется *максимальным,* если $\mathcal{A}$ совпадает с любым атласом, его содержащим.

Максимальный атлас называется *гладкой структурой* n*-мерного орбифолда* на топологическом пространстве $\mathcal{N}$. Пара $(\mathcal{N},\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — максимальный атлас на $\mathcal{N}$, называется *гладким* n*-мерным орбифолдом.* Заметим, что любой атлас содержится в единственном максимальном атласе и, следовательно, определяет структуру гладкого орбифолда.

Всюду далее орбифолды $\mathcal{N}$ предполагаются гладкими, а через $\mathcal{A}=\{(\Omega_i,\Gamma_i,p_i)\mid i\in J\}$ обозначается максимальный атлас $\mathcal{N}$. Инъекцию ϕ_{ij} карты (Ω_i,Γ_i,p_i) в карту (Ω_j,Γ_j,p_j), соответствующую включению координатных окрестностей $U_i\subset U_j$, мы будем называть *инъекцией карт* и обозначать через $\phi_{ij}\colon\Omega_i\to\Omega_j,\ \ i,j\in J.$

На многообразии $T=\bigcup_{i\in J}\Omega_i$ возникает псевдогруппа локальных диффеоморфизмов $\mathcal{H}(\mathcal{N})$, порожденная инъекциями ϕ_{ij} карт атласа $\mathcal{A}$ орбифолда $\mathcal{N}$. Будем называть $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ *псевдогруппой орбифолда* $\mathcal{N}$.

Для карт (Ω,Γ,p) и (Ω',Γ',p') из $\mathcal{A}$ с координатными окрестностями, содержащими $x\in\mathcal{N}$, подгруппы изотропии Γ_y и Γ'_z точек $y\in p^{-1}(x)$ и $z\in p'^{-1}(x)$, соответственно, изоморфны. Таким образом, каждой точке x орбифолда $\mathcal{N}$ соответствует единственная (с точностью до изоморфизма групп) абстрактная группа Γ_y, называемая *группой орбифолдности* точки x. Точка x называется *регулярной,* если ее группа орбифолдности тривиальна. Точка, не являющаяся регулярной, называется *орбифолдной.* Как известно, множество Δ_n всех регулярных точек n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ с индуцированной топологией является связным открытым n-мерным многообразием, всюду плотным в $\mathcal{N}$.

Для любой точки $x\in\mathcal{N}$ существует такая карта $(\Omega,\Gamma,p)\in\mathcal{A}$, что Ω является n-мерным арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$, $p(0)=x$, $0=(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$, а Γ — конечной группой ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$. Такая карта $(\mathbb{R}^n,\Gamma,p)$ называется *линеаризованной картой в точке* x.

Непрерывное отображение $f\colon\mathcal{N}\to\mathcal{N}'$ орбифолда $(\mathcal{N},\mathcal{A})$ в орбифолд $(\mathcal{N}',\mathcal{A}')$ называется *гладким* ([4]), если для любой точки $x\in\mathcal{N}$ существуют: a) карта $(\Omega,\Gamma,p)\in\mathcal{A}$ с координатной окрестностью $U\ni x$; b) карта $(\Omega',\Gamma',p')\in\mathcal{A}'$ с такой координатной окрестностью U', что $f(U)\subset U'$; c) гладкое отображение $\tilde f\colon\Omega\to\Omega'$ многообразия Ω в многообразие Ω' такое, что $p'\circ\tilde f=f|_U\circ p$. При этом гладкое отображение $\tilde f$ называется *локальным лифтом* отображения f.

Категория, объектами которой являются гладкие орбифолды, морфизмами — гладкие отображения орбифолдов, а композицией морфизмов — композиция гладких отображений орбифолдов, называется *категорией орбифолдов* и обозначается через $\mathfrak{Orb}$. Категория гладких многообразий, морфизмами в которой служат гладкие отображения многообразий, является полной подкатегорией категории $\mathfrak{Orb}$.

Действие $\Phi\colon G\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ группы Ли G на орбифолде $\mathcal{N}$ будем называть *гладким,* если Φ — гладкое отображение произведения орбифолдов $G\times\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$.

Говорят, что орбифолд $(\mathcal{N},\mathcal{A})$ *ориентирован,* если для каждого $i\in J$ на многообразии Ω_i выбрана ориентация, причем любое преобразование $\gamma\in\Gamma_i$ и любая инъекция $\phi_{ij}\colon\Omega_i\to\Omega_j,\ \ i,j\in J$, являются отображениями, сохраняющими ориентацию.

Как показывают примеры ([5], пример 1), в отличие от многообразий и двумерных орбифолдов при $n\geq 3$ топологические пространства n-мерных орбифолдов, вообще говоря, не являются локально евклидовыми.

3. Построение слоеной модели

3.1. Расслоенные пространства со структурной группой над орбифолдами

Расслоенное пространство над орбифолдом со структурной группой и, в частности, пространство главного расслоения представляет собой орбифолд (см., например, [5]). Через

$\mathcal{P}(\mathcal{N}, H)$ будем обозначать главное H-расслоение над орбифолдом $\mathcal{N}$ с пространством расслоения $\mathcal{P}$.

3.2. Модельное слоение для орбифолда

Обозначим через G компоненту единицы $GL_e(n+1, R)$ общей линейной группы $GL(n+1, R)$. Тогда G — группа квадратных $(n+1)$-мерных квадратных матриц с положительными определителями. Определим вложение $J\colon GL(n, R) \to G$, полагая $J(A) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, если $\det A > 0$, и $J(A) := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$, когда $\det A < 0$. При этом J — мономорфизм группы $Gl(n, R)$ в группу G.

Теорема 3.1. *Для любого гладкого n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ существует главное G-расслоение $M(\mathcal{N}, G)$ над $\mathcal{N}$, где G — компонента единицы группы $GL(n+1, R)$, обладающее свойствами:*

1) пространство расслоения M является гладким многообразием, а орбиты группы G образуют гладкое слоение (M, F) со связностью Эресмана, пространство слоев которого совпадает с орбифолдом $\mathcal{N}$, а проекция на пространство слоев $r : M \to \mathcal{N} = M/G$ является морфизмом в категории $\mathfrak{Orb}$;

2) группа орбифолдности произвольной точки $x \in \mathcal{N}$ изоморфна группе голономии слоя $r^{-1}(x)$;

3) расслоение линейных реперов $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$ над орбифолдом $\mathcal{N}$ является подрасслоением расслоения $M(\mathcal{N}, G)$.

Доказательство. Как известно, на гладком орбиобразии $\mathcal{N}$ всегда существует риманова метрика. Предположим, что риманова метрика на $\mathcal{N}$ зафиксирована, то есть $\mathcal{N}$ — римановo орбифолд. В линеаризованной карте (Ω, Γ, p) с центром в x каждое преобразование γ из Γ является ортогональным, то есть $\Gamma \subset O(n) \subset Gl(n, R)$. Для карты (Ω, Γ, p) положим $P_\Omega := \Omega \times G$, пусть π_Ω — проекция на первый сомножитель. Будем рассматривать P_Ω как пространство главного G-расслоения.

Зададим антиизоморфизм h_Ω по формуле $h_\Omega(\gamma)(y, A) := (\gamma^{-1}(y), J(\gamma^{-1})A), \forall (y, A) \in \Omega \times G$. Пусть ψ — инъекция карты (Ω, Γ, p) в карту (Ω', Γ', p'), соответствующая включению $U \subset U'$ и $\chi\colon \Gamma \to \Gamma'$ — мономорфизм групп, индуцированный ψ. Определим отображение $\bar\psi$ равенством $\bar\psi(z, B) := (\psi^{-1}(z), J(\psi_*^{-1})B)$, $\forall (z, B) \in P_{\Omega'}|_{\psi(\Omega)} \subset \Omega' \times G$, где ψ_* — дифференциал отображения ψ. Благодаря тому, что $\mathcal{N}$ — риманов орбифолд, мы имеем $\psi_* \in O(n)$, следовательно, отображение $\bar\psi$ определено корректно. Непосредственная проверка показывает, что таким образом определено главное G-расслоение над орбифолдом $\mathcal{N}$.

Поскольку группа Γ действует свободно посредством h_Ω на P_Ω пространство орбит $M_\Omega := P_\Omega/\Gamma$ естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия, относительно которой проекция $\eta_\Omega\colon M_\Omega \to P_\Omega$ является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований $h_\Omega(\Gamma)$. Так как каждое преобразование из $h_\Omega(\Gamma)$ является изоморфизмом тривиального слоения $\bar F_\Omega := \{\{y\} \times G,\, y \in \Omega\}$ на P_Ω, то на M_Ω индуцируется слоение $F_\Omega := \eta_\Omega^* \bar F_\Omega$, причем имеет место равенство

$$p \circ \pi_\Omega = r_\Omega \circ \eta_\Omega, \tag{3.1}$$

где отображение $r_\Omega\colon M_\Omega \to U$ переводит орбиту $(y, A)\Gamma$ в точку $p(y)$ для любых $(y, A) \in \Omega \times G$. Из (3.1) вытекает, что группа голономии $\Gamma(L, z)$ произвольного слоя $L := r_\Omega(x)$, $x \in U$, этого слоения изоморфна стационарной подгруппе Γ_y группы Γ в точке $y \in p^{-1}(x) \subset \Omega$, а потому конечна. Пусть $M_i := M_{\Omega_i}$, где $(\Omega_i, p_i, \Gamma_i)$ — карта орбифолда $\mathcal{N}$, $r_i := r_{\Omega_i}\colon M_i \to U_i$, $\eta_i := \eta_{\Omega_i}$.

Обозначим через $S := \bigsqcup M_i$ дизъюнктное объединение всех M_i. Две точки $z_i \in M_i$ и $z_j \in M_j$ из S мы называем σ-эквивалентными, если: 1) $r_i(z_i) = r_j(z_j) = x \in U_i \cap U_j$; 2) существуют такие точки $\bar{z}_i \in \eta_i^{-1}(z_i)$, $\bar{z}_j \in \eta_j^{-1}(z_j)$ и такая карта $(\Omega_k, p_k, \Gamma_k)$ с центром в x, что $U_k \subset U_i$ и $U_k \subset U_j$ и $\bar{z}_j = \bar{\psi}_{kj}^{-1} \circ \bar{\psi}_{ki}(\bar{z}_i)$, где $\bar{\psi}_{ki}, \bar{\psi}_{kj}$ — изоморфизмы главных G-расслоений, индуцированные инъекциями ψ_{ki} и ψ_{kj}, соответствующими этим включениям. Заметим, что σ действительно является отношением эквивалентности в S. Обозначим через M фактор-пространство S/σ, пусть $\tau\colon S \to M$ — фактор-отображение. Так как $\tau_i := \tau|_{M_i}\colon M_i \to M$ — гомеоморфизм, то нетрудно проверить, что на M индуцируется гладкая структура, относительно которой τ_i — гладкое вложение M_i на открытое подмногообразие в M. Поскольку отношение эквивалентности σ не разрушает слоения (M_i, F_i), где $F_i := F_{\Omega_i}$, то на многообразии M индуцируется такое слоение F, что $\tau_i^* F_i = F|_{M_i}$. Далее мы отождествляем $\tau_i(M_i)$ с M_i, при этом $F|_{M_i}$ отождествляется с F_i. Полагая $r|_{M_i} := r_i$ мы определяем проекцию $r\colon M \to \mathcal{N}$.

Из равенства (3.1) вытекает, что $r\colon M \to \mathcal{N}$ — субмерсия на орбифолд $\mathcal{N}$. Слои слоения (M, F) совпадают со слоями $r^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{N}$. Поскольку для $x \in U_i$ группа голономии слоя $r^{-1}(x)$ слоения (M, F) изоморфна группе голономии слоя $r_i^{-1}(x)$ слоения (M_i, F_i), то она изоморфна группе орбифолдности точки $x \in \mathcal{N}$.

Так как структурная группа G расслоения $M(\mathcal{N}, G)$ собственно разрывно действует на многообразии M, то это действие собственное. Поэтому, на многообразии M существует такая риманова метрика g, что G становится группой изометрий риманова многообразия (M, g). Используя это, нетрудно показать, что n-мерное распределение $\mathfrak{M}$, ортогональное слоению (M, F), образованному орбитами этой группы, является связностью Эресмана для (M, F). Это завершает доказательство свойств 1) и 2).

Определенный выше мономорфизм групп Ли $J : GL(n, R) \to G$ индуцирует вложение расслоения реперов $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$ над орбифолдом $\mathcal{N}$ в расслоение $M(\mathcal{N}, G)$. Поэтому можно рассматривать $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$ как подрасслоение расслоения $M(\mathcal{N}, G)$. Таким образом, выполняется свойство 3).

Замечание 3.1. *Если в качестве группы G взять группу $SO(n+1, R)$, а группу $GL(n, R)$ заменить группой $O(n)$, то так же как в Теореме 3.1. строится компактное слоение (M, F), ассоциированное с орбифолдом $\mathcal{N}$.*

Замечание 3.2. *Фактически в статье А.В. Багаева и автора* [5] *использовано модельное слоение для ориентированных орбифолдов $\mathcal{N}$. Исследование неориентируемых римановых орбифолдов сведено к ориентированным с помощью двулистного накрытия.*

Замечание 3.3. *Псевдогруппа голономии каждого слоения, ассоциированного с орбифолдом $\mathcal{N}$, совпадает с псевдогруппой $\mathcal{H}(\mathcal{N})$ этого орбифолда.*

4. Доказательство Теоремы 1.2.

Пусть $\mathcal{N}$ — произвольный гладкий n-мерный орбифолд и $M(\mathcal{N}, G)$, $G = GL_e(n+1, R)$, — его модельное слоение, построенное выше при доказательстве Теоремы 1.1.. Обозначим через $j : S \to M$ вложение редуцированного расслоения $S(\mathcal{N}, GL(n, R))$ в $M(\mathcal{N}, G)$. Для простоты изложения, отождествим посредством j подмножество $j(S_\Omega)$ с S_Ω для любой карты (Ω, Γ, p) орбифолда $\mathcal{N}$. При этом S_Ω — редукция G-расслоения M_Ω к подгруппе $GL(n, R)$ над $\mathcal{N}$.

Будем использовать введенные выше обозначения. Возьмем любую точку $x \in \mathcal{N}$. Рассмотрим карты (Ω, Γ, p) и (Ω', Γ', p') орбифолда $\mathcal{N}$ в точках x и $y = f(x)$, соответственно. Не нарушая общности, можно считать, что $f(U) = f'(U')$, где $U = \Omega/\Gamma$ и $U' = \Omega'/\Gamma'$. Пусть $\overline{f} : \Omega \to \Omega'$ — некоторый представитель f.

Для любой точки $\overline{z} \in M$ найдется открытое подмножество M_Ω, содержащее $\overline{z}$ такое, что $r_\Omega(\overline{z}) = x$.

Случай 1. Пусть $\overline{z} \in S_\Omega$. Возьмем $z \in \eta_\Omega^{-1}(\overline{z})$. Тогда z — репер в точке $0 \in \Omega$. Поэтому $z' = \overline{f}_{*0}(z)$ — репер в точке $0 \in \Omega'$ и $\overline{z'} := \eta_{\Omega'}(z') \in S_{\Omega'}$.

Положим по определению $\widehat{f} : M_\Omega \to M'_\Omega : \overline{z} \mapsto \overline{z'}$. Учитывая, что $f \in Diff(\mathcal{N})$, мы видим, что $\overline{f} : \Omega \to \Omega'$ сопрягает действия групп Γ на Ω и Γ' на Ω'. Используя это, нетрудно проверить корректность определения отображения $\widehat{f}$.

Случай 2. Пусть теперь $\overline{z}$ — любая точка из M_Ω. Тогда найдется точка $\overline{z_0} \in S_\Omega$, принадлежащая тому же слою слоения (M, F), что и $\overline{z}$. Поэтому существует $a \in G$, для которого $\overline{z} = \overline{z_0}a$. Положим по определению: $\widehat{f}(\overline{z}) = \widehat{f}(\overline{z_0})a$.

Покажем, что это определение не зависит от выбора a. Предположим, что существует другой элемент $b \in G$, удовлетворяющий условию $\overline{z} = \overline{z_0}b$. Тогда $R_{a^{-1}} \circ R_b(\overline{z_0}) = R_{ba^{-1}}(\overline{z_0}) = \overline{z_0}$, то есть $ba^{-1} \in G_{\overline{z_0}}$. Поэтому имеет место цепочка равенств: $\widehat{f}(\overline{z}) = \widehat{f}(\overline{z_0})b = \widehat{f}(\overline{z}b) = \widehat{f}(\overline{z_0}b(a^{-1}a)) = \widehat{f}(\overline{z_0}(ba^{-1})a) = \widehat{f}(\overline{z_0}a)$, что завершает нашу проверку.

В обоих случаях независимость от выбора карт орбифолда $\mathcal{N}$ в точках x и $y = f(x)$ проверяется стандартным образом. Нетрудно видеть, что отображение $\widehat{f} : M \to M$ дифференцируемое.

Аналогично, диффеоморфизм $f^{-1} \in Diff(\mathcal{N})$ определят дифференцируемое отображение $\widehat{f}^{-1} : M \to M$. Из определения $\widehat{f}$ и $\widehat{f}^{-1}$ следует, что $\widehat{f}$ и $\widehat{f}^{-1}$ дифференцируемы и следовательно, они —диффеоморфизмы многообразия M, сохраняющие слоение (M, F).

Таким образом, для любого гладкого n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ построено модельное слоение (M, F), где $G = GL_e(n+1, R)$ b $M = M(\mathcal{N}, G)$, для которого определено отображение

$$\Theta : Diff(\mathcal{N}) \to Diff(M, F) : f \mapsto \widehat{f},$$

ставящее в соответствие диффеоморфизму f орбифолда $\mathcal{N}$ индуцированный указанным выше способом диффеоморфизм $\widehat{f}$ многообразия M, причем Θ является гомоморфизмом группы $Diff(\mathcal{N})$ в $Diff(M)$.

Отображение

$$\chi : Diff(M, F) \to Diff(\mathcal{N}),$$

ставящее в соответствие любому диффеоморфизму многообразия M, сохраняющему слоение, его проекцию на орбифолд, является гомоморфизмом групп. Из доказанного выше вытекает, что для построенного модельного слоения (M, F) этот гомоморфизм является эпиморфизмом. Поскольку его ядро совпадает с группой базовых автоморфизмов этого слоения, то есть, $Ker(\chi) = Diff_L(M, F)$, то группа $Diff(\mathcal{N})$ изоморфна группе базовых автоморфизмов $Diff_b(M, F)$ слоения (M, F) и Теорема 1.2. доказана. □

5. Доказательство Теоремы 1.3.

Предположим, что для n-мерного орбифолда $\mathcal{N}$ существует модельное слоение (M, F), накрытое расслоением. Согласно определению, это означает существование накрывающего отображения $k : \widetilde{M} \to M$ такого, что индуцированное слоение $\widetilde{F} = f^*F$ образованное слоями некоторой субмерсии $s : \widetilde{M} \to B$ со связностью Эресмана. Благодаря существованию связности Эресмана для этой субмерсии определено локально тривиальное расслоение с проекцией $s : \widetilde{M} \to B$.

Заметим, что $B = \widetilde{M}/\widetilde{F}$, причем фактор-отображение на пространство слоев $s : \widetilde{M} \to B$ отображает слой $\widetilde{L} \in \widetilde{F}$ в точку $[\widetilde{L}] \in \widetilde{M}/\widetilde{F}$. Определено отображение $q : B \to \mathcal{N}$, $q([\widetilde{L}]) := [L]$, где $k(\widetilde{L}) = L$ — слой модельного слоения, накрытый слоем $\widetilde{L}$, удовлетворяющее равенству

$$q \circ s = r \circ k. \tag{5.1}$$

Из выполнения равенства (5.1) вытекает, что $q : B \to \mathcal{N}$ — накрывающее отображение для орбифолда $\mathcal{N}$, следовательно, $\mathcal{N}$ — хороший орбифолд.

Предположим теперь, что $\mathcal{N}$ — хороший орбифолд. Тогда существуют гладкое многообразие и гладкое накрывающее отображение $q : P \to \mathcal{N}$. Согласно Теореме 1.1. существует модельное слоение (M, F) для $\mathcal{N}$. Пусть, как и выше, $r : M \to \mathcal{N}$ — проекция.

Рассмотрим прообраз $\widehat{M} = r^*P$ накрытия $q : P \to \mathcal{N}$ при отображении r. Тогда $\widehat{M} := \{(z, v) \in M \times P \,|\, r(z) = k(v)\}$. Определим канонические проекции

$$\widehat{r} : \widehat{M} \to P : (z, v) \mapsto v$$

и

$$\widehat{q} : \widehat{M} \to M : (z, v) \mapsto z.$$

При этом выполняется равенство $k \circ \widehat{r} = r \circ \widehat{h}$. Используя это равенство нетрудно доказать, что $\widehat{M}$ — гладкое многообразие, а проекция $\widehat{q} : \widehat{M} \to M$ — гладкое накрывающее отображение. Кроме того, проекция $\widehat{r} : \widehat{M} \to P$ — субмерсия, а ее слои являются слоями индуцированного слоения $\widehat{F} := \widehat{q}^* F$.

Согласно определению модельного слоения, существует связность Эресмана $\mathfrak{M}$ для слоения (M, F). Прямая проверка показывает, что индуцированное распределение $\widehat{\mathfrak{M}} = \widehat{q}^*\mathfrak{M}$ на $\widehat{M}$ является связностью Эресмана для слоения $(\widehat{M}, \widehat{F})$. Как известно [6], связность Эресмана для слоения, образованного слоями субмерсии, является связностью Эресмана для этой субмерсии. Таким образом, индуцированное слоение $(\widehat{M}, \widehat{F})$ образовано слоями субмерсии со связностью Эресмана. Согласно Определению 1.3. слоение (M, F) накрыто расслоением и Теорема 1.3. доказана. $\square$

6. Применение к картановым орбифолдам

6.1. Картановы геометрии

Подробное изложение картановых геометрий можно найти в монографии Чапа и Словака [7].

Пусть $p\colon P \to N$ — главное расслоенное пространство со структурной группой H. Будем обозначать это расслоенное пространство через $P(N, H)$ и называть H-расслоением. Пусть $R\colon P \times H \to P$ — соответствующее правое свободное действие H на P. Обозначим через $\mathfrak{X}(P)$ модуль гладких векторных полей на многообразии P над алгеброй гладких функций $\mathfrak{F}(P)$. Будем рассматривать $\mathfrak{X}(P)$ как бесконечномерную алгебру Ли относительно скобки Ли векторных полей. Далее предполагается, что H — замкнутая подгруппа Ли группы Ли G, имеющей алгебру Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая подгруппе H. Пусть задана 1-форма $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, являющаяся невырожденной, т. е. $\omega_u\colon T_uP \to \mathfrak{g}$ — изоморфизм векторных пространств для любого $u \in P$. Тогда определено обратное линейное отображение $\zeta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, где $\zeta_B(u) := \omega_u^{-1}(B)$, $B \in \mathfrak{g}$.

Невырожденная 1-форма $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ называется *картановой связностью* в расслоении $P(T, H)$, если выполняются следующие условия:

(s$_1$) для любого $A \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство $\zeta_A = A^*$, где A^* — фундаментальное векторное поле на P, соответствующее элементу A;

(s$_2$) форма ω является H-эквивариантной, т. е. $R_a^*\omega = Ad_G(a^{-1})\omega$ для любого $a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Расслоение с картановой связностью будем обозначать через $\xi = (P(N,H),\omega)$ и называть картановым расслоением или *картановой геометрией типа* (G,H). Многообразие N, являющееся базой главного H-расслоения $p\colon P \to N$, на пространстве которого задана картанова связность $\omega \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})$, будем называть *картановым многообразием типа* (G,H), и обозначать через (N,ξ).

$\mathfrak{g}$-Значная 2-форма $\Omega := d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$ называется *формой кривизны* картановой связности ω. В случае, когда $\Omega = 0$, говорят, что (N,ξ) — картаново многообразие *нулевой кривизны*.

Пусть $\xi = (P(N,H),\omega)$ и $\xi' = (P'(N',H'),\omega')$ — два картановых расслоения, причем $H' = H$. *Изоморфизмом* ξ и ξ' называется диффеоморфизм $\Gamma\colon P \to P'$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $\Gamma^*\omega' = \omega$ и

2) $\Gamma \circ R_a = R'_a \circ \Gamma \ \ \forall a \in H$, где $R_a(u) := u \cdot a \ \ \forall u \in P$ и $R'_a(u') := u' \cdot a \ \ \forall u' \in P'$.

Из определения изоморфизма картановых расслоений $\Gamma\colon \xi \to \xi'$ следует, что определено отображение $\gamma\colon N \to N'$, удовлетворяющее равенству $\gamma \circ \pi = \pi' \circ \Gamma$, которое называется *проекцией* картанова изоморфизма Γ. Из определения вытекает, что проекция γ является диффеоморфизмом баз N и N'. Проекция γ называется *изоморфизмом картановых многообразий* (N,ξ) и (N',ξ').

Далее мы предполагаем, что все рассматриваемые картановы геометрии типа (G,H) являются *эффективными*, то есть, группа Ли G действует левыми сдвигами на однородном пространстве G/H эффективно.

6.2. Картановы слоения

Подробная информация о картановых слоениях содержится в [8] и [9].

Пусть T — n-мерное многообразие, причем связность его топологического пространства не предполагается. Пусть $\xi = (P(T,H),\omega)$ — картанова геометрия типа (G,H) с проекцией $p\colon P \to N$. Для любого открытого подмножества V в T индуцируется картанова структура $\xi_V = (P_V(V,H),\omega_V)$ того же типа, где $P_V := p^{-1}(V)$, а ω_V — сужение ω на P_V. Пусть M — гладкое n-мерное связное многообразие. (T,ξ)-*Коциклом* или (T,ξ)-*атласом* называется семейство $\{U_i, f_i, \ \{\Gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{U_i, i \in J\}$ — открытое покрытие многообразия M, а $f_i\colon U_i \to T$ — субмерсии со связными слоями;

2) если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $i,j \in J$, то определен изоморфизм γ_{ij} индуцировнных картановых геометрий $(f_j(U_i \cap U_j), \xi_{f_j(U_i\cap U_j)})$ и $(f_i(U_i \cap U_j), \xi_{f_i(U_i\cap U_j)})$ удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$.

Два (T,ξ)-атласа называются *эквивалентными,* если их объединение также является (T,ξ)-атласом. Класс эквивалентных (T,ξ)-атласов задает картаново слоение на многообразии следующим образом. Пусть Σ — множество слоев субмерсий f_i из класса эквивалентности $[\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j\in J}]$. Нетрудно проверить, что Σ — база некоторой топологии

τ в M. Компоненты линейной связности топологического пространства (M,τ) образуют разбиение $F := \{L_\alpha \,|\, \alpha \in \mathcal{J}\}$ многообразия M, называемое нами *картановым слоением типа* (G,H) *с трансверсальной картановой геометрией* ξ, а L_α — его слоями.

Говорят, что картаново слоение имеет *нулевую трансверсальную кривизну,* если его трансверсальная картанова геометрия ξ, имее нулевую кривизну.

6.3. Картановы орбифолды

Пусть $\mathcal{N}$ — гладкий n-мерный орбифолд с атласом $A = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \,|\, i \in J\}$. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа Ли, и $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H. Предположим, что над орбифолдом $\mathcal{N}$ задано главное H-расслоение, причем выполняются следующие условия:

1) в каждом главном H-расслоении $\pi_i\colon P_i \to \Omega_i$ задана картанова связность ω_i типа $(G.H)$;

2) h_i является антиизоморфизмом группы Γ_i в группу автоморфизмов картанова расслоения $\xi_i = (P_i(H,\Omega_i),\omega_i)$;

3) для инъекции карт $\psi_{ij}\colon \Omega_i \to \Omega_j$ определен изоморфизм соответствующих картановых геометрий $\bar{\psi}_{ij}\colon P_j|_{\psi_{ij}(\Omega_i)} \to P_i$ с проекцией ψ_{ij};

4) если $\Omega_i \subset \Omega_j$ и $\psi_{ij}\colon \Omega_i \to \Omega_j$ — включение, то $\bar{\psi}_{ij}$ — тождественное отображение.

Из определения картановой структуры на орбифолде и построения модельного слоения вытекает следующее утверждение.

Предложение 6.1. *Гладкий орбифолд* $\mathcal{N}$ *— картанов тогда и только тогда, когда любое его модельное слоение* (M,F) *— картаново.*

6.4. Доказательство Теоремы 1.4.

Пусть (M,F) — картаново слоение, заданное (N,ξ)-коциклом, где $\xi = (P(N,H),\omega)$ — картанова геометрия типа (G,H), причем кривизна картановой связности ω равна нулю. Как известно, в этом случае (N,ξ) локально изоморфно стандартной картановой геометрии $\xi^0 = (G(G/H,H),\omega_G)$, где ω_G — форма Маурера-Картана на группе Ли G. Следовательно, слоение (M,F) является трансверсально однородным или $(G,G/H)$-слоением. Кроме того, оно допускает связность Эресмана. Как доказано нами в ([10], Теорема 2), слоение (M,F) накрыто расслоением. Поэтому, согласно Теореме 1.3., орбифолд $\mathcal{N}$ — хороший.

Список литературы

1. I. Satake, “On a generalization of the notion of manifold”, *Proc. of the Nat. Ac. of Sciences*, **42**:6 (1956), 359–363.

2. W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

3. A. Adem, J. Leida, Y. Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge University Press, New York, 2007.

4. I. Moerdijk, D. Pronk, “Orbifolds, sheaves and groupoids”, *K-Theory*, **12**:12 (1997), 3–21.

5. А. В. Багаев, Н. И. Жукова, “Группы изометрий римановых орбифолдов”, *Сиб. Мат. Журнал*, **48**:4 (2007), 725–741.

6. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J*, **33**:4 (1984), 597–611.

7. A. Cap, J. Slovak, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, American Mathematical Society: Publishing House, 2009.

8. R. A. Blumenthal, “Cartan submersions and Cartan foliations”, *Illinois J. Math.*, **256** (1987), 327–343.

9. Н. И. Жукова, “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, **256** (2012), 115–147.

10. Н. И. Жукова, “Глобальные аттракторы полных конформных слоений”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 79—106.

Поступила 27.10.2017

MSC2010 53C12, 54H15, 57R18

Foliated models for orbifolds and their applications

© **N. I. Zhukova** [2]

Abstract. A foliated model is constructed for every orbifold. Such model is a foliation with the leaf space coinciding with the orbifold. The canonical projection onto the leaf space is a submersion in the category of orbifolds. We prove that the group of all diffeomorphisms of an orbifold is isomorphic to the group of basic automorphisms (in the category of foliations) of the constructed model foliation. In terms of the model foliations necessary and sufficient conditions are found for orbifold to be good. As the application we obtain that every orbifold admitting Cartan geometry of zero curvature is good.
Key Words: orbifold, foliation, Ehresmann connection for a foliation, Cartan geometry.

References

1. I. Satake, "On a generalization of the notion of manifold", *Proc. of the Nat. Ac. of Sciences*, **42**:6 (1956), 359–363.
2. W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
3. A. Adem, J. Leida, Y. Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge University Press, New York, 2007.
4. I. Moerdijk, D. Pronk"Orbifolds, sheaves and groupoids", *K-Theory*, **12**:12 (1997), 3–21.
5. A. V. Bagaev, N. I. Zhukova, "The isometry groups of Riemannian orbifolds", *Siberian Mathematical Journal*, **48**:4 (2007), 579–592.
6. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda"Ehresmann connections for foliations", *Indiana Univ. Math. J*, **33**:4 (1984), 597–611.
7. A. Cap, J. Slovak, *Parabolic Geometries I: Background and General Theory*, American Mathematical Society: Publishing House, 2009.
8. R. A. Blumenthal"Cartan submersions and Cartan foliations", *Illinois J. Math.*, **256** (1987), 327–343.
9. N. I. Zhukova"Minimal sets of Cartan foliations", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **256** (2007), 105–135.
10. N. I. Zhukova"Global attractors of complete conformal foliations", *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–406.

Submitted 27.10.2017

[2] **N.I. Zhukova**, professor of department of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, (25/12 Bolshaya Pecherskay Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), D.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4553-559X, nzhukova@hse.com