DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.23-32

УДК 517.9

Условия нелокальной разрешимости системы со свободными членами для случая положительных коэффициентов

© **М. В. Донцова** [1]

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами для случая положительных коэффициентов. Исследование разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента, который позволяет определить условия разрешимости задачи Коши в исходных координатах без привлечения теоремы об обратной функции. Доказано существование локального решения задачи Коши, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами для случая положительных коэффициентов опирается на оригинальные глобальные оценки.

Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка.

1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + (a(t)u(t,x) + b(t)v(t,x))\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c(t)u(t,x) + g(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ – неизвестные функции, f_1, f_2, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $g(t)$ – известные функции, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $g(t) > 0$, $\quad t \in [0,T]$.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Системы вида (1.1) встречаются в самых разных задачах из области естественных наук. Для исследования систем вида (1.1) применялись самые разнообразные подходы. В [1] содержится анализ разрешимости систем типа (1.1) на основе классического метода характеристик и с использованием понятия обобщенного решения.

[1] **Донцова Марина Владимировна**, старший преподаватель кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО "НГТУ им. Р. Е. Алексеева" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

В рамках классического метода характеристик исследование сводится к исследованию нелинейной системы интегральных уравнений, где присутствует суперпозиция неизвестных функций. После нахождения решения в характеристических переменных для получения решения исходной задачи (1.1), (1.2) требуется перейти от характеристических переменных к переменным (t,x). Последняя задача во многих случаях трудноразрешима, поэтому принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [1].

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [2-7]. В работе [2] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и указаны границы интервала разрешимости. В данной работе определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1) с помощью метода дополнительного аргумента.

2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.1), (1.2) расширенную характеристическую систему [2-7]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a(s)w_1(s,t,x) + b(s)w_3(s,t,x), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c(s)w_4(s,t,x) + g(s)w_2(s,t,x), \tag{2.2}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = f_1(s,\eta_1), \tag{2.3}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = f_2(s,\eta_2), \tag{2.4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{2.5}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{2.6}$$

Неизвестные функции η_i, w_j, $i=1,2$, $j=\overline{1,4}$ зависят не только t и x, но еще и от дополнительного аргумента s. Интегрируя уравнения (2.1)–(2.4) по аргументу s и учитывая условия (2.5), (2.6), получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu, \tag{2.7}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu, \tag{2.8}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s f_1(\nu,\eta_1)d\nu, \tag{2.9}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s f_2(\nu,\eta_2)d\nu, \tag{2.10}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{2.11}$$

Система (2.7)–(2.11) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s,t,x)=\varphi_1(x-\int_0^t(a(\nu)w_1+b(\nu)w_3)d\nu)+\int_0^s f_1(\nu,x-\int_\nu^t(a(\tau)w_1+b(\tau)w_3)d\tau)d\nu, \quad (2.12)$$

$$w_2(s,t,x)=\varphi_2(x-\int_0^t(c(\nu)w_4+g(\nu)w_2)d\nu)+\int_0^s f_2(\nu,x-\int_\nu^t(c(\tau)w_4+g(\tau)w_2)d\tau)d\nu, \quad (2.13)$$

$$w_3(s,t,x)=w_2(s,s,x-\int_s^t(a(\nu)w_1+b(\nu)w_3)d\nu), \quad (2.14)$$

$$w_4(s,t,x)=w_1(s,s,x-\int_s^t(c(\nu)w_4+g(\nu)w_2)d\nu). \quad (2.15)$$

Обозначим $\Gamma_T=\{(s,t,x)|\,0\le s\le t\le T,\ x\in(-\infty,+\infty),\ T>0\}$,

$$C_\varphi=\max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right|\,|i=1,2,\ l=\overline{0,2}\},\ C_f=\max\{\sup_{\Omega_T}|f_1|\,,\sup_{\Omega_T}|f_2|\,,\sup_{\Omega_T}|\partial_x f_1|\,,\sup_{\Omega_T}|\partial_x f_2|\},$$

$l=\max\{\sup\limits_{[0,T]}|a|,\ \sup\limits_{[0,T]}|b|,\ \sup\limits_{[0,T}|c|,\ \sup\limits_{[0,T]}|g|\}$, $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m=\overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_*\subset R^n, n=1,2....$, $C^2([0,T])$ – пространство функций, определенных, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка на отрезке $[0,T]$.

Для произвольной функции U введем норму $\|U\|=\sup\limits_{\Gamma_T}|U(s,t,x)|$ без указания в символе $\|\cdot\|$ области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1), (1.2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\bar{C}^2(R)$, $f_1,f_2\in\bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $a,b,c,g\in C^2([0,T])$, где $T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l})$, и выполняются условия*

$$a(t)>0,\ b(t)>0,\ c(t)>0,\ g(t)>0,\qquad t\in[0,T],$$

$$\varphi_1'(x)\ge 0,\ \varphi_2'(x)\ge 0 \text{ на } R,\quad \partial_x f_1\ge 0,\ \partial_x f_2\ge 0, \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l})$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u(t,x),v(t,x)\in\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).

Теорема следует из выполнения условий трех лемм.

Лемма 2.1. *Если функции w_j, $j=\overline{1,4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)–(2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции $u(t,x)=w_1(t,t,x)$, $v(t,x)=w_2(t,t,x)$ будут решением задачи Коши (1.1), (1.2) на Ω_{T_0}, $T_0\le T$, где T_0 – константа, определяемая через исходные данные.*

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [2-7].

Л е м м а 2.2. *При выполнении условий* $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1(t,x), f_2(t,x) \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $a, b, c, g \in C^2([0,T])$, $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $g(t) > 0$, $t \in [0,T]$ *и*

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}) \tag{2.16}$$

система интегральных уравнений (2.12)–(2.15) имеет единственное решение $w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15) зададим равенствами $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12)–(2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t (a(\tau)w_{1n} + b(\tau)w_{3n})d\tau)d\nu, \tag{2.17}$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t (c(\tau)w_{4n} + g(\tau)w_{2n})d\tau)d\nu, \tag{2.18}$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu), \tag{2.19}$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu). \tag{2.20}$$

Теперь при каждом n систему (2.17)–(2.20) решаем (доказываем существование решения) с помощью процесса последовательных приближений. Нулевое приближение (при каждом n) определим равенствами $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}$, $j = \overline{1,4}$. Для системы уравнений (2.17)–(2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t (a(\tau)w_{1n}^k + b(\tau)w_{3n}^k)d\tau)d\nu, \tag{2.21}$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t (c(\tau)w_{4n}^k + g(\tau)w_{2n}^k)d\tau)d\nu, \tag{2.22}$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t (a(\nu)w_{1n}^k + b(\nu)w_{3n}^k)d\nu), \tag{2.23}$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int\limits_s^t (c(\nu)w_{4n}^k + g(\nu)w_{2n}^k)d\nu). \tag{2.24}$$

Так же, как в [2], устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}) \tag{2.25}$$

последовательные приближения (2.21)–(2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17)–(2.20), для которого справедливы оценки $\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi$, $j = \overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.25) справедливы оценки

$$||w_{1nx}^{k+1}|| \le 4C_\varphi, ||w_{2nx}^{k+1}|| \le 4C_\varphi,\ ||w_{3nx}^{k+1}|| \le 8C_\varphi,\ ||w_{4nx}^{k+1}|| \le 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения w^k_{jnx}, $j=\overline{1,4}$ сходятся при $k\to\infty$, а значит, существуют производные w_{jnx}, $j=\overline{1,4}$ и справедливы оценки

$$\|\partial_x w_{1n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\|\le 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\|\le 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17)–(2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12)–(2.15), для которого справедливы оценки $\|w_j\|\le 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$.

При выполнении условия (2.16) $w_{jnx}\to w_{jx}=\partial_x w_j$, $j=\overline{1,4}$, где функции $\partial_x w_j$ являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_T. Справедливы оценки

$$\|\partial_x w_i\|\le 4C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\partial_x w_3\|\le 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\|\le 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что w_j, $j=\overline{1,4}$, имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$\begin{gathered} a(t)>0,\ b(t)>0,\ c(t)>0,\ g(t)>0,\qquad t\in[0,T],\\ \varphi_1'(x)\ge 0,\ \varphi_2'(x)\ge 0,\quad x\in R,\ \partial_x f_1\ge 0,\ \partial_x f_2\ge 0,\ (t,x)\in\Omega_T, \end{gathered}\tag{2.26}$$

решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\bar C^2(R)$, $f_1,f_2\in\bar C^{2,2}(\Omega_T)$, $a,b,c,g\in C^2([0,T])$, тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции w_j, $j=\overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений (2.12)–(2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial t}$, $j=\overline{1,4}$ на Γ_T, где $T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{4C_f},\frac{3}{40C_\varphi l})$.*

Доказательство.

Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.17)–(2.20) по x. Обозначим $\omega_j^n=w_{jnxx}$, $j=\overline{1,4}$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \omega_1^n(s,t,x)=-\varphi_1'(x-\int\limits_0^t(a(\nu)w_{1n}+b(\nu)w_{3n})d\nu)\int\limits_0^t(a(\nu)\omega_1^n+b(\nu)\omega_3^n)d\nu-\\ -\int\limits_0^s\partial_x f_1\int\limits_\nu^t(a(\tau)\omega_1^n+b(\tau)\omega_3^n)d\tau d\nu+G_1(s,t,x,w_{1n},w_{3n},w_{1nx},w_{3nx}), \end{gathered}\tag{2.27}$$

$$\begin{gathered} \omega_2^n(s,t,x)=-\varphi_2'(x-\int\limits_0^t(c(\nu)w_{4n}+g(\nu)w_{2n})d\nu)\int\limits_0^t(c(\nu)\omega_4^n+g(\nu)\omega_2^n)d\nu-\\ -\int\limits_0^s\partial_x f_2\int\limits_\nu^t(c(\tau)\omega_4^n+g(\tau)\omega_2^n)d\tau d\nu+G_2(s,t,x,w_{2n},w_{4n},w_{2nx},w_{4nx}), \end{gathered}\tag{2.28}$$

$$\omega_3^n(s,t,x)=\omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(a(\nu)w_{1nx}+b(\nu)w_{3nx})d\nu)^2-w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t(a(\nu)\omega_1^n+b(\nu)\omega_3^n)d\nu,\tag{2.29}$$

$$\omega_4^n(s,t,x)=\omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(c(\nu)w_{4nx}+g(\nu)w_{2nx})d\nu)^2-w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t(c(\nu)\omega_4^n+g(\nu)\omega_2^n)d\nu,\tag{2.30}$$

где $G_i, i=1,2,$ – известные функции.

При выполнении условия (2.16) с учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\|\le 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$, получаем $|\int\limits_s^t(a(\nu)w_{1n}+b(\nu)w_{3n})d\nu|\le 0,3$, $|\int\limits_s^t(c(\nu)w_{4n}+g(\nu)w_{2n})d\nu|\le 0,3$.

Зафиксируем точку $x_0 \in R^1$. Рассмотрим множество $\Omega_{x_0} = \{x \,| x_0 - 0.3 \le x \le x_0 + 0.3\}$. Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$.

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства: $|\eta_{1n}(s,t,x_1) - \eta_{1n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|$, $|\eta_{2n}(s,t,x_1) - \eta_{2n}(s,t,x_2)| \le |x_1 - x_2|$, где $\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int_s^t (a(\nu)w_{1n} + b(\nu)w_{3n})d\nu$, $\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int_s^t (c(\nu)w_{4n} + g(\nu)w_{2n})d\nu$.

Установлена равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x в выбранной, произвольной точке x_0, т.е. на R. Равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x используется для доказательства сходимости последовательных приближений ω_j^n, $j = \overline{1,4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'(x - \int_0^t (a(\nu)w_1 + b(\nu)w_3)d\nu) \int_0^t (a(\nu)\tilde{\omega}_1^n + b(\nu)\tilde{\omega}_3^n)d\nu -$$
$$- \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (a(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau d\nu + G_1(s,t,x,w_1,w_3,w_{1x},w_{3x}), \tag{2.31}$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'(x - \int_0^t (c(\nu)w_4 + g(\nu)w_2)d\nu) \int_0^t (c(\nu)\tilde{\omega}_4^n + g(\nu)\tilde{\omega}_2^n)d\nu -$$
$$- \int_0^s \partial_x f_2 \int_\nu^t (c(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau d\nu + G_2(s,t,x,w_2,w_4,w_{2x},w_{4x}), \tag{2.32}$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a(\nu)w_{1x} + b(\nu)w_{3x})d\nu)^2 - w_{2x} \int_s^t (a(\nu)\tilde{\omega}_1^n + b(\nu)\tilde{\omega}_3^n)d\nu, \tag{2.33}$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c(\nu)w_{4x} + g(\nu)w_{2x})d\nu)^2 - w_{1x} \int_s^t (c(\nu)\tilde{\omega}_4^n + g(\nu)\tilde{\omega}_2^n)d\nu, \tag{2.34}$$

где $G_i, i = 1,2,$ – известные функции. Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31)–(2.34) при каждом n имеет решение, причем $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1,4}$, справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \le 2C_\varphi, \ \|\tilde{\omega}_2\| \le 2C_\varphi, \ \|\tilde{\omega}_3\| \le 4C_\varphi, \ \|\tilde{\omega}_4\| \le 4C_\varphi.$$

Далее доказывается, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1,4}$, при $n \to \infty$.

Получаем, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = \overline{1,4}$, непрерывны и ограничены на Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = \overline{1,4}$ на Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

3. Существование нелокального решения

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $a,b,c,g \in C^2([0,T])$ и выполняются условия (2.26). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).*

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (1.1) по x. Обозначим $p(t,x) = \partial_x u(t,x)$, $q(t,x) = \partial_x v(t,x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + (a(t)u + b(t)v)\partial_x p = -a(t)p^2 - b(t)pq + \partial_x f_1, \\ \partial_t q + (c(t)u + g(t)v)\partial_x q = -g(t)q^2 - c(t)pq + \partial_x f_2, \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Добавим к системе уравнений (2.7)–(2.11) два уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a(s)\gamma_1^2(s,t,x) - b(s)\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \partial_x f_1(s,\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g(s)\gamma_2^2(s,t,x) - c(s)\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \partial_x f_2(s,\eta_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2). \tag{3.3}$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде

$$\begin{cases} \gamma_1\,(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-a(\nu)\gamma_1^2 - b(\nu)\gamma_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) + \partial_x f_1]d\nu, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g(\nu)\gamma_2^2 - c(\nu)\gamma_2\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \partial_x f_2]d\nu. \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогично тому, как это выполнено в [5-7] доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7)–(2.11) следуют оценки

$$\|w_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1,2.$$

Следовательно,

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{3.5}$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1\,(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2)\,d\nu) + \\ + \int\limits_0^s \partial_x f_1 \exp(-\int\limits_\tau^s (a(\nu)\gamma_1 + b(\nu)\gamma_2)\,d\nu)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (c(\nu)\gamma_1 + g(\nu)\gamma_2)\,d\nu) + \\ + \int\limits_0^s \partial_x f_2 \exp(-\int\limits_\tau^s (c(\nu)\gamma_1 + g(\nu)\gamma_2)\,d\nu)d\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

Из (3.6) при выполнении условий $a(t) > 0,\ b(t) > 0,\ c(t) > 0,\ g(t) > 0, \quad t \in [0,T]$, $\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0, \quad x \in R,\ \partial_x f_1 \geq 0,\ \partial_x f_2 \geq 0,\ (t,x) \in \Omega_T$ получаем, что $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \geqslant 0$, на Γ_T, значит, $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1,2$. Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ \|\partial_x v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{3.7}$$

Далее, так же, как в [5-7], выводится, что при всех t и x справедливы оценки

$$|\partial_{x^2}^2 u| \leq E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{3.8}$$

$$|\partial_{x^2}^2 v| \leq E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{3.9}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для u, v, $\partial_x u$, $\partial_x v$, $\partial^2_{x^2} u$, $\partial^2_{x^2} v$ ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Взяв в качестве начальных значений $u(T_0, x)$, $v(T_0, x)$, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, выбирая начальные значения $u(T_1, x)$, $v(T_1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x u\|$, $\|\partial_x v\|$, а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением $C_\varphi + TC_f$ на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения

$$u(T_k, x), v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R),\ |u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ |v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ |\partial_x v(T_k, x)| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8), (3.9), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Список литературы

1. Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука,, М., 1968, 592 с.

2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.

5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, 2013, № 3 (177), 190–201.

6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 115–124.

7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2014, № 2, 116–130.

Поступила 3.10.2017

MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

The nonlocal solvability conditions for a system with absolute terms for the case of positive coefficients

© **M. V. Dontsova** [2]

Abstract. The Cauchy problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with absolute terms for the case of positive coefficients is considered. The study of the Cauchy's problem solvability is based on the method of an additional argument, which allows to determine the solution in the original coordinates without involving the inverse function theorem. The existence of the Cauchy's problem local solution with smoothness not lower than the smoothness of the initial conditions, is proven. Paper determines sufficient conditions for the existence of the Cauchy's problem nonlocal solution continued by a finite number of steps from the local solution. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy's problem for a system of two quasilinear first order partial differential equations with absolute terms for the case of positive coefficients relies on global estimates.

Key Words: method of an additional argument, global estimates, Cauchy's problem, first-order partial differential equations.

References

1. B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniia k gazovoi dinamike [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 592 p.

2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations", *Doklady Mathematics*, **379**:1 (2001), 16—21 (In Russ.).

3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, "Method of an additional argument", *Vestnik KazNU. Series "Mathematics, mechanics, informatics". Spec. the issue*, 2006, № 1, 60—64 (In Russ.).

4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The investigation of a so lvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite.", *Matem. Vestnik pedagogical institutes and universities of the Volga-Vyatka region*, **14** (2012), 34—41 (In Russ.).

5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations", *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2013, № 3 (177), 190–201 (In Russ.).

6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis", *Journal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).

[2] **Marina V. Dontsova**, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Nizhniy Novgorod State Technical University (24 Minina Str., Nizhniy Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2915-0881, dontsowa.marina2011@yandex.ru

7. M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, 2014, № 2, 116–130 (In Russ.).

Submitted 3.10.2017