# Математика

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.12-22

*УДК 517.956.6*

## Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в прямоугольнике

© **С. З. Джамалов** [1]

**Аннотация.** Доказывается однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространствах Соболева $W_2^\ell(Q)$, ( $2 \le \ell$ - целое число)

**Ключевые слова:** уравнения смешанного типа второго рода второго порядка, нелокальная краевая задача с постоянными коэффициентами, единственность, существование и гладкость обобщенного решения, метод $\varepsilon$-регуляризации, метод Галеркина.

## 1. Введение и постановка задачи

В прямоугольнике $Q = (0, \ell) \times (0, T) = \{(x, t);\, 0 < x < \ell < +\infty; 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнения второго порядка

$$Lu = K(t)\, u_{tt} + \alpha\,(x, t)\, u_t - u_{xx} + c\,(x, t)\, u = f(x, t). \tag{1.1}$$

Пусть $K(0) \le 0 \le K(T)$, предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) – достаточно гладкие функции. Уравнение (1.1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(t)$ по переменной $t$ внутри области $Q$ не налагается никаких ограничений [3],[10].

**Нелокальная краевая задача.** Найти обобщенное решение уравнения (1.1) из пространства Соболева $W_2^l(Q)$, ( $2 \le l$ -целое число), удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\gamma \cdot u\,(x, 0) = u\,(x, T), \tag{1.2}$$

$$\eta \cdot D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=\ell}, \quad p = 0, 1, \tag{1.3}$$

где $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, $p = 0, 1$; $D_x^0 u = u$, $\gamma$ и $\eta$ – некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которых будут уточнены ниже. Различные другие нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода (1.1) изучены в работах [1], [4]-[8], [12], а для уравнения смешанного типа первого рода задача типа (1.2), (1.3) предложена и изучена в работе автора [6].

[1] **Джамалов Сирожиддин Зухриддинович**, доцент, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики Академии наук Узбекистана (100170, Узбекистан, г. Ташкент, ул. М.Улугбек, д. 81.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129; siroj63@mail.ru

В данной работе в случае, когда $K(0) \leq 0 \leq K(T)$, для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1.1) впервые изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3) в пространствах Соболева $W_2^{\ell}(Q)$, ( $2 \leq \ell$ – целое число).

## 2. Единственность решения задачи

**Т е о р е м а 2.1.** *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того, пусть* $2\alpha - K_t + \lambda K \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\ c - c_t \geq \delta_2 > 0$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln\gamma$, *причём* $\gamma \in (1,\infty)$, $\eta \in [1,\infty)$, $c(x,0) \leq c(x,T)$. *Тогда для любой функции* $f(x,t) \in L_2(Q)$, *если существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) в пространстве* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно и для функции* $f(x,t)$ *справедливо следующее неравенство*

$$\|u\|_1 \leq m\|f\|_0,$$

*где* $(,)_l$ *и* $\|\cdot\|_l$ *– соответственно обычное скалярное произведение и норма из пространства Соболева* $W\,_2^l(Q)$, *(* $2 \leq l$ *– целое число), а при* $l=0$, $W\,_2^0(\,Q\,) = L_2(\,Q\,)$ [3], [9]- [11].

Через $m$ здесь и далее обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства $W_2^2(Q)$, тогда для любой функции $u \in W_2^2(Q)$, интегрируя по частям и применяя неравенства Коши с $\sigma$ [11], легко получить следующее тождество

$$\int\limits_Q Lu\cdot\exp(-\lambda\,t-\mu\,x)\cdot u_t dxdt \;\geq\; \int\limits_Q \exp(-\lambda\,t-\mu\,x)\;\{(2a-K_t+\lambda\,K)\cdot u_t^2+\lambda\;u_x^2+$$
$$+(\lambda\,c-c_t)\cdot u^2\}\;dxdt+\int\limits_{\partial Q}\exp(-\lambda\,t-\mu\,x)\;\{K u_t^2\,\nu_t-2\cdot u_x\,u_t\,\nu_x+u_x^2\,\nu_t+c\cdot u^2\,\nu_t\}\;ds-$$
$$-\sigma\cdot\|u_x\|_0^2-\mu^2\cdot\sigma^{-1}\cdot\|u_t\|_0^2, \tag{2.4}$$

где $0 < \lambda = \frac{2}{T}\ln\gamma, \gamma \in (1,\infty)$, $0 \leq \mu = \frac{2}{\ell}\ln\eta, \eta \in [1,\infty)$, $\nu = (\nu_t = \cos(\nu,t); \nu_x = \cos(\nu,x))$ – единичный вектор внутренней нормали к границе $\partial Q$, $\sigma$ и $\sigma^{-1}-$ коэффициенты неравенства Коши с $\sigma$ [11]. Условия теоремы 2.1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области $Q$. Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2),(1.3), учитывая условия теоремы 2.1, получим, что граничные интегралы положительно определены , то есть

$$\int\limits_{\partial Q}\exp(-\lambda\,t-\mu\,x)\;\cdot\big\{K(t)u_t^2\,\nu_t-2\cdot u_x\,u_t\,\nu_x+u_x^2\,\nu_t+c\cdot u^2\,\nu_t\big\}\;ds \quad =$$
$$=\int\limits_0^{\ell}\exp(-\mu x)\cdot\{[K(T)e^{-\lambda T}\gamma^2-K(0)]\cdot u_t^2(x,0)+[e^{-\lambda T}\gamma^2-1]\cdot u_x^2(x,0)\}dx+$$
$$-2[\exp(-\mu\ell)\cdot\eta^2-1]\int\limits_0^T\exp(-\lambda t)\cdot u_x(0,t)u_t(0,t)dt+$$
$$+\int\limits_0^{\ell}\exp(-\mu x)\cdot\{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2-c(x,0)]\cdot u^2(x,0)dx\geq$$

$$\geq \int_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot[K(T)-K(0)]u_t^2(x,0)dx+ \\ +\int_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot\{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2-c(x,0)]\cdot u^2(x,0)dx\geq 0. \tag{2.5}$$

Учитывая вышесказанное, из неравенства (2.4),(2.5) получим следующее неравенство

$$\int_Q Lu\cdot\exp(-\lambda\, t-\mu\, x)\cdot u_t dxdt\ \geq\ \int_Q \exp(-\lambda\, t-\mu\, x)\ \{(2\alpha-K_t+\lambda K\,)\cdot u_t^2+\lambda\ u_x^2+ \\ +(\lambda\, c-c_t)\cdot u^2\}\ dxdt+\int_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot[K(T)e^{-\lambda T}\gamma^2-K(0)]u_t^2(x,0)dx+ \\ +\int_0^\ell \exp(-\mu x)\cdot\{[c(x,T)e^{-\lambda T}\gamma^2-c(x,0)]\cdot u^2(x,0)dx- \\ -\sigma\cdot\|u_x\|_0^2-\mu^2\cdot\sigma^{-1}\cdot\|u_t\|_0^2. \tag{2.6}$$

Выбирая коэффициенты $\lambda-\sigma\geq\lambda_0>0,\ \ \delta_1-\mu^2\sigma^{-1}>\delta_0>0$ и отбрасывая положительный граничный интеграл из неравенства (2.6) получим необходимую первую оценку

$$\|u\|_1\leq m\|f\|_0,$$

из которой следует единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из пространства $W_2^2(Q)$ [10], [11].

Тем самым доказана теорема 2.1.

## 3. Уравнения составного типа

Для доказательства существования решения задачи (1.1)-(1.3) используем метод $\varepsilon$-регуляризации в сочетании с методом Галеркина [3], [5]- [7].

Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения составного типа

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon+Lu_\varepsilon=f(x,t), \tag{3.7}$$

$$\gamma\cdot D_t^q u_\varepsilon|_{t=0}=D_t^q u_\varepsilon|_{t=T}\ ,\quad q=0,1,2, \tag{3.8}$$

$$\eta\cdot D_x^p u_\varepsilon|_{x=0}=D_x^p u_\varepsilon|_{x=\ell},\ \ p=0,1, \tag{3.9}$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ – оператор Лапласа в плоскости, $D_t^q u=\frac{\partial^q u}{\partial t^q}$, $q=0,1,2;$ $D_t^0 u=u,$ $\varepsilon$ – достаточно малое положительное число, $\eta,\ \gamma - const\ \neq 0$ такие, что $\gamma\in(1,\infty);\ \ \eta\in[1,\infty)$. Ниже используем уравнение составного типа (3.7) в качестве $\varepsilon$ – регуляризирующего уравнения для уравнения (1.1) [3], [5]- [7].

В дальнейшим через $W$ всюду ниже будем обозначать класс функций $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^2(Q)$, $\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\in L_2(Q)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (3.8),(3.9).

**Определение 3.1.** *Регулярным решением задачи (3.7)-(3.9) будем называть функцию $u_\varepsilon(x,t)\in W$, удовлетворяющую уравнению (3.7).*

**Т е о р е м а 3.1.** *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1.1), кроме того, пусть* $2\alpha - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\, c - c_t \geq \delta_2 > 0$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln\gamma$, *причем* $\gamma \in (1,\infty)$, $\eta \in [1,\infty)$, $\alpha(x,0) = \alpha(x,T), \alpha(0,t) = \alpha(\ell,t)$ $c(x,0) = c(x,T)$. *Тогда для любой функции* $f, f_t \in L_2(Q)$, *такой что* $\gamma \cdot f(x,0) = f(x,T)$ *существует единственное регулярное решение задачи (3.7)-(3.9) и для нее справедливы следующие оценки:*

$$1).\quad \varepsilon \cdot (\|u_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon tx}\|_0^2) + \|u_\varepsilon\|_1^2 \leq m\,\|f\|_0^2,$$

$$2).\quad \varepsilon \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon\right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq m\ \left[\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right]\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\phi_j(x,t)$ – собственные функции следующей задачи

$$-\Delta\phi_j = \frac{\partial^2\phi_j}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2\phi_j}{\partial^2 x} = \mu_j^2\phi_j; \tag{3.10}$$

$$D_t^p\phi_j|_{t=0} = D_t^p\phi_j|_{t=T}\ ,\qquad p = 0,1; \tag{3.11}$$

$$D_x^p\phi_j|_{x=0} = D_x^p\phi_j|_{x=\ell}. \tag{3.12}$$

Решая задачи (3.10)-(3.12) имеем $\phi_j(x,t) = T_j(t)\cdot X_j(x)$, где $\mu_j^2 = (\nu_j^2 + \tau_j^2)$; $\tau_j = \frac{2\pi j}{T}$, $\nu_j = \frac{2j\pi}{\ell}$; $j \in N_0 = N \cup \{0\}$, $N-$ множества натуральных чисел, собственные функции $T_j(t) = \{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\tau_j t, \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\tau_j t\}$, $X_j(x) = \{\frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\nu_j x, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\nu_j x\}$ являются решениями спектральное задачи Штурм-Лиувилля с периодическими условиями. Известно, что система собственных функций $\{\phi_j(x,t)\}$ фундаментальна в пространстве $W_2^2(Q)$ и в $L_2(Q)$ образует ортонормированный базис [2], [11].

Теперь с помощью этих последовательностей функций построим решение вспомогательной задачи

$$\ell\omega_j = e^{\frac{-(\lambda\cdot t + \mu\cdot x)}{2}}\frac{\partial\omega_j}{\partial t} = \phi_j, \tag{3.13}$$

$$\gamma\cdot\omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{3.14}$$

где $\gamma - const \quad \neq 0$ такое, что $\gamma \in (1,\infty)$. Очевидно, что задача (3.13),(3.14) однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\ell^{-1}\phi_j = \omega_j = e^{\frac{\mu\cdot x}{2}}\cdot[\int_0^t \exp(\frac{\lambda\tau}{2})\phi_j d\tau + \frac{1}{\gamma - 1}\int_0^T \exp(\frac{\lambda t}{2})\,\phi_j dt]. \tag{3.15}$$

Ясно, что функции $\omega_j(x,t)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum\limits_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$ для какого-нибудь последовательности $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ функций, то, действуя на эту сумму оператором $\ell$, имеем $\sum\limits_{j=1}^N c_j\ell\omega_j = \sum\limits_{j=1}^N c_j\phi_j = 0$, отсюда следует, что для всех $j = \overline{1,N}$ коэффициенты $c_j = 0$. Отметим, что из построения функции $\phi_j(x,t)$ вытекают следующие условия на функции $\omega_j(x,t)$

$$\gamma\cdot D_t^q\omega_j|_{t=0} = D_t^q\omega_j|_{t=T}\ ,\qquad q = 0,1,2, \tag{3.16}$$

$$\eta\cdot D_x^p\omega_j|_{x=-1} = D_x^p\omega_j|_{x=1},\quad p = 0,1. \tag{3.17}$$

Теперь приближенное решение задачи (3.7)-(3.9) ищем в виде $w = u_\varepsilon^N = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j \omega_j$, где коэффициенты $c_j$ для любого $j = \overline{1, N}$ определяются как решение линейной алгебраической системы

$$\int\limits_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \phi_j \, dxdt \ = \ \int\limits_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \phi_j \, dxdt. \tag{3.18}$$

Докажем однозначную разрешимость алгебраической системы (3.18). Умножая каждое уравнение из (3.18) на коэффициент $2c_j$ и суммируя по индексу $j$ от 1 до $N$, учитывая задачи (3.13),(3.14) из (3.18), получим следующее тождество

$$\int\limits_Q L_\varepsilon w \cdot e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \cdot \ w_t dxdt = \int\limits_Q f \cdot e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \cdot w_t dxdt, \tag{3.19}$$

Из которого, в силу условия теоремы 3.1, интегрированием тождества (3.19) получим для приближенного решения задачи (3.7)-(3.9) первой оценки, т.е.

$$\varepsilon \cdot (\left\|u_{\varepsilon tt}^N\right\|_0^2 + \left\|u_{\varepsilon tx}^N\right\|_0^2) + \left\|u_\varepsilon^N\right\|_1^2 \leq m \left\|f\right\|_0^2. \tag{3.20}$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (3.18). В частности, из оценки (3.20) получим существование слабого обобщенного решения задачи (3.7)-(3.9) [9]- [11].

Теперь докажем вторую априорную оценку.

Благодаря задаче (3.10)-(3.14), из тождества (3.18) получим

$$-\frac{1}{\mu_j^2} \int\limits_Q L_\varepsilon w \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell \omega_j \, dxdt \ = \ -\frac{1}{\mu_j^2} \int\limits_Q f \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \ell \omega_j \, dxdt, \tag{3.21}$$

где

$$\Delta \, \ell \, \omega_j = \exp \ \left[ \frac{-(\lambda \, t + \mu \, x)}{2} \right] \cdot (\Delta \, \omega_{j_t} - \lambda \, \omega_{j_{tt}} - \mu \, \omega_{j_{xx}} + \frac{\lambda^{\,2} + \mu^{\,2}}{4} \omega_{j_t}); \ \ \Delta \, \omega_j = \omega_{j_{tt}} + \omega_{j_{xx}} \, .$$

Умножая каждое уравнение из (3.21) на $2\mu_j^2 c_j$ и суммируя по индексу $j$ от 1 до $N$, учитывая условия (3.16),(3.17) из (3.21), получим следующее тождество

$$-2 \int\limits_Q L_\varepsilon w \ \cdot e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \, \ell \, w \, dxdt \ \ = \ -2 \int\limits_Q f \cdot \ e^{\frac{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)}{2}} \cdot \Delta \, \ell \, w \ dxdt \tag{3.22}$$

Интегрируя (3.22) с учетом условия теоремы 3.1 и краевых условий (3.16),(3.17), получим следующее неравенство

$$\begin{gathered}
m \cdot \ \left[ \left\|f_t\right\|_0^2 + \left\|f\right\|_0^2 \right] \geq \varepsilon \, \left\| \frac{\partial \, \Delta w}{\partial \ t} \right\|_0^2 + \int\limits_Q e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} \left\{ ( \, 2\alpha - |K_t| + \lambda \, K \, ) \, w_{\,tt}^{\,2} + \right. \\
\left. + (2\alpha - |K_t| + \lambda \, K \,) w_{\,tx}^{\,2} + \lambda \, w_{\,xx}^{\,2} + \lambda \, w_{\,tx}^{\,2} \right\} dxdt + \\
+ \int\limits_{\partial Q} e^{-(\lambda \cdot t + \mu \cdot x)} [(K \, w_{tt}^2 - 2\alpha \, w_t \, w_{tt} + w_{xx}^2 + 2w_{xx} \, w_{tt} - w_{xt}^2 + K w_{xt}^2 + \\
+ 2c \, w \, (w_{tt} + w_{xx}) \nu_t + (-2K \, w_{tt} \, w_{xt} - 2w_{tt} \, w_{xt} + 2\alpha \, w_t \, w_{xt}) \, \nu_x] ds - \sigma \, ( \ \left\|w_{xx}\right\|_0^2 + \left\|w_{xt}\right\|_0^2 ) - \\
- \mu^2 \sigma^{-1} \left\|u_{tt}\right\|_0^2 - m \, ( \, \left\|f\right\|_0^2 ) = \sum_{i=1}^{2} J_i,
\end{gathered} \tag{3.23}$$

где $J_1$ – интеграл по области, $J_2$ – интеграл по границе. Выбирая коэффициенты $\lambda-\sigma \geq \lambda_0 > 0$, $\delta_1 - \mu^2\sigma^{-1} > \delta_0 > 0$, учитывая условие теоремы 3.1 и краевые условия (3.16), (3.17) получим, что $J_1 > 0$ и $J_2 \geq 0$.

Теперь из неравенства (3.23) получим необходимую вторую оценку

$$\varepsilon \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon^N \right\|_0^2 + \left\| u_\varepsilon^N \right\|_2^2 \leq m \cdot \ \left[ \|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right] . \tag{3.24}$$

Следовательно, полученные оценки (3.20),(3.24) позволяют выполнить предельный переход по $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\left\{ u_\varepsilon^{N_k} \right\}$ сходится в силу единственности (теорема 2.1) в $L_2(Q)$ вместе с производными первого и второго порядка к искомому регулярному решению $u_\varepsilon(x,t)$ задачи (3.7)-(3.9), обладающему свойствами, указанными в теореме 3.1 [5]- [7], [9]- [12].

Для $u_\varepsilon(x,t)$ в силу (3.24) справедливо следующее неравенство

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_\varepsilon \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leq m \ \left[ \ \|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right] . \tag{3.25}$$

Тем самым доказана теорема 3.1.

## 4. Существования решения задачи

Теперь с помощью метода $\varepsilon$ – регуляризации докажем разрешимость задачи (1.1)-(1.3).

**Т е о р е м а 4.1.** *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства $W_2^2(Q)$ существует и единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3) из $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области уравнение (3.7) с краевыми условиями (3.8),(3.9) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 3.1, то существует единственное регулярное решение задачи (3.7)-(3.9) при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы первая и вторая оценка. Отсюда следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon\}, \varepsilon > 0$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций такую, что $\{u_{\varepsilon_i}\} \to u$ при $\varepsilon_i \to 0$. Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$.

В самом деле, последовательность $\{u_{\varepsilon_i}\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q)$ и так как последовательность $\{ \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} \}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, а оператор $L$ – линейный, то имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \Delta u_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{4.26}$$

Из равенства (4.26), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства $W_2^2(Q)$ [3], [5]- [7].

Таким образом, теорема 4.1 доказана.

## 5. Гладкость обобщенного решения

Теперь докажем более общий случай, когда $l \geq 3$. Всюду ниже для простоты предполагаем, что коэффициенты уравнения (1.1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

**Т е о р е м а 5.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1, кроме того, пусть*

$$2(\alpha+pK_t)-|K_t|+\lambda K\geq\delta>0,$$

$D_t^pK|_{t=0}=D_t^pK|_{t=T}$, $D_t^p\alpha|_{t=0}=D_t^p\alpha|_{t=T}$; $D_t^pc|_{t=0}=D_t^pc|_{t=T}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$, *такой что* $f\in W_2^p(Q)$, $D_t^{p+1}f\in L_2(Q)$, $\gamma D_t^pf|_{t=0}=D_t^pf|_{t=T}$, *существует, и притом единственное, обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3) из пространства* $W_2^{p+2}(Q)$, *где* $p=1,2,3,\ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из гладкости решения задачи (3.10)-(3.14) возникает следующее условие для приближенного решения задачи (3.7)-(3.9)

$w=u_\varepsilon^N\in C^\infty(Q)$;

$$\gamma\cdot D_t^qw|_{t=0}=D_t^qw|_{t=T}\ ,\qquad q=0,1,2,........$$

$$\eta\cdot D_x^pw|_{x=0}=D_x^pw|_{x=\ell},\quad p=0,1$$

Учитывая условия теоремы 2 при $\varepsilon>0$ и нелокальные условия при $t=0$, $t=T$, из равенства

$$(^{-\frac{\lambda t}{2}}\cdot L_\varepsilon u_\varepsilon)\,|_{t=0}^{t=T}=(-\varepsilon\cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_\varepsilon+e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot Lu_\varepsilon)\,|_{t=0}^{t=T}=(e^{\frac{-\lambda t}{2}}\cdot f(x,t))\,|_{t=0}^{t=T}$$

получим $\|\gamma\cdot u_{\varepsilon\,ttt}(x,0)-u_{\varepsilon\,ttt}(x,T)\|_0\leq const.$

Отсюда следует, что функция $v_\varepsilon(x,t)=u_{\varepsilon\ t}(x,t)$ принадлежит классу $W$ и удовлетворяет следующему уравнению

$$P_\varepsilon v_\varepsilon=L_\varepsilon v_\varepsilon=f_t-\alpha_t\,u_{\varepsilon\,t}-c_t\,u_\varepsilon=F_\varepsilon. \tag{5.27}$$

Из теоремы 4.1 следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(Q)$, то есть

$$\|F_\varepsilon\|_0\leq m\ \left[\ \|f\|_0^2+\|f_t\|_0^2\right]\ .$$

Далее из условий теоремы 4.1 легко получить, что оператор $P_\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1, отсюда на основании оценки (1),(2) теоремы 3.1 для функции $\{v_\varepsilon\}$ получим аналогичные оценки

$$\varepsilon\cdot(\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}v_\varepsilon\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}v_\varepsilon\right\|_0^2)+\|v_\varepsilon\|_1^2\leq m\,(\|f\|_0^2+\|f_t\|_0^2), \tag{5.28}$$

$$\varepsilon\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_\varepsilon\right\|_0^2+\|v_\varepsilon\|_2^2\leq m\ \left[\|f\|_1^2+\|f_{tt}\|_0^2\right]\ . \tag{5.29}$$

Далее, функция $\{u_\varepsilon\}$ удовлетворяет параболическому уравнению с условиями (1.2),(1.3)

$$Pu_\varepsilon=u_{\varepsilon\,t}-u_{\varepsilon\,xx}=f+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\,t}\Delta\,u_\varepsilon-K(t)u_{\varepsilon\ tt}-(\,\alpha\,-1)\,u_{\varepsilon\,t}-c\,u_\varepsilon=\quad\Phi_\varepsilon\ , \tag{5.30}$$

причем $\Phi_\varepsilon\in L_2(Q)$. В силу вышедоказанного, семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W_2^2(Q)$, то есть

$$\|\Phi_\varepsilon\|_0^2\leq m\left[\|f\|_1^2+\|f_{tt}\|_0^2\right]\leq m\,\|f\|_2^2\ . \tag{5.31}$$

Отсюда на основании априорных оценок для параболических уравнений [11] и неравенства (5.29) получим

$$\| u_\varepsilon\|_3^2 \leq m \, \|f\|_2^2 .$$

Далее аналогично доказываются неравенства [3], [5]- [7], [11]

$$\|u_\varepsilon\|_{p+2}^2 \leq m \, \|f\|_{p+1}^2 \ ,$$

где $p = 2, 3, ....$

Тем самым доказана теорема 5.1

## 6. Заключение

В данной работе в случае, когда $K(0) \leq 0 \leq K(T)$, для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (1.1) доказана однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи (1.2),(1.3) в пространствах Соболева $W_2^\ell(Q)$, ( $2 \leq \ell$ – целое число).

## Список литературы


1. Н. А. Алимов, “О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. В сб. Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения.”, 1983, 237–239.

2. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев,, 1965, 798 с.

3. В. Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.*, НГУ, Новосибирск., 1983, 84 с.

4. С. Н. Глазатов, “Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике”, *Сиб. мат. журн.*, **25**:6 (1985), 162–164.

5. С. З. Джамалов, “Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка”, *Узб.мат.журн.*, 2014, № 1, 5–14.

6. С. З. Джамалов, “Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения Трикоми”, *Узб.мат.журн.*, 2016, № 2, 51–60.

7. S. Z. Djamalov, “On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle”, *IIUM journal*, **17**:2 (2016), 95–104.

8. М. Г. Каратопраклиева, “Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа”, *Дифференциальные уравнения*, **27** (1991), 68–79.

9. А. И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*, НГУ, Новосибирск., 1990, 130 с.

10. А. Г. Кузьмин, *Неклассические уравнения смешенного типа и их приложения к газодинамике*, ЛГУ, Ленинград., 1990, 204 с.

11. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва., 1973, 407 с.

12. А. Н. Терехов, “Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа. В кн. Неклассические уравнения математической физики”, 1985, 148–158.

*Поступила 18.09.2017*

*MSC2010 35M10,35M20*

# The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the mixed-type equation of the second kind and of the second order in a rectangle

© **S. Z. Dzhamalov**[2]

**Abstract.** In the present work for the second order mixed-type equation of the second kind we study one-valued solvability and smoothness of the generalized solution of nonlocal boundary value problem with constant coefficients in Sobolev spaces.

**Key Words:** second order mixed type equation of the second kind, nonlocal boundary value problem with constant coefficients, uniqueness, existence and smoothness of generalized solution, Sobolev space, Galerkin method, " $\varepsilon$ -regularization"method.

## References

1. N. A. Alimov, "O nelokalnoe kraevoe zadache dlya odnogo neklassicheckogo uravneniea [On a nonlocal boundary value problem for a non-classical equation.In book The theory and methods for solving ill-posed problems and their applications]", 1983, 237–239 (In Russ).
2. Yu .M. Berezansky, *[Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators]*, Naukova dumka, M.Kyev, 1965 (In Russ), 798 c.
3. V .N. Vragov, *[Boundary problems for non-classical equations of mathematical physics]*, NGU, Novosibirsk, 1983 (In Russ), 84 c.
4. S. N. Glazatov, "[Nonlocal boundary problems for mixed type equations in a rectangle]", *Siberian Math. Journ*, **26**:6 (1985), 162–164 (In Russ).
5. S. Z. Dzhamalov, "[About one nonlocal boundary value problem for the equation of the mixed type of the second kind of the second order]", *Uzbek mathematical journal*, 2014, № 1, 5–14 (In Russ).
6. S. Z. Dzhamalov, "[The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the equation of Trikomi]", *Uzbek mathematical journal*, 2016, № 2, 51–60 (In Russ).
7. S. Z. Djamalov, "[On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]", *IIUM journal*, **17**:2 (2016), 95–104 (In Engl).
8. M. G. Karatopraklieva, "[A nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type]", *Differents. Uravneniy*, **27**:1 (1991), 68–79 (In Russ).
9. A. I. Kozhanov, *[Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order]*, NGU, Novosibirsk, 1990 (In Russ), 130 c.

[2] **Sirojiddin. Z. Dzhamalov** Associate Professor, Senior Researcher, Department of Differential Equations of Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences (81 M.Ulugbek str., Academgorodok, Tashkent, 100170, Uzbekistan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129; e-mail: siroj63@mail.ru

10. A. G. Kuzmin, *[Non-classical mixed type equations and their applications to the gas dynamics]*, LGU, Leningrad, 1990 (In Russ), 204 c.

11. O. A. Ladyjenskaya, *[Boundary problems of mathematical physics]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ), 407 c.

12. A. N. Terekhov, "[Nonlocal boundary problems for equations of variable type]", 1985, 148–158 (In Russ).

*Submitted 18.09.2017*