DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.24-30

УДК 519.854.3

О целых точках полиэдров двух типов

© **С. И. Веселов** [1]

Аннотация. В статье изучаются выпуклые оболочки целых точек полиэдров двух типов: выпуклых конусов, состоящих из решений однородных систем линейных неравенств с унимодулярными матрицами коэффициентов, и полиэдров, заданных системами неравенств с бимодулярными матрицами коэффициентов при неизвестных. Для полиэдров первого типа установлено, что их базис Гильберта состоит из остовных векторов конуса и имеет унимодулярную триангуляцию. Доказано также, что целочисленное расстояние от фасет выпуклой оболочки ненулевых целых точек этого конуса до его вершины равно 1. Отсюда выводится равенство единице ранга Хватала для полиэдров, полученных из конуса удалением его вершины. В классе полиэдров второго типа найдено ограничение на матрицу коэффициентов при неизвестных, при выполнении которого ранг Хватала равен единице.

Ключевые слова: базис Гильберта, унимодулярная триангуляция, выпуклая оболочка целых точек, фасеты целочисленного полиэдра, ранг Хватала.

1. Введение

Терминология этой статьи соответствует принятой в монографиях [1],[2].

Символ, обозначающий матрицу, будет обозначать также множество ее столбцов. A^T - транспонированная матрица.

Матрица $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ называется *унимодулярной*, если выполняется одно из условий:

1. $rank\, A = n$ и модуль любого базисного минора равен 1

2. $rank\, A = m$ и наибольший общий делитель базисных миноров равен 1.

Векторным произведением n - мерных векторов-столбцов $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ называется вектор $(\alpha_1, -\alpha_2, .., (-1)^{k-1}\alpha_k, ..., (-1)^{n-1}\alpha_n)^T$, где α_i - определитель матрицы, полученной из $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ удалением i - й строки.

$conv(M) = \{tm_1 + (1-t)m_2 |\, m_1, m_2 \in M,\, 0 \le t \le 1\}$ - *выпуклая оболочка* множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Гиперплоскость $a^T x = a_0$ называется *опорной* к выпуклому множеству M, если все его точки расположены по одну сторону от гиперплоскости и $M \cap \{x|\, a^T x = 1\} \ne \emptyset$. Последнее множество называется *гранью* M . Грань наибольшей размерности называется *фасетой.*

Выпуклым конусом называется множество векторов, замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на рациональное число. С каждым набором векторов $u_1, ..., u_m \in \mathbf{R}^n$ связана пара *двойственных* друг другу *полиэдральных* выпуклых конусов $(u_1, ..., u_m)^* = \{x \in \mathbb{R}^n |\, u_i^T x \ge 0\, i = 1, ..., m\}$ и $cone(u_1, ..., u_m) = \{t_1 u_1 + ... t_m u_m |\, t_i \ge 0, t_i \in \mathbb{R} (i = 1, ..., m)\}$. Векторы $u_1, ..., u_m$ называются *порождающими* для второго конуса. *Остовом* называется минимальное множество порождающих векторов. Конус называется *симплициальным,* если число векторов в остове равно размерности пространства.

[1] **Веселов Сергей Иванович**, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГБОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http:// orcid.org/0000-0003-2737-5876, sergey.veselov@itmm.unn.ru

Конус $cone\, U$, порожденный столбцами унимодулярной матрицы U, назовем *унимодулярным.*

Для выпуклого полиэдрального конуса $K \subset \mathbb{R}^n$ *полиэдром Клейна* называется $K_Z = conv(K \cap \mathbb{Z}^n \setminus 0)$ (см., например, [3],[4]). *Парусом* называется граница K_Z. *Приведенным парусом* называется объединение граней, не являющихся гранями для K.

Целочисленным расстоянием от точки y с целыми координатами до гиперплоскости, заданной уравнением $a^T x = a_0$ с несократимыми целыми коэффициентами и содержащей целую точку, называется величина $|a^T y - a_0|$. Целочисленное расстояние от точки до фасеты по определению равно расстоянию до гиперплоскости, содержащей фасету.

Базисом Гильберта конуса K называется минимальное порождающее множество аддитивной полугруппы $K \cap \mathbb{Z}^n$.

В [3] доказано, что базис Гильберта симплициального конуса в $\mathbb{R}^3$ состоит из всех целых точек, принадлежащих его приведенному парусу тогда и только тогда, когда целочисленное расстояние от вершины конуса до каждой фасеты приведенного паруса равно 1.

В [4] доказано, что если базис Гильберта симплициального конуса в $\mathbb{R}^4$ состоит из всех целых точек, принадлежащих его приведенному парусу, то равно 1 целочисленное расстояние от вершины конуса до каждой фасеты приведенного паруса, а обратное, вообще говоря, неверно. Там же показано, что в $\mathbb{R}^5$ предложение верно не для каждого конуса.

В [5] показано что Гильбертов базис конуса, порожденного векторами

$$a_1 = (1,0,0,0)^T, a_2 = (0,1,0,0)^T, a_3 = (0,0,1,0)^T, a_4 = (1,3,4,7)^T,$$

состоит из векторов

$$a_1, a_2, a_3, a_4, (1,1,1,1)^T, (1,1,2,2)^T, (1,3,3,5)^T, (1,3,4,6)^T$$

и не имеет унимодулярной триангуляции.

В настоящей статье для конуса K двойственного к унимодулярному доказано, что его базис Гильберта имеет унимодулярную триангуляцию, является остовом и целочисленное расстояние от вершины конуса до любой фасеты приведенного паруса полиэдра K_Z равно 1.

Пусть P - полиэдр, $P_Z = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$, $c \in \mathbb{Z}^n$ и гиперплоскость $c^T x = c'$, не содержащая точек из P_Z, является опорной к полиэдру P. Неравенство $c^T x \leq \lfloor c' \rfloor$ называется *правильным отсечением* или *отсечением Гомори-Хватала.*

Округлением полиэдра P называется его подмножество P', состоящее из точек, удовлетворяющих каждому правильному отсечению для P. Полагаем по определению $P^{(1)} = P'$, $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$ $(k \geq 2)$.

Минимальное k, при котором $P^{(k)} = P_Z$ называется *рангом Хватала* полиэдра P. Максимум среди рангов Хватала полиэдров $\{x: \; Ax \geq b\}$, при всевозможных b называется рангом Хватала матрицы A.

Ранг Хватала является важной характеристикой неявно заданных целых полиэдров, т.е. выпуклых оболочек точек с целыми координатами, содержащихся внутри других полиэдров, заданных известными системами линейных неравенств. Изучению ранга Хватала посвящены, например, статьи [6],[7],[8],[9], [10]. Цель исследований в этом направлении - вычисление или получение верхних и нижних оценок ранга Хватала для полиэдров специального вида.

В настоящей статье описан подкласс класса бимодулярных матриц, для которых ранг Хватала равен 1.

2. Свойства конуса двойственного к унимодулярному

Пусть $U \in \mathbb{Z}^{n\times m}$ - унимодулярная матрица, каждый столбец которой принадлежит остову конуса $cone\,U$. Отметим, что U^* не обязательно унимодулярен. Например, при $n \geq 4$ не является унимодулярным конус

$$\{(x_1, x_2...., x_n)^T \in R^n |\ x_i \geq 0,\ -x_i + x_n \geq 0,\ i = 1, 2, .., n-1\},$$

поскольку остов этого конуса состоит из всех векторов множества $\{0,1\}^n$, у которых первая координата равна 1 и определитель матрицы из векторов

$$(1, 0, 0, .., 0)^T, (1, 0, 1, 1, .., 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1, ..1, 1)^T, ..., (1, 1, 1, 1, ..1, 0)^T$$

равен $(-1)^n(n-2)$.

Хорошо известно, что остов конуса U^* можно выбрать среди векторных произведений столбцов матрицы U. Обозначим остов символом V. Нетрудно видеть, что $U^T v \in \{0,1\}^m$ для всякого $v \in V$.

Т е о р е м а 2.1. *V имеет унимодулярную триангуляцию и является базисом Гильберта конуса U^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in V$ и $F_1, F_2, ..., F_s$ - полный список фасет, не содержащих v. Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$U^* = \bigcup_i cone(F_i, v).$$

Рассмотрим произвольный вектор $h \in U^*_Z$. Найдется i такое, что $h \in cone(F_i, v)$. Предположим, что фасета F_i содержится в гиперплоскости $u^T x = 0$, где u столбец матрицы U. Так как $u^T v = 1$, то Z^n покрывается семейством гиперплоскостей $F_i, F_i \pm v, F_i \pm 2v.....$. Таким образом, $h = kv + h'$, где k некоторое положительное целое число и $h' \in F_i$. Далее можно воспользоваться индукцией по размерности.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $P(U) = conv\{x \in \mathbb{Z}^n |\ U^T x \geq 0, U^T x \neq 0\}$ и гиперплоскость $\pi^T x = \pi_0$ содержит фасету f полиэдра M. Так как линейная форма $\pi^T x$ ограничена снизу на $P(U)$, то, согласно теореме Минковского-Фаркаша, $\pi^T x \geq 0$, следовательно, $\pi_0 \geq 0$. Если $\pi_0 = 0$, то f является также фасетой U^*, поэтому определяется одним из неравенств системы $Ux \geq 0$. Если $\pi_0 > 0$, то можно поделить неравенство на π_0, поэтому считаем, что f принадлежит гиперплоскости $\pi^T x \geq 1$.

Т е о р е м а 2.2. *Если $\pi^T x = 1$ опорная плоскость некоторой фасеты для $P(U)$, то существует $U' \subseteq U$ такое, что $\pi = \sum_{u \in U'} u$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $rank\,U = m$. Хорошо известно, что существует унимодулярная матрица $T \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ такая, что $UT = (E_m|O)$, где $O \in \mathbb{Z}^{m\times(n-m)}$ матрица из нулей, а у матрицы $E_m \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ равны нулю все элементы, кроме единиц на главной диагонали. Если $m = n$, то $UT = E_m$, т.е. $T = U^{-1}$. Формула $x = Ty$ устанавливает изоморфизм между $P(U)$ и $P(E_m)$. Обозначим символом $\mathbf{1_m}$ строку из m единиц. Очевидно, что $\mathbf{1_m}(E_m|O)y = 1$ опорная плоскость единственной фасеты для $P(E)$, следовательно, $\mathbf{1_m}(E|O)T^{-1}x = \mathbf{1_m}Ux = 1$ опорная плоскость единственной фасеты для $P(U)$, т.е. $U' = U$.

Случай 2. $rank\, U = n < m$. Пусть u произвольный столбец в U, $V \subseteq vert(P(U))$ подмножество из n линейно независимых вершин, принадлежащих $\pi^T x = 1$. Очевидно, что существует непустое подмножество $V_u \subset V$ вершин, принадлежащих плоскости $u^T x = 1$. Из этого следует, что $min\{\pi^T x |\, u^T x \geq 1, U^T x \geq 0\} = 1$. Согласно теореме двойственности линейного программирования, имеем $max\{t_u |\, \pi = \sum_{w\in U} t_w w,\, t_w \geq 0 (w \in U)\} = 1$.

Таким образом, $\pi = u + \sum_{w\in W} t_w w,\, t_w > 0 (w \in W)$, где $W \subseteq U$.

Пусть U_1 множество всех столбцов матрицы U, которые удовлетворяют системе $V_u^T y = 0$, и пусть $U_2 = U \setminus U_1$. Очевидно, что $W \subseteq U_1$.

Положим $\pi' = \pi - u$ и рассмотрим полиэдр

$$F = conv\{x |\, u^T x = 0, U_1^T x \geq 0, U_1^T x \neq 0\}_Z.$$

Покажем, что неравенство $\pi'^T x \geq 1$ верно для F.

Обозначим символом e_l вектор, у которого l – я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. В силу унимодулярности матрицы U справедливо равенство

$$min\{\pi'^T x |\, u^T x = 0,\, U^T x \geq 0,\, U^T x \neq 0\} = min\{\pi'^T x |\, u^T x = 0,\, U^T x \geq e_l\}$$

Предположим, что существует $x' \in F \cap \mathbb{Z}^n$ такой, что $\pi'^T x' < 1$. Тогда в задаче линейного программирования

$$min\{\pi'^T x |\, u^T x = 0,\, U^T x \geq e_l\}$$

оптимальная базисная подматрица содержит хотя бы один столбец u' из матрицы U_2, причем в разложение вектора π' по базисным столбцам столбец u' входит с положительным коэффициентом. Теперь из равенства $V_u^T \pi' = 0$ выводим $V_u^T u' = 0$, т.е. $u' \in U_1$ - противоречие.

Поскольку $rank\, U_1 \leq n - rank\, V_u$, то размерность линейного подпространства, содержащего F, также не превышает $n - rank\, V_u$ и мы получили проблему аналогичную исходной, т.е. требуется доказать сформулированное в условии теоремы свойство для плоскости $\pi' x = 1$, которая является опорной для фасеты в пространстве меньшей размерности.

Теперь можно воспользоваться индукцией по размерности, так как при $n = 1$ утверждение очевидно.

Доказательство закончено.

Подмножество столбцов U' матрицы U назовем *нуль-системой*, если системе ограничений $U^T x \geq 0,\, (\sum_{u\in U'} u)^T x = 0$ удовлетворяет только нулевой вектор. Нуль-система называется *неприводимой*, если ее любое собственное подмножество не является нуль-системой. Семейство всех неприводимых нуль-систем для U обозначим $\mathbf{U}$

Следствие 2.1. *P(U) задается системой неравенств*

$$Ux \geq 0$$
$$(\sum_{u\in U'} u)^T x \geq 1, \quad (U' \in \mathbf{U})$$

3. Ранг Хватала бимодулярных матриц

Матрица $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ называется бимодулярной, если модули ее базисных миноров не превышают 2. Полиэдр $P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, Ax \geq b\}$ называется бимодулярным.

Обозначим символом $vert(P)$ множество вершин полиэдра P, а символом $P(v)$ - полиэдр, ограниченный лишь теми фасетами полиэдра P, которые содержат вершину $v \in vert(P)$.

Пусть $rank\, A = n$ и $\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, b - \mathbf{1}_m \leq Ax \leq b\}$. Следующий результат получен в работе [11].

Теорема 3.1. [11]

1. *Если* $dim P = n$, *то* $P \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$.
2. $vert(conv(P \cap \mathbb{Z}^n)) = \bigcup\limits_{v \in vert(P)} vert(conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n))$.
3. $vert(conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)) \subseteq vert(conv(\bar{P}(v) \cap \mathbb{Z}^n))$.

Таким образом, *бимодулярный* полиэдр P распадается на *угловые* бимодулярные полиэдры $P(v)$, $(v \in vert(P))$, так, что любая вершина и любая фасета полиэдра P является вершиной и фасетой по крайней мере в одном из угловых полиэдров. Кроме того, в теореме установлено, что вершины полиэдров $conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)$ расположены на лучах, выходящих из точки v.

Очевидно, что ранг Хватала полиэдра P равен максимальному из рангов Хватала угловых полиэдров и равен нулю в случае унимодулярной матрицы коэффициентов системы неравенств, поскольку в этом случае $P(v) = conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)$.

Рассмотрим бимодулярный угловой полиэдр $P(v) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, Ax \geq Av \in \mathbb{Z}^m\}$, у которого базисные миноры матрицы A равны ± 2 и $v \notin \mathbb{Z}^n$. Пусть B любая базисная подматрица в A, так что матрица $U = AB^{-1}$ унимодулярна.

Рассмотрим полиэдры $P(U) = conv\{y \in \mathbb{Z}^n | Uy \geq 0, \, Uy \neq 0\}$ и $F = conv\{y \in \mathbb{Z}^n | Uy \geq 0, \, 2B^{-1}y \equiv 1 \, mod \, 2\}$. Очевидно, что $vert\, F \subseteq vert\, P(U)$ и в случае равенства этих множеств F и $P(U)$ изоморфны, следовательно, изоморфны $P(U)$ и $conv(P(A, b) \cap \mathbb{Z}^n)$. Таким образом из теоремы 2.2. вытекает следующее предложение.

Предложение 3.1. *Пусть* $U \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ *унимодулярная матрица,* $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}, det\, B = 2$, $A = UB$. *Если* $2B^{-1}v \equiv 1 \, mod \, 2$ *для всякого* $v \in vert(P(U))$, *то*

1) ранг Хватала полиэдра $P(A, b)$ *равен 1,*

2) $conv(P(A, b) \cap \mathbb{Z}^n)$ *описывается системой неравенств*

$$Ax \geq b,$$

$$\frac{1}{2}\alpha A \geq \lceil \frac{1}{2}\alpha b \rceil, \, \forall \alpha \in \{t \in \{0, 1\}^m | \, tA \equiv 0 \, mod \, 2.\}$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01336).

Список литературы

1. А. Схрейвер, *Теория линейного и целочисленного программирования, т.2*, Мир, М., 1991, 342 с.

2. В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация*, Наука, М., 1981, 344 с.

3. Ж., О. Муссафир, “Паруса и базисы Гильберта”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:2 (2000), 43–49.

4. О. Н. Герман, “Паруса и базисы Гильберта”, *Труды МИАН*, **239** (2002), 98–105.

5. C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg, “Systeme generateurs minimal, diviseurs essentiels et G-desingularizations de varietes toriques”, *Tohoku Math. J.*, **47**:1 (1995), 125–149.

6. J. Edmonds, “Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices”, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, **69**:1 (1965), 125–130.

7. V. Chvatal, “Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems”, *Discrete Mathematics*, **4**:4 (1973), 305–337.

8. W. Cook W., C.R. Coullard, G. Turan, “On the complexity of cutting-plane proofs”, *Discrete Applied Mathematics*, **18**:1 (1987), 25–38.

9. M. Rhodes, “On the Chvatal rank of the Pigeonhole Principle”, *Theoretical Computer Science*, **410**:27-29 (2009), 2774–2778.

10. F. Eisenbrand, A.S. Schulz, “Bounds on the chvatal rank of polytopes in the 0/1-cube”, *Combinatorica*, **23**:2 (2003), 245–261.

11. S. I. Veselov, A, J. Chirkov, “Integer program with bimodular matrix”, *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

Поступила 18.10.2017

MSC2010 90C10

On integer points in two polyhedra

© **S. I. Veselov** [2]

Abstract. In the article we study the convex hulls of integer points in polyhedra of two types. The first type is convex cone consisting of solutions of homogeneous systems of linear inequalities with unimodular matrices of coefficients. The second type includes polyhedra defined by systems of inequalities with bimodular matrices of coefficients at unknowns. For the polyhedra of the first type it is established that the Hilbert basis consists of the spanning vectors of the cone and has a unimodular triangulation. It is also proved that the integer distance from the convex hull facet of the nonzero integer points of the cone to the cone vertex is 1. This means that for polyhedra obtained from the cone by removing its vertex the Chvatal rank is equal to 1. In the class of polyhedra of the second type such restriction on the coefficient matrix was foundthat its implementation makes Chvatal rank equal to one.
Key Words: Hilbert basis, unimodular triangulation, the convex hull of integer points, facets of integer polyhedron, Chvatal rank.

[2] **Sergey I. Veselov**, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-2737-5876, sergey.veselov@itmm.unn.ru

References

1. A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming, V.2.*, Mir Publ., Moscow., 1991 (In Russ.), 342 c.

2. V.A Emelichev, M.M. Kovalev, M.K. Kravtsov, *Polyhedra, Graphs, and Optimization*, Nauka Publ., Moscow., 1981 (In Russ.), 344 c.

3. J. Moussafir, "Sails and Hilbert Bases", *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **34**:2 (2000), 43–49 (In Russ.).

4. O. N. German, "Sails and Hilbert Bases", *Tr. Mat. Inst. Steklova, 239*, **239** (2002), 98–105 (In Russ.).

5. C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg, "Systeme generateurs minimal, diviseurs essentiels et G-desingularizations de varietes toriques", *Tohoku Math. J.*, **46** (1994), 125–149.

6. J. Edmonds, "Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices", *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, **69**:1 (1965), 125–130.

7. V. Chvatal, "Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems", *Discrete Mathematics*, **306** (2006), 886–904.

8. W. Cook W., C.R. Coullard, G. Turan, "On the complexity of cutting-plane proofs", *Discrete Applied Mathematics*, **18** (1987), 25–38.

9. M. Rhodes, "On the Chvatal rank of the Pigeonhole Principle", *Theoretical Computer Science*, **410**:2 (2009), 2774–2778.

10. F. Eisenbrand, A.S. Schulz, "Bounds on the chvatal rank of polytopes in the 0/1-cube", *Combinatorica*, **23**:2 (2003), 245–261.

11. S. I. Veselov, A, J. Chirkov, "Integer program with bimodular matrix", *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

Submitted 18.10.2017