Математика

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.11-23

УДК 517.9

Идентификация краевых условий на одном из концов отрезка

© **А. М. Ахтямов** [1], **Р. Ю. Галимов** [2] **А. В. Муфтахов** [3]

Аннотация. Рассматривается краевая задача на отрезке для дифференциального уравнения четвертого порядка. Краевые условия на одном из концов отрезка известны, а на другом неизвестны. Известны собственные значения краевой задачи. Требуется по собственным значениям спектральной задачи восстановить неизвестные краевые условия на одном из концов отрезка. В работе доказано четыре теоремы. Первые две теоремы являются алгебраическими. В них показано, что матрица может быть восстановлена с точностью до линейных преобразований строк по своим минорам максимального порядка. При этом для миноров должны выполняться условия согласования, которые называются соотношениями Плюккера. В двух других теоремах на основе первых двух теорем доказывается двойственность восстановления краевых условий. Третья теорема посвящена идентификации краевых условий по всему спектру собственных значений, а четвертая — идентификации краевых условий по конечному числу собственных значений. Показано, что для идентификации краевых условий достаточно использования четырех собственных значений. Приведены примеры решения задачи идентификации краевых условий.

Ключевые слова: краевые условия, обратная задача, собственные значения, дифференциальное уравнение четвертого порядка, соотношения Плюккера.

1. Введение

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$y^{(4)}(x) = \lambda\, y(x) = s^4\, y(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

порядка 4 и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{4} a_{jk}\, y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

[1] **Ахтямов Азамат Мухтарович**, профессор кафедры математического моделирования, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет (450074, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), главный научный сотрудник, лаборатория механики твердого тела, Институт механики Уфимского НЦ РАН (450054, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, Проспект Октября, 71), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2080-6648, akhtyamovam@mail.ru

[2] **Галимов Рустам Юмадилович**, аспирант кафедры математического моделирования, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет (450074, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0772-184X, GalimovRY@mail.ru

[3] **Муфтахов Артур Вильевич**, лектор кафедры математики Инженерного академического колледжа им. Сами Шамуна (77245, Израиль, г. Ашдод, ул. Жаботински, д. 84), Ph.D., ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6557-7201, muftahov@yahoo.com

$$U_3(y) = y(1) = 0, \quad U_4(y) = y'(1) = 1. \tag{1.3}$$

Матрицу из коэффициентов краевых условий (1.2) обозначим через A:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|. \tag{1.4}$$

Через A_{ij} будем обозначать миноры матрицы A, составленные из ее i-го и j-го столбцов:

$$A_{ij} = \left| \begin{matrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{matrix} \right|.$$

Везде далее будем предполагать, что ранг матрицы A равен двум:

$$\operatorname{rank} A = 2.$$

Настоящая статья посвящена восстановлению краевых условий (1.2) по собственным значениям задачи (1.1)–(1.3). Близкие обратные задачи рассматривались в [1-17]. Так, в работах [1, 2] обсуждались задачи идентификации пружинно-массовых систем с конечным числом степеней свободы по собственным частотам их колебаний. В теории обратных спектральных задач [3-5] восстанавливались как коэффициенты дифференциального уравнения, так и краевых условий. В качестве данных для восстановления краевых условий использовались, как правило, не один только спектр или его часть (как в предлагаемой вниманию статье), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля или так называемые весовые числа). К тому же, основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях. В [1], [2], [6-11] восстанавливалась часть коэффициентов краевых условий или условий сопряжения. Первые систематические исследования по идентификации краевых условий начал в 90-х годах 20 века З.Б. Оганисян [12-14]. З. Б. Оганесяном исследовались несколько задач идентификации условий закрепления распределенных механических систем: задача идентификации краевых условий на обоих концах стержня [13], задача идентификации краевых условий круговой пластины [12], задача идентификации краевых условий прямоугольной пластины [14]. Однако, им восстанавливались лишь коэффициенты канонических условий закрепления. Случай, когда неизвестен вид канонических условий (т.е., когда неизвестны все коэффициенты краевых условий), им рассмотрен не был.

В [15-17] изучалась идентификация краевых условий, в которых неизвестны все их коэффиценты. Подобные задачи впервые начали изучаться авторами данной статьи и сводятся к идентификации (с точностью до линейных преобразованиий строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. В [15-17] восстанавливалась не сама общая матрица краевых условий, а матрица, про которую заранее известно, что некоторые ее элементы равны нулю (например, элементы a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{24} для матрицы (1.4)). К тому же, все эти работы имели преимущественно прикладной характер. Основной целью этих работ было восстановление видов закреплений стержней, пластин и трубопроводов по их звучанию или же создание таких закреплений, которые бы обеспечивали нужный (безопасный) спектр частот колебаний.

Цели настоящей статьи носят более фундаментальный характер. Первая цель — доказательство теорем восстановления общих краевых условий (необязательно имеющих механический смысл). Вторая цель — демонстрация связи задач алгебры и анализа, а именно задач восстановления краевых условий по собственным значениям и задач идентификации матриц по ее минорам.

2. Двойственность восстановления краевых условий по всем собственным значениям задачи

Далее будет показана двойственность восстановления краевых условий (1.2) по всем собственным значениям задачи (1.1)–(1.3). Доказательство опирается на теорему Адамара о целых функциях, из которой следует, в частности, что если две целые функции порядка меньше единицы имеют одинаковые нули, то они отличаются лишь ненулевым множителем. Отсюда будет вытекать, что существуют только два набора миноров, которые отличаются лишь ненулевым множителем, не зависящим от индексов. Для каждого из этих двух наборов миноров с точностью до линейных преобразований строк существует только одна матрица, имеющая такой набор миноров. Последнее доказывается с помощью теоремы 2.1, приводимой ниже.

Теорема 2.1. [18] *Пусть ранг у матриц A, $\widetilde{A}$ размера $(2{\times}4)$, максимальный, то есть* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью невырожденного линейного преобразования строк;

2) миноры максимального порядка матриц A, $\widetilde{A}$ совпадают с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов.

Интересно, что не любой набор чисел A_{ij}, $1 \le i < j \le 4$, является набором миноров второго порядка некоторой матрицы A размера (2×4) и ранга 2. Для этого необходимо выполнение так называемого соотношения Плюккера.

Теорема 2.2. [18] *(соотношение Плюккера) Для того, чтобы набор чисел A_{ij}, $1 \le i < j \le 4$, не все из которых равны нулю, являлся набором миноров второго порядка некоторой матрицы A размера (2×4) и ранга 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующее соотношение, называемое соотношением Плюккера:*

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим наряду с краевыми условиями (1.2) также и краевые условия

$$\widetilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^{4} \widetilde{a}_{jk}\, y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{2.2}$$

Соответствующую матрицу коэффициентов краевых условий (2.2) обозначим через $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} \end{Vmatrix}. \tag{2.3}$$

Через $\widetilde{A}_{ij}$ будем обозначать миноры матрицы $\widetilde{A}$, составленные из ее i-го и j-го столбцов:

$$\widetilde{A}_{ij} = \begin{vmatrix} \widetilde{a}_{1i} & \widetilde{a}_{1j} \\ \widetilde{a}_{2i} & \widetilde{a}_{2j} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим также и краевые условия

$$\widetilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^{4} \widetilde{b}_{jk}\, y^{(k-1)}(0) = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Соответствующую матрицу коэффициентов краевых условий (2.4) обозначим через $\widetilde{B}$:

$$\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} & \widetilde{b}_{13} & \widetilde{b}_{14} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} & \widetilde{b}_{23} & \widetilde{b}_{24} \end{array} \right\|. \tag{2.5}$$

Через $\widetilde{B}_{ij}$ будем обозначать миноры матрицы $\widetilde{B}$, составленные из ее i-го и j-го столбцов:

$$\widetilde{B}_{ij} = \left| \begin{array}{cc} \widetilde{b}_{1i} & \widetilde{b}_{1j} \\ \widetilde{b}_{2i} & \widetilde{b}_{2j} \end{array} \right|.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. *Краевые условия (2.2) и (2.4), а также их матрицы (2.3) и (2.5) будем называть смежными друг другу, если существует такое число $k \neq 0$, что*

$$\begin{array}{c} \widetilde{A}_{12} = k\widetilde{B}_{12}, \quad \widetilde{A}_{13} = k\widetilde{B}_{13}, \quad \widetilde{A}_{24} = k\widetilde{B}_{24}, \quad \widetilde{A}_{34} = k\widetilde{B}_{34}, \\ \widetilde{A}_{14} = k\widetilde{B}_{23}, \quad \widetilde{A}_{23} = k\widetilde{B}_{14}. \end{array} \tag{2.6}$$

Т е о р е м а 2.3. (о двойственности решения) . *Пусть собственные значения краевых задач (1.1)–(1.3) и (1.1), (2.2), (1.3) совпадают: $\lambda_k = \widetilde{\lambda}_k$, а также выполнено условие $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$. Тогда либо краевые условия (1.2) совпадают с краевыми условиями (2.2), т.е. матрицы A и $\widetilde{A}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо краевые условия (1.2) совпадают со смежными краевыми условиями (2.4), т.е. матрицы A и $\widetilde{B}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк при условии, что для $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ выполняются условия (2.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Спектральная задача (1.1)–(1.3) имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) = \left| \begin{array}{cccc} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{array} \right| = \\ = \left| \begin{array}{cccc} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & y_3'(1) & y_4'(1) \end{array} \right|, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{array}{c} y_1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(s\,x) + \cos(s\,x)\right), \quad y_2 = \frac{1}{2\,s}\left(\operatorname{sh}(s\,x) + \sin(s\,x)\right), \\ y_3 = \frac{1}{2\,s^2}\left(\operatorname{ch}(s\,x) - \cos(s\,x)\right), \quad y_4 = \frac{1}{2\,s^3}\left(\operatorname{sh}(s\,x) - \sin(s\,x)\right) \end{array}$$

есть линейно независимые решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{array} \right. \qquad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Обозначим через A_1 и Z матрицы следующего вида:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$Z = \begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1'''(0) & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1) \\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2'''(0) & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1) \\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_3'''(0) & y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1) \\ y_4(0) & y_4'(0) & y_4''(0) & y_4'''(0) & y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1) \end{Vmatrix},$$

где

$$y_1(1) = \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(s) + \cos(s)\big), \qquad y_1'(1) = \tfrac{1}{2}\, s\big(\operatorname{sh}(s) - \sin(s)\big),$$

$$y_1''(1) = \tfrac{1}{2}\, s^2\big(\operatorname{ch}(s) - \cos(s)\big), \quad y_1'''(1) = \tfrac{1}{2}\, s^3\big(\operatorname{sh}(s) + \sin(s)\big),$$

$$y_2(1) = \tfrac{1}{2\,s}\big(\operatorname{sh}(s) + \sin(s)\big), \qquad y_2'(1) = \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(s) + \cos(s)\big),$$

$$y_2''(1) = \tfrac{1}{2}\, s\big(\operatorname{sh}(s) - \sin(s)\big), \qquad y_2'''(1) = \tfrac{1}{2}\, s^2\big(\operatorname{sh}(s) - \cos(s)\big),$$

$$y_3(1) = \tfrac{1}{2\,s^2}\big(\operatorname{sh}(s) - \cos(s)\big), \quad y_3'(1) = \tfrac{1}{2\,s}\big(\operatorname{sh}(s) + \sin(s)\big),$$

$$y_3''(1) = \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(s) + \cos(s)\big), \qquad y_3'''(1) = \tfrac{1}{2}\, s\big(\operatorname{sh}(s) - \sin(s)\big),$$

$$y_4(1) = \tfrac{1}{2\,s^3}\big(\operatorname{sh}(s) - \sin(s)\big), \quad y_4'(1) = \tfrac{1}{2\,s^2}\big(\operatorname{ch}(s) - \cos(s)\big),$$

$$y_4''(1) = \tfrac{1}{2\,s}\big(\operatorname{sh}(s) + \sin(s)\big), \qquad y_4'''(1) = \tfrac{1}{2}\big(\operatorname{ch}(s) + \cos(s)\big).$$

С помощью матриц A_1 и Z определитель (2.7) можно представить следующим образом

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A_1 \cdot Z^T).$$

Разложив последний определитель с помощью формулы Бине-Коши [19], получим

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le 4} M_{i_1,i_2,i_3,i_4}\, Z_{i_1,i_2,i_3,i_4}(\lambda) = 0. \tag{2.8}$$

Здесь через M_{i_1,i_2,i_3,i_4} обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, i_3-го, i_4-го столбцов матрицы A_1 соответственно, а через Z_{i_1,i_2,i_3,i_4} обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, i_3-го, i_4-го столбцов матрицы Z, или что то же самое, строк транспонированной матрицы Z^T.

С помощью миноров A_{ij} определитель (2.8) запишется в следующей форме:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} A_{i_1,i_2}\, S_{i_1,i_2}(\lambda), \tag{2.9}$$

где функции $S_{i_1,i_2}(\lambda)$ от λ (от s) при $\lambda \neq 0$ имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
&S_{12}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s^4}\,\big(1 - \operatorname{ch}(s)\,\cos(s)\big),\\
&S_{13}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s^3}\,\big(\operatorname{sh}(s)\,\cos(s) - \operatorname{ch}(s)\,\sin(s)\big),\\
&S_{14}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s^2}\,\operatorname{sh}(s)\,\sin(s),\\
&S_{23}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s^2}\,\operatorname{sh}(s)\,\sin(s),\\
&S_{24}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s}\,\big(-\operatorname{sh}(s)\,\cos(s) - \operatorname{ch}(s)\,\sin(s)\big),\\
&S_{34}(\lambda) = \tfrac{1}{2\,s}\,\big(1 + \operatorname{ch}(s)\,\cos(s)\big).
\end{aligned}
$$

Собственные значения задачи (1.1)–(1.3) являются корнями характеристического уравнения, которое имеет вид (2.9), причем алгебраическая кратность собственного значения совпадает с кратностью корня функции $\Delta(\lambda)$ [3].

Аналогично, собственные значения задачи (1.1),(2.2),(1.3) являются корнями

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{1\le i_1<i_2\le 4} \widetilde{A}_{i_1,i_2}\, S_{i_1,i_2}(\lambda). \tag{2.10}$$

Для определителя $\Delta(\lambda)$ имеют место следующие две возможности [3]:

1) $\Delta(\lambda)\equiv 0$, тогда каждое число λ есть собственное значение;

2) $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$, тогда существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек.

Первый случай для задачи (1.1)–(1.3) невозможен. Это следует из представления характеристического определителя (2.9). Из (2.9) следует также, что задача (1.1)–(1.3) не может иметь конечное число собственных значений.

Из вида функций $S_{i_1,i_2}(\lambda)$ в разложении (2.9) следует, что $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/4$. Поэтому из теоремы Адамара о представлении целой функции с помощью своих корней следует, что

$$\Delta(\lambda)\equiv C\,\widetilde{\Delta}(\lambda),$$

где C — некоторая ненулевая константа. Отсюда, а также из (2.9) и (2.10) получаем

$$\sum_{1\le i_1<i_2\le 4}\Big(A_{i_1,i_2} - C\,\widetilde{A}_{i_1,i_2}\Big)\, S_{i_1,i_2}(\lambda)\equiv 0. \tag{2.11}$$

Нетрудно заметить, что пять функций $S_{12}(\lambda)$, $S_{13}(\lambda)$, $S_{14}(\lambda)=S_{23}(\lambda)$, $S_{24}(\lambda)$ и $S_{34}(\lambda)$ из разложения (2.9) являются линейно независимыми. Отсюда и из (2.11) следует, что

$$
\begin{gathered}
A_{12} = C\,\widetilde{A}_{12},\quad A_{13} = C\,\widetilde{A}_{13},\quad A_{14}+A_{23} = C\,(\widetilde{A}_{14}+\widetilde{A}_{23}),\\
A_{24} = C\,\widetilde{A}_{24},\quad A_{34} = C\,\widetilde{A}_{34}.
\end{gathered} \tag{2.12}
$$

Для нахождения миноров A_{14} и A_{23} воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того, чтобы числа A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34} были минорами матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Плюккера (см. теорему 2.2):

$$A_{12}\,A_{34} - A_{13}\,A_{24} + A_{14}\,A_{23} = 0, \tag{2.13}$$

$$\widetilde{A}_{12}\,\widetilde{A}_{34} - \widetilde{A}_{13}\,\widetilde{A}_{24} + \widetilde{A}_{14}\,\widetilde{A}_{23} = 0. \tag{2.14}$$

Из (2.12), (2.13) и (2.14) получаем два набора равенств

$$
\begin{gathered}
A_{12} = C\,\widetilde{A}_{12},\quad A_{13} = C\,\widetilde{A}_{13},\quad A_{24} = C\,\widetilde{A}_{24},\quad A_{34} = C\,\widetilde{A}_{34},\\
A_{14} = C\,\widetilde{A}_{14},\quad A_{23} = C\,\widetilde{A}_{23}.
\end{gathered} \tag{2.15}
$$

$$
\begin{gathered}
A_{12} = C\,\widetilde{A}_{12}, \quad A_{13} = C\,\widetilde{A}_{13}, \quad A_{24} = C\,\widetilde{A}_{24}, \quad A_{34} = C\,\widetilde{A}_{34}, \\
A_{14} = C\,\widetilde{A}_{23}, \quad A_{23} = C\,\widetilde{A}_{14}.
\end{gathered} \tag{2.16}
$$

Откуда либо краевые условия (1.2) совпадают с краевыми условиями (2.2), т.е. матрицы A и $\widetilde{A}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо краевые условия (1.2) совпадают со смежными краевыми условиями (2.4), т.е. матрицы A и $\widetilde{B}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк при условии, что для $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ выполняются условия (2.6).

Выпишем матрицы $\widetilde{A}$ и смежную ей $\widetilde{B}$ по минорам A в явном виде.

1) Если $A_{12} \neq 0$, то мы можем получить матрицу $\widetilde{A}$ в виде

$$
\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} \\ 0 & 1 & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} \end{array} \right\|.
$$

Тогда $\widetilde{A}_{12} = 1$ и согласно формуле (2.15) получаем $C = \frac{1}{A_{12}}$. Отсюда $\widetilde{a}_{13} = -\widetilde{A}_{23} = -\frac{A_{23}}{A_{12}}$, $\widetilde{a}_{14} = -\widetilde{A}_{24} = -\frac{A_{24}}{A_{12}}$, $\widetilde{a}_{23} = \widetilde{A}_{13} = \frac{A_{13}}{A_{12}}$, $\widetilde{a}_{24} = \widetilde{A}_{14} = \frac{A_{14}}{A_{12}}$.

То есть

$$
\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{A_{23}}{A_{12}} & -\frac{A_{24}}{A_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{A_{13}}{A_{12}} & \frac{A_{14}}{A_{12}} \end{array} \right\|.
$$

Но так как мы ищем матрицу $\widetilde{A}$ с точностью до невырожденного линейного преобразования строк, то, умножив обе строки этой матрицы на ненулевой множитель A_{12}, имеем

$$
\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{12} & 0 & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array} \right\|.
$$

А поменяв местами A_{14} и A_{23}, найдем смежную матрицу

$$
\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{12} & 0 & -A_{14} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{array} \right\|.
$$

Непосредственными вычислениями получим, что

$$
\begin{gathered}
\widetilde{A}_{12} = A_{12}\,A_{12}, \quad \widetilde{A}_{13} = A_{12}\,A_{13}, \quad \widetilde{A}_{24} = A_{12}\,A_{24}, \quad \widetilde{A}_{34} = A_{12}\,A_{34}, \\
\widetilde{A}_{14} = A_{12}\,A_{14}, \quad \widetilde{A}_{23} = A_{12}\,A_{23},
\end{gathered}
$$

а также

$$
\begin{gathered}
\widetilde{B}_{12} = A_{12}\,A_{12}, \quad \widetilde{B}_{13} = A_{12}\,A_{13}, \quad \widetilde{B}_{24} = A_{12}\,A_{24}, \quad \widetilde{B}_{34} = A_{12}\,A_{34}, \\
\widetilde{B}_{14} = A_{12}\,A_{23}, \quad \widetilde{B}_{23} = A_{12}\,A_{14}.
\end{gathered}
$$

Это соответствует формулам (2.15),(2.16), если вместо первого множителя A_{12} подставить $\frac{1}{C}$.

Остальные случаи записываются аналогично.

2) Если $A_{13} \neq 0$, то

$$
\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array} \right\|, \quad \widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{14} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{array} \right\|.
$$

3) Если $A_{24} \neq 0$, то

$$
\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{array} \right\|, \quad \widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{14} & A_{24} \end{array} \right\|.
$$

4) Если $A_{34} \neq 0$, то

$$
\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \end{array} \right\|, \quad \widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} & 0 & A_{34} \end{array} \right\|.
$$

5) Если $A_{14} \neq 0$, то
$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array} \right\|$, $\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{14} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{14} & A_{24} \end{array} \right\|$.
6) Если $A_{23} \neq 0$, то
$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{array} \right\|$, $\widetilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{array} \right\|$.

3. Двойственность восстановления краевых условий по четырем собственным значениям задачи

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $\operatorname{rank} A = 2$, *четыре собственных значения* λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ *задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяют условию* $\operatorname{rank} F = 4$, *где*

$$F = \|S_{12}(\lambda_j), S_{13}(\lambda_j), S_{24}(\lambda_j), S_{34}(\lambda_j), S_{14}(\lambda_j)\|_{j=1,2,3,4},$$

тогда задача идентификации краевых условий по этим четырем собственным значениям имеет два решения. Причем миноры матрицы A *находятся по следующим формулам*

$$\begin{gathered} A_{12} = F_{2345}, \\ A_{13} = -F_{1345}, \\ A_{24} = F_{1245}, \\ A_{34} = -F_{1235}, \\ A_{14} = \tfrac{1}{2}(F_{1234} \mp \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}}), \\ A_{23} = \tfrac{1}{2}(F_{1234} \pm \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}}), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где F_{ijkl} *– миноры матрицы* F *, составленные из ее* i*-го,* j*-го,* k*-го и* l*-го столбцов; а соответствующие матрицы* A *находятся с помощью этих миноров по следующим формулам:*

1) если $A_{12} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{12} & 0 & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14}; \end{array} \right\|$;

2) если $A_{13} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14}; \end{array} \right\|$;

3) если $A_{24} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24}; \end{array} \right\|$;

4) если $A_{34} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34}; \end{array} \right\|$;

5) если $A_{14} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14}; \end{array} \right\|$;

6) если $A_{23} \neq 0$, *то* $A = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24}; \end{array} \right\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Четыре собственных значения λ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ задачи L являются корнями функции (2.11). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda_j) = A_{12}\, S_{12}(\lambda_j) + A_{13}\, S_{13}(\lambda_j) + A_{24}\, S_{24}(\lambda_j) + \\ + A_{34}\, S_{34}(\lambda_j) + (A_{14} + A_{23})\, S_{14}(\lambda_j) = 0. \end{gathered}$$

Эта система имеет единственное с точностью до ненулевого множителя решение:

$$\begin{gathered} A_{12} = F_{2345}t, \quad A_{13} = -F_{1345}t, \quad A_{24} = F_{1245}t, \\ A_{34} = -F_{1235}t, \quad (A_{14} + A_{23}) = F_{1234}t. \end{gathered}$$

Пусть $A_{23} = c$, тогда

$$\begin{gathered} A_{12} = F_{2345}\,t, \quad A_{13} = -F_{1345}\,t, \quad A_{24} = F_{1245}\,t, \\ A_{34} = -F_{1235}\,t \quad A_{14} = F_{1234}\,t - c. \quad A_{23} = c \end{gathered} \tag{3.2}$$

Из соотношений Плюккера имеем

$$0 = A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = -F_{2345}F_{1235}t^2 + F_{1345}F_{1245}t^2 + F_{1234}t \cdot c - c^2.$$

Решая квадратное уравнение относительно неизвестной c, имеем

$$c = \frac{1}{2}(F_5 \pm \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}})t.$$

Подставив полученное c, а также $t = 1$ в (3.2), получим (3.1). Отсюда и из представлений для матриц $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ (см. выше) следует утверждение теоремы.

Пример 3.1. *Рассмотрим спектральную задачу (1.1)–(1.3). Пусть четыре ее собственных значения равны* $\lambda_1 = 1,997223$, $\lambda_2 = 5,147641$, $\lambda_3 = 8,211375$, $\lambda_4 = 11,29144$. *Имеем*

$$F = \left\| \begin{array}{ccccc} 0,08019321 & -0,3082798 & -0,4807437 & -0,2759807 & 0,4127170 \\ -0,02511372 & 0,4188344 & 4,0533856 & 18,63372 & -1,471618 \\ 0,07095227 & -2,139469 & -65,81141 & -321,5744 & 12,79132 \\ -0,3592985 & 17,36832 & 1179,806 & 5841,537 & -150,3001 \end{array} \right\|.$$

Т.к. $\operatorname{rank} \mathrm{F} = 4$, *то мы можем применить теорему 4 и найти матрицу* A. *Вычислим согласно теореме 4 миноры матрицы* F:

$$\begin{gathered} F_{2345} = -416,6869, \quad F_{1345} = -83,33738, \quad F_{1245} = -138,8956, \\ F_{1235} = -27,77913, \quad F_{1234} = 3,3179\,10^{-10}. \end{gathered}$$

Т.к. $F_{2345} \neq 0$, *то с точностью до линейных преобразований имеем*

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0,0000010 & -0,3333333 \\ 0 & 1 & -0,2000000 & 0,0000010 \end{array} \right\|.$$

Второе решение совпадает с первым. Если считать, что $0,0000010 \approx 0$ *и* $0,3333333 \approx \frac{1}{3}$, *то искомые краевые условия (1.2), (1.3) имеют вид:*

$$y'''(0) - 3\,y(0) = 0, \quad y''(0) - 5\,y'(0) = 0.$$

Физический смысл этих условий — упругое закрепление с вертикальной и вращательной пружинами (см. второе упругое закрепление [20], *с. 153).*

Заметим, что в [17] восстанавливалась матрица краевых условий вида

$$A_0 = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{array} \right\|,$$

т.е. заранее предполагалось, что заранее известно равенство нулю определителей A_{14} и A_{23}. Было показано, что в этом случае матрица A_0 восстанавливается однозначно по трем собственным значениям $\lambda_1 = 1,997223$, $\lambda_2 = 5,147641$, $\lambda_3 = 8,211375$.

Пример 3.2. *Пусть четыре собственных значения спектральной задачи (1.1)–(1.3). равны* $\lambda_1 = 2,119313$ *,* $\lambda_2 = 4,918095$ *,* $\lambda_3 = 7,988934$ *,* $\lambda_4 = 11,09140$ *. Имеем*

$$F = \left\| \begin{array}{ccccc} 0,07935780 & -0,3016374 & -0,3454111 & -0,6009212 & 0,3897136 \\ -0,01108129 & 0,3400282 & 5,385060 & 7,483029 & -1,383472 \\ 0,02446689 & -1,6268584 & -79,00599 & -98,66302 & 11,44314 \\ -0,1036594 & 13,11523 & 1330,458 & 1569.751 & -132,7102 \end{array} \right\|.$$

Т.к. $\operatorname{rank} \mathrm{F} = 4$ *, то мы можем применить теорему 4 и найти матрицу* A *. Вычислим согласно теореме 4 миноры матрицы* F *:*

$$F_{2345} = 25,00860, \quad F_{1345} = -50,01719, \quad F_{1245} = -25,00860,$$
$$F_{1235} = 25,00860, \quad F_{1234} = 50,01719.$$

Т.к. $F_{2345} \neq 0$ *, то с точностью до линейных преобразований имеем*

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right\|.$$

Второе решение не совпадает с первым. В данном примере задача отыскания краевых условий (1.2), (1.3) имеет два решения:

$$y(0) + y''(0) + y'''(0) = 0, \quad y'(0) + 2\,y''(0) + 3\,y'''(0) = 0$$

или

$$y(0) + y''(0) - 3\,y'''(0) = 0, \quad y'(0) + 2\,y''(0) - y'''(0) = 0.$$

Список литературы

1. Г. М. Л. Гладвелл, *Обратные задачи теории колебаний*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерныхиисследований, М.; Ижевск, 2008, 608 с.

2. M. T. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, University Press, Oxford, 2005, 000 с.

3. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 526 с.

4. В. А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 332 с.

5. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, М., 1984, 240 с.

6. А. О. Ватульян, *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*, Физматлит, М., 2007, 224 с.

7. А. О. Ватульян, А. В. Осипов, “Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке.”, *Дефектоскопия*, 2014, № 11, 37-47.

8. E. I. Shifrin, R. Ruotolo, “Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks.”, *Journal of Sound and Vibration*, **222**:3 (1999), 409–423.

9. E. I. Shifrin, "Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **70–71** (2016), 613–624.

10. М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов, "Диагностика повреждений консольной балки с надрезом", *Дефектоскопия.*, **6** (2009), 83–89.

11. М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов, "Диагностика закрепления и повреждений балки на упругих опорах", *Контроль. Дефектоскопия.*, **9** (2010), 57–63.

12. В. Ц. Гнуни, З. Б. Оганисян, "Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний", *Известия НАН РА, серия «Механика».*, **44**:5 (1991), 9–16.

13. З. Б. Оганисян, "Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний", *«Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем» (научные труды конференции), Ереван*, 1997, 159–162.

14. З. Б. Оганисян, "Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний", *Ученные записки ЕГУ.*, 1991, № 1, 45–50.

15. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, "Identification of boundary conditions using natural frequencies", *Inverse Problems in Science and Engineering.*, **12**:4 (2004), 393–408.

16. А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов, "Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем", *Сибирский журнал индустриальной математики.*, **25**:4(52) (2012), 24–37.

17. А. А. Аитбаева, А. М. Ахтямов, "Об однозначности определения вида краевых условий на одном из концов стержня по трем собственным частотам его колебаний", *Прикладная математика и механика.*, **80**:3 (2016), 388–394.

18. A. V. Mouftakhov, "On the Reconstruction of the Matrix from its Minors", *arXiv:math/0603657*, 2006.

19. П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1982, 272 с.

20. *Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина*, Машиностроение, М., 1978, 352 с.

Поступила 5.10.2017

MSC2010 34B09, 34A55

Identification of boundary conditions at one of the ends of a segment

© **A. M. Akhtyamov** [4], **R. Y. Galimov**[5], **A. V. Mouftakhov**[6]

Abstract. We consider a boundary value problem on an interval for a fourth-order differential equation. The boundary conditions at one end of the segment are known, but at the other end of the segment they are unknown. The eigenvalues of the boundary value problem are known as well. The problem is to reconstruct the unknown boundary conditions at one of the ends of the segment. Four theorems are proved in the paper. The first two theorems are algebraic. They show that the matrix can be reconstructed accurate within linear transformations of rows with respect to its minors of maximal order. In this case, the matching conditions (so called Plucker relations) must be satisfied for the minors. In two other theorems, on the basis of the first two theorems, we prove the duality of the reconstruction of boundary conditions. The third theorem is devoted to the identification of boundary conditions by the entire spectrum of eigenvalues, and the fourth is to identify boundary conditions with respect to a finite number of eigenvalues. It is shown that it is sufficient to use four eigenvalues to identify the boundary conditions. Examples of the identification problem's solution are given.

Key Words: boundary conditions, inverse problem, eigenvalues, differential equation of the fourth order, Plucker relations

References

1. G. M. L. Gradwell, *Obratnye zadachi teorii kolebanij [Inverse Problems in Vibration]*, NIC Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, Institut komp'yuternyh iissledovanij, M.; Ishevsk, 2008 (In Russ.), 608 p.

2. M. T. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, University Press, Oxford, 2005.

3. M. A. Naymark, *Linejnye differencial'nye operatory [Linear differential operators]*, Nauka, M., 1969 (In Russ.), 526 p.

4. V. A. Marchenko, *Operatory Shturma-Liuvillya i ih prilozheniya [The operators of the Sturm-Liouville problem and their applications]*, Naukova dumka, Kiev, 1977 (In Russ.), 332 p.

5. B. M. Levitan, *Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya [The inverse Sturm-Liouville problem]*, Nauka, M., 1984 (In Russ.), 240 p.

[4] **Azamat M. Akhtyamov**, Professor, Department of Math Modeling, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Baskir State University (32 Zaki Validi Str., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia) , Chief Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Center of RAS (71 Prospect Oktyabrya, Ufa 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2080-6648, akhtyamovam@mail.ru

[5] **Rustam Y. Galimov**, Graduate student, Department of Math Modeling, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Baskir State University (32 Zaki Validi Str., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0772-184X, GalimovRY@mail.ru

[6] **Artur V. Mouftakhov** Lector, Department of Mathematics, Sami Shamoon Engenineering College, (84 Jabotinsky Str., Ashdod 77245, Israel), Ph.D., ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6557-7201, muftahov@yahoo.com

6. A. O. Vatul'yan, *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Inverse problems in solid mechanics]*, Fizmatlit, M., 2007 (In Russ.), 224 p.

7. A. O. Vatul'yan, A. V. Osipov, "[About one approach to determine the parameters of the defect in the beam]", *Defektoskopiya*, **11** (2014), 37-47 (In Russ.).

8. E. I. Shifrin, "Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **70–71** (2016), 613–624.

9. M. A. Il'gamov, A. G. Hakimov, "[Diagnosis of injuries of the cantilever beam with notch]", *Defektoskopiya.*, **6** (2009), 83-89 (In Russ.).

10. M. A. Il'gamov, A. G. Hakimov, "[Diagnosis of fastening and damage beams on elastic supports]", *Kontrol'. Defektoskopiya.*, **9** (2010), 57–63 (In Russ.).

11. V. C. Gnuni, Z. B. Oganisyan, "[The definition of boundary conditions of circular ring plates on the set frequencies of own fluctuations]", *Izvestiya NAN RA, seriya "Mekhanika".*, **44**:5 (1991), 9-16 (In Russ.).

12. Z. B. Oganisyan, "[On one problem of reconstruction of boundary conditions on the ends of the rod at a predetermined range of frequencies of own fluctuations of cross]", *Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustojchivosti i prochnosti mekhanicheskih sistem (nauchnye trudy konferencii) [Questions of optimal control, stability and strength of mechanical systems (scientific conference proceedings)] (Erevan)*, 1997, 159-162 (In Russ.).

13. Z. B. Oganisyan, "[On one problem of reconstruction of boundary conditions on the edges of the plate at a given spectrum of frequencies of own fluctuations of cross]", *Uchenye zapiski EGU.*, **1** (1991), 45-50 (In Russ.).

14. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, "Identification of boundary conditions using natural frequencies", *Inverse Problems in Science and Engineering.*, **12**:4 (2004), 393–408.

15. A. M. Ahtyamov, A. V. Muftahov, "[The correctness according to Tikhonov identification problem of fixing mechanical systems]", *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki.*, **25**:4(52) (2012), 24-37 (In Russ.).

16. A. A. Aitbaeva, A. M. Ahtyamov, "[On uniqueness of determination of the type of boundary conditions at one end of the rod at the three natural frequencies of oscillation]", *Prikladnaya matematika i mekhanika.*, **80**:3 (2016), 388-394 (In Russ.).

17. A. V. Mouftakhov, "On the Reconstruction of the Matrix from its Minors", *arXiv:math/0603657*, 2006.

18. P. Lankaster, *Teoriya matric [Theory of matrices]*, nauka, M., 1982 (In Russ.), 272 p.

19. *Vibracii v tekhnike: Spravochnik. T. 1. Kolebaniya linejnyh sistem / Pod red. V. V. Bolotina [Vibration in engineering: Handbook. V. 1. Vibrations of linear systems / ed. by V. V. Bolotin]*, Mashinostroenie, M., 1978, 352 p.

Submitted 5.10.2017