DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.085-090

УДК 512.917

Нидинг-конструкции моделей постоянного наклона для обобщенных перекладываний отрезка

© **М. И. Малкин[1], К. А. Сафонов[2]**

Аннотация. Для одномерных разрывных кусочно-монотонных отображений с нулевой топологической энтропией применяется техника нидинг-инвариантов и нидинг-рядов.Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений и применялась ранее для отображений с положительной топологической энтропией. В данной работе показано, что в предельном переходе к нулевой энтропии с помощью нидинг-рядов удается конструктивно задать инвариантную меру для обобщенных перекладываний, а также для класса разрывных отображений без периодических точек. Тем самым, в терминах нидинг-рядов получена конструкция полусопряженности (а в транзитивном случае — сопряженности) с модельным отображением единичного (по модулю) наклона. Указанная конструкция задается формулами, позволяющими с требуемой точностью вычислить параметры модельного отображения.

Ключевые слова: Нидинг-ряды, обобщенные перекладывания, топологическая энтропия.

1. Введение

Данная работа обобщает наши результаты из нашей работы [1], где были рассмотрены нидинг-конструкции инвариантных мер для класса лоренцевских отображений с нулевой энтропией. Настоящая работа посвящена построению кусочно-линейных моделей постоянного (по модулю) наклона для обобщенных перекладываний отрезка, а также для ещё более общего класса — класса разрывных кусочно-монотонных одномерных отображений без периодических точек. Дж. Милнором и В. Терстоном в [2] рассматривалась подобная задача для непрерывных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией, а М.И. Малкиным в [3] — для разрывных отображений лоренцевского типа, удовлетворяющих некоторым условиям типа растяжения. Для рассмотренных в данных работах классах отображений было доказано, что изучаемое отображение f с положительной энтропией ($h_{top}(f) > 0$) полусопряжено кусочно-линейному модельному отображению с наклоном $e^{h_{top}(f)}$ и указаны достаточные условия, когда на самом деле имеет место сопряженность. Отметим, что применение нидинг-техники Милнора и Терстона для построения указанной полусопряженности основано на том, что нидинг-ряды в случае положительной энтропии имеют единичный радиус сходимости, а их наименьший корень лежит строго внутри единичного круга, и это позволяет существенно применить при построении модели свойства аналитических и мероморфных функций.

[1] **Малкин Михаил Иосифович**, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID:http://orcid.org/0000-0002-1233-0264, malkin@mm.unn.ru

[2] **Сафонов Клим Андреевич**, студент, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID:http://orcid.org/0000-0001-8623-4294, safonov.klim@yandex.ru

В данной работе мы рассматриваем кусочно-непрерывные, кусочно-монотонные отображения отрезка без периодических точек. Такие отображения обычно возникают как отображения Пуанкаре для потоков на поверхностях. Подобные отображения можно назвать „обобщенными перекладываниями отрезка“: в отличие от (классических) перекладываний отрезка (interval exchanche transformations) не предполагается, что на интервалах монотонности наклон изначально равен единице. Эти отображения автоматически имеют нулевую топологическую энтропию, но, в отличие от перекладываний с одной точкой разрыва (полусопряженных с иррациональным поворотом окружности), они могут иметь не единственную инвариантную меру (т.е. не всегда являются строго эргодическими). Такие классы отображений изучались в работе [4]. Авторами с помощью аппарата счетных марковских цепей (бесконечных „башен Хофбауэра“) были получены некоторые условия сопряженности с кусочно-линейной моделью, а также получены оценки количества эргодических мер для таких отображений.

Наша работа обобщает идеи Милнора и Терстона на случай отображений с нулевой топологической энтропией. С помощью нидинг-техники описывается построение мер, полусопрягающих исходное отображение с кусочно-линейным единичного наклона, но, в отличие от [4], в терминах нидинг-рядов нами получен конструктивный вывод формул, обеспечивающих полусопряженность с модельными отображениями.

2. Основные понятия и результаты

Отображение $f : I \to I$ единичного отрезка в себя будем называть *кусочно-монотонным*, если отрезок I можно разбить на конечное число интервалов $A = \{(c_i, c_{i+1}), i = \overline{0,n}\}$ таких, что f действует непрерывно и строго монотонно на каждом интервале разбиения (c_i, c_{i+1}).

Среди всех разбиений, удовлетворяющих условию выше, можно выбрать единственное — наименьшее по количеству элементов. В этом случае точки $c_i (i = \overline{1, n-1})$ являются точками разрыва отображения f, а точки c_0 и c_n соответствуют границе отрезка ∂I. Также будем полагать, что отображение f не имеет периодических точек, в том числе периодических точек разрыва, что означает выполнения неравенств

$$f^k(c_i+) \neq c_i, f^k(c_i-) \neq c_i \text{ для } \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Из этого условия, в частности, следует, что топологическая энтропия $h_{top}(f)$ отображения f равна 0. Отметим ещё одно свойство таких отображений. Для этого напомним понятие гомтервала. Интервал $J \in I$ будем называть *гомтервалом*, если ограничение любой итерации $f^k|_J$ на этот интервал является гомеоморфизмом. В случае отсутствия периодических точек любой гомтервал является блуждающим интервалом, то есть все итерации $J, f(J), f^2(J), \ldots$ попарно не пересекаются (см. [5]).

По аналогии с [2], где были определены нидинг-ряды, соответствующие критическим точкам, для каждой точки разрыва $c_i (i = \overline{1, n-1})$ и для произвольного подынтервала $J = (a, b)$ введем формальный степенной ряд

$$L_i(J,t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^i t^k, \text{ где } l_k^i = card(J \cap \{f^{-k}(c_i)\}).$$

Также полезно будет рассмотреть еще один ряд, порожденный коэффициентами $l_k = \sum_{i=1}^{n-1} l_k^i$,

$$L(J,t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k t^k.$$

Согласно [6], топологическую энтропию для разрывного кусочно-монотонного отображения f можно определить эквивалентным образом как

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\, l_n}{n}. \tag{2.1}$$

Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда имеем

$$r(L(I,t)) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{cardD_n}}. \tag{2.2}$$

Таким образом, из равенств (2.1) и (2.2) получаем $r(L(I,t)) = 1$. Поскольку $0 \le l_k^i(J) \le l_k(I)$, степенные ряды $L_i(J,t)$ определяют аналитические функции в единичном круге. Отметим, что если ряд $L_i(J,t)$ имеет бесконечное число ненулевых коэффициентов, то его радиус сходимости в точности равен единице, а аналитическая функция $L_i(J,t)$ имеет полюс в точке $t = 1$. В противном случае $L_i(J,t)$ представляет собой полином. Оказывается, функции $L_i(J,t)$ на самом деле являются рациональными: это следует из следующей теоремы, принадлежащей Фату.

Теорема 2.1. (Фату, [7]) *Степенной ряд $\sum a_i t^i$ с целыми коэффициентами может представлять алгебраическую функцию, отличную от рациональной, лишь в случае, когда его радиус сходимости меньше единицы. Если радиус сходимости равен единице, то функция рациональна, а ее полюсы расположены в корнях целой степени из единицы.*

Замечание 2.1. *В случае обобщенных перекладываний отрезка, то есть взаимно-однозначных, кусочно-монотонных отображений, функции $L_i(I,t)$ имеют вид*

$$L_i(I,t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots = \frac{1}{1-t}$$

и имеют в точке $t = 1$ полюс первого порядка. Для любого другого (собственного) интервала $J \in I$ коэффициенты $l_n^i(J)$ принимают значение 0 или 1, поэтому функция $L_i(J,t)$ имеет полюс первого порядка в точке $t = 1$ тогда и только тогда, когда J содержит бесконечно много прообразов точки c_i (таким образом, данная функция не имеет особенностей в этой точке, когда у c_i лишь конечное число прообразов в J).

Введем в рассмотрение функцию, задаваемую выражением $\Lambda_i(J,t) = \frac{L_i(J,t)}{L_i(I,t)}$. В числителе и знаменателе здесь стоят рациональные функции, причём из неравенства $0 \le l_n^i(J) \le l_n^i(I)$ следует, что $L_i(I,t)$ имеет полюс более высокого порядка, чем $L_i(J,t)$. Таким образом, $\Lambda_i(J,t)$ представляет собой вещественную аналитическую функцию на интервале $0 < t < 1$ и имеет устранимую особенность в точке $t = 1$. Следовательно, корректно может быть определена функция

$$\Lambda_i(J) = \lim_{t\to 1} \Lambda_i(J,t) = \lim_{t\to 1} \frac{L_i(J,t)}{L_i(I,t)}. \tag{2.3}$$

Наша задача — показать, что построенное отображение $\Lambda_i(J)$ задает борелевскую вероятностную меру на I. При этом мы будем рассматривать только те точки c_i, которые имеют бесконечно много прообразов. Неотрицательность функции $\Lambda_i(J)$ следует из неотрицательности коэффициентов l_n^i, а ее аддитивность приводит к следующему предложению.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть a,b,c – точки из I такие, что $a<b<c$. Тогда $\Lambda_i((a,c))=\Lambda_i((a,b))+\Lambda_i((b,c))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех коэффициентов (возможно, за исключением одного в том случае, когда b является прообразом точки разрыва c_i), имеем соотношение

$$l_n^i(a,c)=l_n^i(a,b)+l_n^i(b,c),$$

Используя данное соотношение, при предельном переходе

$$\lim_{t\to1}\frac{L_i((a,b),t)}{L_i(I,t)}+\frac{L_i((b,c),t)}{L_i(I,t)}=\lim_{t\to1}\frac{L_i((a,c),t)}{L_i(I,t)}$$

получим требуемое утверждение.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Следующее утверждение показывает свойство инвариантности меры $\Lambda(J)$ при некотором дополнительном условии на J.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если интервал J целиком содержится в одном из интервалов монотонности отображения f, то $\Lambda(f(J))=\Lambda(J)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае отображение $f|_J$ является гомеоморфизмом на образ, поэтому $l_n(f(J))=l_{n+1}(J)$ и $L(f(J),t)=tL(J,t)$. Переходя к пределу

$$\lim_{t\to1}\frac{L_i(f(J),t)}{L_i(I,t)}=\lim_{t\to1}\frac{L_i(J,t)}{L_i(I,t)}$$

получаем требуемое равенство.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Если точка c_i имеет бесконечное число прообразов, то определенная нами мера $\Lambda_i(J)$ будет непрерывной в силу отсутствия периодических точек. В частности, каждая точка разрыва обобщенных перекладываний отрезка имеет бесконечное число прообразов. Более того, для обобщенных перекладываний каждая мера $\Lambda_i(J)$ будет инвариантной.

Покажем, что каждая непрерывная мера $\Lambda_i(J)$ полусопрягает f с некоторым линейным кусочно-монотонным отображением постоянного наклона. Далее символом Λ мы будем обозначать любую из функций Λ_i. Рассмотрим функцию $\phi(x)=\Lambda[0,x)$, которая является монотонным отображением отрезка I на себя. Определим кусочно-линейное отображение F следующим образом

$$F(x)=\phi(f(c_i+))-\phi(c_i)+\varepsilon x,\ \text{для } x\in(\phi(c_i),\phi(c_{i+1})),$$

ε принимает значения 1 или -1 в зависимости от того, является ли f возрастающей или убывающей на (c_i,c_{i+1}). Проверим справедливость равенства $\phi\circ f=F\circ\phi$, при этом необходимо исключить точки y, для которых $\phi(y)=\phi(c_i)$ и точка c_i является блуждающей. Действительно, в случае монотонного возрастания на интервале (c_i,c_{i+1}) имеем

$$\phi(f(x))=\Lambda[0,f(x))=\Lambda[0,f(c_i+))+\Lambda[f(c_i+),f(x))=$$
$$=\Lambda[0,f(c_i+))+\Lambda[c_i,x)=\Lambda[0,f(c_i+))-\Lambda[0,c_i)+\Lambda[0,x)=F(\phi(x)).$$

В случае монотонного убывания тождество проверяется аналогично.

Аналогичные рассуждения можно провести для меры $\Lambda(J)$, включающей прообразы всех точек разрыва. Изучим полусопряжение, построенное с помощью этой меры, в случае обобщенных перекладываний отрезка. Пусть мера некоторого подынтервала $K\in I$

равна $\Lambda(K) = 0$. Тогда, в силу замечания после теоремы 2.1., K представляет собой объединение конечного числа гомтервалов и конечного числа прообразов точек разрыва. Каждый гомтервал является блуждающим интервалом, покажем, что и прообраз точки разрыва, находящийся между двумя гомтервалами, является блуждающей точкой. Пусть (a, b) и (b, c) — гомтервалы и $f^k(b) = c_i$. Предположим, что $d = f^l(c_i)$ лежит в (a, b) и покажем, что между в интервале (d, b) найдется еще один прообраз точки разрыва, что будет противоречить определению гомтервала (a, b). Если в интервале (d, b) нет точек разрыва, то объединение $T = \cup_{i=0}^{\infty} f^{(k+l)i}[d, b]$ представляет собой замкнутый связный интервал, при этом непрерывное отображение $f^{k+l}|_T$ переводит T в себя. Следовательно, в T найдется периодическая орбита, что приводит к противоречию. Поэтому точка b является блуждающей, а значит и весь интервал K — блуждающий. Очевидно, любой блуждающий интервал имеет меру 0. Итак, мы получили, что $\Lambda(K)$ имеет нулевую меру тогда и только тогда, когда K — блуждающий интервал. Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 2.2. *Если f — обобщенное перекладывание n отрезков, то отображение $\phi(x) = \Lambda[0, x)$, где функция (мера) $\Lambda = \Lambda_i$ определена по формуле (2.3), $i = 1, \ldots, n-1$, устанавливает полусопряженность с кусочно-линейным перекладыванием единичного наклона. При этом $\phi(x)$ склеивает не более, чем по две точки в неблуждающем множестве $\Omega(f)$, являющихся граничными точками соответствующих блуждающих интервалов.*

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-03687-а.

Список литературы

1. М. И. Малкин, К. А. Сафонов, “Применение нидинг-рядов для полусопряженности отображений Лоренца с нулевой энтропией”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:4 (2016), 34–40.

2. J. Milnor, W. Thurston, “On iterated maps of the interval”, *preprint*, 1977.

3. М. И. Малкин, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. науч. тр. Под ред. Е. А. Леонтович - Андроновой*, Изд. ГГУ, Горький, 1987.

4. J. Buzzi, P. Hubert, “Piecewise monotone maps without periodic points: rigity, measures and complexity”, *Ergod. Th.& Dynam. Sys.*, **24** (2004), 383–405.

5. W. de Melo, S. Van Strien, *One dimensional dynamics*, Springer, Berlin, 1993.

6. L. S. Young, “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. AMS*, **263** (1981), 75–88.

7. P. Fatou, “Series trigonometriques et series de Taylor”, *Acta math.*, **30** (1906), 335–400.

Поступила 4.03.2017

MSC2010 37E05

Niding designs of models of constant inclination for generalized shifts of a segment

© **M. Malkin**[3], **K. Safonov**[4]

Abstract. For one-dimensional discontinuous maps with zero topological entropy we apply the technique of kneading invariants and kneading series. The kneading technique was introduced first by J. Milnor and W. Thurston for continuous piecewise monotonic one-dimensional maps and was applied to maps with positive topological entropy. In the present paper we show that by approaching the zero entropy one using kneading series may define invariant measure for generalized interval exchange transformations and also for a class of discontinuous maps without periodic points. Thus, in terms of kneading series we construct a semiconjugacy (being actually a conjugacy in the transitive case) with a model map of unit (in absolute value) slope. The proposed construction is determined by formulas which allow to calculate the parameters of the model map with required accuracy.

Key Words: kneading series, generalized interval exchange transformations, topological entropy.

References

1. M. I. Malkin, K. A. Safonov, “The application of niding-series for the semi-conjugation of Lorentz mappings with zero entropy”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:4 (2016), 34–40 (In Russ).
2. J. Milnor, W. Thurston, “On iterated maps of the interval”, *preprint*, 1977.
3. M. I. Malkin, *Metody kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy [Methods of the qualitative theory of differential equations: Interuniversity. Sat. Sci. Tr. Ed. by E.A. Leontovich – Andronova]*, GGU publ., Gorky, 1987 (In Russ).
4. J. Buzzi, P. Hubert, “Piecewise monotone maps without periodic points: rigity, measures and complexity”, *Ergod. Th.& Dynam. Sys.*, **24** (2004), 383–405.
5. W. de Melo, S. Van Strien, *One dimensional dynamics*, Springer, Berlin, 1993.
6. L. S. Young, “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. AMS*, **263** (1981), 75–88.
7. P. Fatou, “Series trigonometriques et series de Taylor”, *Acta math.*, **30** (1906), 335–400.

Submitted 4.03.2017

[3] **Mihail I. Malkin**, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, FGAOU VO "National research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (603950, Russia, GSP-20, Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Av., building 6), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orsid.org/0000-0002-1233-0264, malkin@mm.unn.ru

[4] **Klim A. Safonov**, student, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, FGAOU VO "National research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (603950, Russia, GSP-20, Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Av., building 6), ORCID:http://orcid.org/0000-0001-8623-4294, safonov.klim@yandex.ru