

УДК 517.9

## Собственные моды колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины

© А. В. Багаев<sup>1</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>2</sup>

**Аннотация.** Обсуждается математическая задача нахождения собственных мод для волнового уравнения с переменными коэффициентами, описывающего малые колебания несжимаемой идеальной однослойной или двухслойной жидкости в замкнутом бассейне с неровным дном. Найдены собственные моды колебаний при определенной функциональной зависимости ширины и глубины бассейна. Показано, что такие собственные моды выражаются через многочлены Чебышева второго рода. Приведены некоторые свойства собственных мод. В частности, исследованы собственные моды для бассейнов следующих конфигураций: 1) постоянной ширины, 2) постоянной глубины, 3) «согласованного» канала переменных ширины и глубины. В первом случае найден их параметрический вид, а в двух других случаях явный вид. В заключении обсуждается физическая интерпретация и обоснование реализуемости полученных решений.

**Ключевые слова:** волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн–Гордона, задача Штурма–Лиувилля, многочлены Чебышева второго рода, колебания идеальной жидкости в замкнутом бассейне.

### 1. Введение

Метод разделения переменных для уравнений с частными производными приводит к задаче Штурма–Лиувилля. В простейших случаях необходимо найти нетривиальные решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(y) + \lambda\rho(x)y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями типа Неймана или Дирихле, где

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y, \quad k(x), q(x) \geq 0, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> **Багаев Андрей Владимирович**, доцент кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Н. Новгород, ул. Минина, д. 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com

<sup>2</sup> **Пелиновский Ефим Наумович**, профессор кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Н. Новгород, ул. Минина, д. 24), профессор кафедры информационных систем и технологий, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, Нижний Новгород, ул. Б. Печёрская, д. 25/12), главный научный сотрудник, ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН» (603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@gmail.com

$\lambda$  – собственное число. Лишь только для некоторых физических задач удается найти решения уравнения (1.1), причем, как правило, в виде специальных функций.

Трансформационная техника ([1],[2],[3]) позволяет перейти от гиперболического волнового уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами и тем самым найти решение задачи Штурма–Лиувилля в элементарных функциях. Для этого перехода коэффициенты уравнения (1.3) должна связывать некоторая функциональная зависимость, что, конечно, сужает общность исходной задачи. Тем не менее, такие случаи интересны для физиков, поскольку позволяют доказать существование бегущих волн в сильно неоднородных средах.

Изложенный подход мы применим к нахождению собственных мод колебаний несжимаемой идеальной жидкости в ограниченном канале прямоугольного сечения. В [4] нами найдена конфигурация бассейна, при которой исходное волновое уравнение колебаний жидкости (с переменными коэффициентами) заменой сводится к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами. Некоторые такие частные конфигурации были получены в [5]. В настоящей работе нами будет исследован случай, когда коэффициенты волнового уравнения, по крайней мере один из них, на концах интервала обращаются в нуль. Показано, что собственные моды такого уравнения могут быть выражены через многочлены Чебышева второго рода, а потому обладают рядом замечательных свойств. В частности, будут исследованы собственные моды для бассейна 1) постоянной ширины, 2) постоянной глубины, 3) «согласованного» канала переменных ширины и глубины.

## 2. Преобразование волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

Волновые движения малой амплитуды несжимаемой идеальной жидкости в канале прямоугольного сечения описываются волновым уравнением [6]

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( B(x) c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\eta(x, t)$  — смещение раздела слоев разной плотности в случае внутренних волн и водной поверхности в случае поверхностных волн,  $c(x)$  — скорость распространения волн,  $B(x)$  — ширина канала прямоугольной формы. Для поверхностных волн квадрат скорости распространения волн определяется равенством  $c^2(x) = gh(x)$ , где  $g$  — значение ускорения свободного падения,  $h(x)$  — глубина бассейна, а для внутренних волн —

$$c^2(x) = g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}, \quad (2.2)$$

где  $h_1$  и  $h_2(x)$  — глубины верхнего и нижнего слоев,  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$  — редуцированное значение ускорения свободного падения,  $\rho_1 < \rho_2$  — плотности верхнего и нижнего слоев.

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$\eta(t, x) = A(x) \Phi(t, \tau), \quad (2.3)$$

где  $A(x)$  — амплитуда и  $\tau(x)$  — фаза — время распространения волны. Тогда уравнение (2.1) можно привести к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + p \Phi = 0, \quad (2.4)$$

где  $p$  — произвольная константа. При этом должны выполняться три условия [5]. Первое определяет фазу

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)}, \quad (2.5)$$

Второе задает амплитуду

$$A(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \quad (2.6)$$

Третье связывает скорость распространения (следовательно, глубину) и ширину канала

$$\frac{d}{dx} \left[ \sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}} \frac{d}{dx} (c(x)B(x)) \right] = 2p \sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}. \quad (2.7)$$

### 3. Определение собственных мод уравнения (2.1)

В работе авторов [4] для уравнения (2.7) получен общий вид решения и найдены условия, при которых решения являются ограниченными и определенными всюду. Найдено также ограниченное, но сингулярное решение ( $c(x)$  или  $B(x)$  обращаются в нуль). Оно получается только при  $p < 0$ . Такое решение соответствует конфигурации канала типа «озеро». Его можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} c(x) = \sqrt{q} \frac{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}{|\psi'(x)|}, \\ B(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{q}} |\psi'(x)| \sqrt{1 - \psi^2(x)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\psi(x)$  — непрерывная на  $[0, L]$  и дифференцируемая на  $(0, L)$  функция,  $L$  — длина канала,  $q = -p > 0$ ,  $\gamma > 0$  — произвольная константа.

Поскольку решения  $c(x)$  и  $B(x)$  не изменяются при замене  $\psi(x)$  на  $-\psi(x)$ , то можно полагать, что  $\psi'(x) \geq 0$ , то есть  $\psi(x)$  — возрастающая на  $[0, L]$  функция.

Будем также считать, что

$$\psi(0) = -1, \quad \psi(L) = 1. \quad (3.2)$$

Таким образом,  $c(x)$  и  $B(x)$  если и имеют особые точки, то только на концах отрезка  $[0, L]$ .

Для получения фазы и амплитуды применим формулы (2.5)–(2.6):

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dx}{c(x)} = \int_0^x \frac{\psi'(x) dx}{\sqrt{q} \sqrt{1 - \psi^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} (\arcsin \psi(x) + \frac{\pi}{2}), \quad (3.3)$$

$$A(x) = \frac{a_0}{\sqrt{c(x)B(x)}} = \frac{a_0}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}, \quad (3.4)$$

где  $a_0$  — произвольная константа.

Значения  $\tau$  ограничены, что соответствует конечному времени распространения, при этом

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(L) = \frac{\pi}{\sqrt{q}}. \quad (3.5)$$

Решения уравнения Клейна–Гордона (2.4) будем искать в виде

$$\Phi(t, \tau) = \cos(\omega t - \varphi) \sin K\tau. \quad (3.6)$$

Заметим, что амплитуда  $A(x)$  на концах интервала  $[0, L]$  неограниченно возрастает и потому для ограниченности решения  $\eta(x, t)$  необходимо потребовать

$$\Phi(t, \tau(0)) = 0, \quad \Phi(t, \tau(L)) = 0. \quad (3.7)$$

Из условий (3.7) с учетом (3.5) находим значение для  $K$ :

$$K_n = n\sqrt{q}. \quad (3.8)$$

Для того, чтобы функция  $\Phi(t, \tau)$  являлась решением уравнения (2.4), необходимо выполнение соотношения

$$\omega_n^2 = K_n^2 + p. \quad (3.9)$$

Отсюда находим собственное значение, определяющее частоту колебаний собственных мод «озера»:

$$\omega_n = \sqrt{q}\sqrt{n^2 - 1}. \quad (3.10)$$

Как видим, спектр частот такого «озера» не является эквидистантным. Таким образом,

$$\Phi_n(t, \tau) = \cos(\omega_n t - \varphi) \sin(n\sqrt{q}\tau). \quad (3.11)$$

В силу (3.3) имеем

$$\sin(n\sqrt{q}\tau(x)) = \sin\left(n\left(\arcsin\psi(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin(n \arccos\psi(x)), \quad (3.12)$$

следовательно,

$$\eta(t, x) = A(x)\Phi(t, \tau) = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{\sqrt{\gamma}} \cos(\omega_n t - \varphi) \frac{\sin(n \arccos\psi(x))}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}. \quad (3.13)$$

Положив

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{\sqrt{\gamma}}, \quad u_n(x) = \frac{\sin(n \arccos\psi(x))}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}$$

будем окончательно иметь выражение для  $n$ -ой собственной моды колебаний

$$\eta_n(t, x) = A_n \cos(\omega_n t - \varphi) u_n(x). \quad (3.14)$$

Общий вид решения уравнения (2.1) имеет вид

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi) u_n(x). \quad (3.15)$$

Обозначив  $s = \psi(x)$ , функцию  $u_n(x)$  можно переписать в виде

$$u_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad s \in [-1, 1]. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) определяет в точности многочлен Чебышева второго рода  $U_{n-1}(s)$  на отрезке  $[-1, 1]$  (см., например, [7],[8]). Благодаря этому функции  $u_n(x)$  обладают рядом замечательных свойств.

#### 4. Свойства функций $u_n(x)$

Обозначим через  $L_2([0, L], w)$  пространство функций с интегрируемым квадратом на  $[0, L]$  относительно весовой функции  $w(x) = \psi'(x)\sqrt{1 - \psi^2(x)}$ . Скалярное произведение в  $L_2([0, L], w)$  будем обозначать через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , а норму — через  $\|\cdot\|$ .

В силу ортогональности многочленов Чебышева второго рода  $\{U_n(s)\}$  на отрезке  $[-1, 1]$  с весовой функцией  $\sqrt{1 - s^2}$  имеем:

**Свойство 1<sup>0</sup>** Функции  $\{u_n(x)\}$  ортогональны в  $L_2([0, L], w)$  и  $\|u_n(x)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Следующее свойство вытекает из рекуррентного соотношения для многочленов Чебышева второго рода  $U_{n+1}(s) = 2sU_n(s) - U_{n-1}(s)$ , где  $U_0(s) = 1$ ,  $U_1(s) = 2s$ .

**Свойство 2<sup>0</sup>** Имеет место рекуррентное соотношение

$$u_{n+1}(x) = 2\psi(x)u_n(x) - u_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $u_0(x) = 0$ ,  $u_1(x) = 1$ .

В частности, мы получаем:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= 2\psi(x), & u_3(x) &= 4\psi^2(x) - 1, \\ u_4(x) &= 8\psi^3(x) - 4\psi(x), & u_5(x) &= 16\psi^4(x) - 12\psi^2(x) + 1. \end{aligned}$$

Из общей формулы для многочленов Чебышева второго рода

$$U_n(s) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2k+1} (s^2 - 1)^k s^{n-2k},$$

где  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ , получаем

**Свойство 3<sup>0</sup>** Имеет место формула

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2k+1} (\psi^2(x) - 1)^k \psi^{n-1-2k}(x),$$

где  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  — целая часть числа  $\frac{n-1}{2}$ .

Используя непрерывность  $s = \psi(x)$  и правило Лопиталья, можно доказать

**Свойство 4<sup>0</sup>** Для  $n > 1$  имеем  $u_n(0) = (-1)^{n+1}n$ ,  $u_n(L) = n$ .

Из монотонности  $\psi(x)$  на  $(0, L)$  вытекает

**Свойство 5<sup>0</sup>** Существует ровно  $n - 1$  нулей  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (0, L)$  функции  $u_n(x)$ , причем  $\psi(x_k) = \cos \frac{\pi k}{n}$ , где  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Свойство 6<sup>0</sup>** Если  $\psi(L - x) = -\psi(x)$ , то  $x_k + x_{n-k} = L$ , где  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , то есть нули функции  $u_n(x)$  расположены симметрично относительно середины отрезка  $[0, L]$ .

Действительно, в силу условия  $\psi(L - x) = -\psi(x)$  имеет место цепочка равенств:

$$\psi(L - x_{n-k}) = -\psi(x_{n-k}) = -\cos \frac{\pi(n-k)}{n} = -\cos \left( \pi - \frac{\pi k}{n} \right) = \cos \frac{\pi k}{n} = \psi(x_k).$$

Поскольку функция  $\psi(x)$  монотонна, то  $L - x_{n-k} = x_k$ , следовательно,  $x_k + x_{n-k} = L$ , где  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

Из свойств многочленов Чебышева второго рода (см., например, стр.106–108 в [7]) получаем

**Свойство 7<sup>0</sup>** Имеют место оценки

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}, \quad x \in (0, L); \quad (4.1)$$

$$|u_n(x)| \leq n, \quad x \in [0, L], \quad (4.2)$$

причем оценка (4.2) точная: равенство  $|u_n(x)| = n$  достигается только на концах отрезка  $[0, L]$ .

Таким образом, функции  $u_n(x)$  на концах отрезка  $[0, L]$  по абсолютной величине возрастают со скоростью  $n$ , а во внутренних точках интервала  $(0, L)$  ограничены. Высокие моды «прижаты» к краям бассейна.

Рассмотрим теперь конкретные конфигурации бассейна.

## 5. Канал постоянной ширины $B(x) = \text{const}$

Согласно (3.1) в случае  $B(x) = B_0 = \text{const}$  функция  $\psi(x)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\gamma}{\sqrt{q}} \psi'(x) \sqrt{1 - \psi^2(x)} = B_0, \quad (5.1)$$

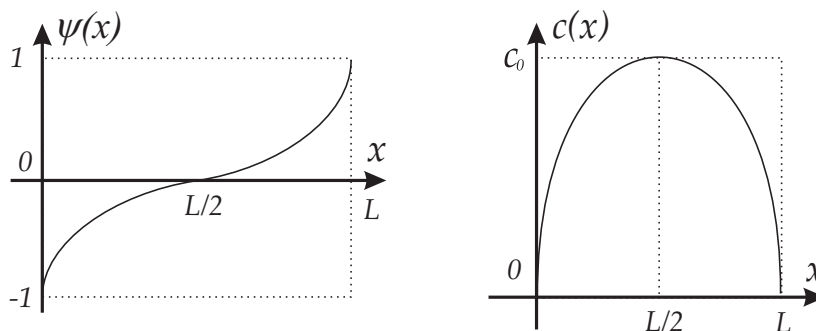
причем  $c(x) = \frac{\gamma}{B_0} (1 - \psi^2(x))$ . Если через  $c_0$  обозначить максимум  $c(x)$  на  $[0, L]$ , то  $\gamma = c_0 B_0$ . Интегрируя уравнение (5.1) с учетом условий (3.2), получим  $\sqrt{q} = \frac{\pi c_0}{2L}$  и

$$\frac{1}{2} \left( \psi \sqrt{1 - \psi^2} + \arcsin \psi \right) = \frac{\pi}{2L} x - \frac{\pi}{4}. \quad (5.2)$$

Обозначив  $s = \psi(x)$ , будем иметь параметрическое задание функции  $c(x)$ :

$$\begin{cases} c(s) = c_0(1 - s^2), \\ x(s) = \frac{L}{\pi} \left( s\sqrt{1 - s^2} + \pi - \arccos s \right), \end{cases} \quad (5.3)$$

где  $s \in [-1, 1]$ . Отметим, что  $c'(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0+0$  и  $x \rightarrow L-0$ . Функции  $\psi(x)$  и  $c(x)$  изображены на рис. 5.1.

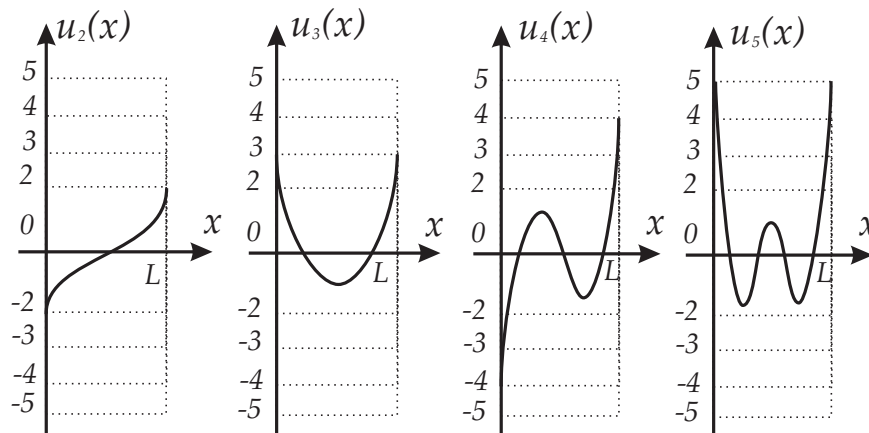


Р и с у н о к 5.1

Ортогональные функции  $u_n(x)$  запишутся в этом случае также параметрически:

$$\begin{cases} u_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \\ x(s) = \frac{L}{\pi} (s\sqrt{1-s^2} + \pi - \arccos s). \end{cases} \quad (5.4)$$

Отметим, что поскольку при  $x \rightarrow 0+0$  и  $x \rightarrow L-0$  имеем  $\psi'(x) \rightarrow \infty$ , то и  $u'_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $\forall n > 1$ . Последнее означает, что графики функций  $u_n(x)$  касаются вертикальных прямых  $x = 0$  и  $x = L$  (см. рис. 5.2). Таким образом, для этих функций «берег» является особой (сингулярной) точкой, где волновое поле, хотя и ограничено, но ее производная стремится к бесконечности.



Р и с у н о к 5.2

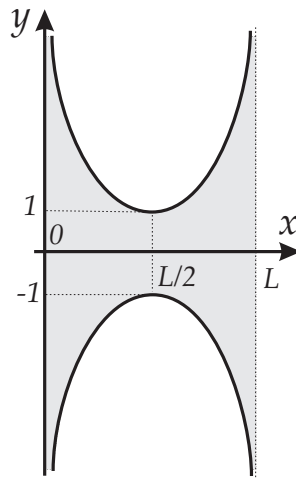
Поскольку  $s \in [-1, 1]$ , то положив  $s = \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ , будем иметь

$$\begin{cases} u_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}, \\ x(\cos \theta) = \frac{L}{\pi} (\sin \theta \cos \theta + \pi - \theta). \end{cases} \quad (5.5)$$

Отсюда нетрудно получить нули функции  $u_n(x)$ :

$$x_k = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi k}{n} + \frac{L(n-k)}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

В силу оценки (4.1) модуль  $|u_n(x)|$  ограничивает функция  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2(x)}}$  и поэтому все функции  $u_n(x)$  лежат в закрашенной части рис. 5.3.



Р и с у н о к 5.3

### 6. Канал постоянной глубины $c(x) = \text{const}$

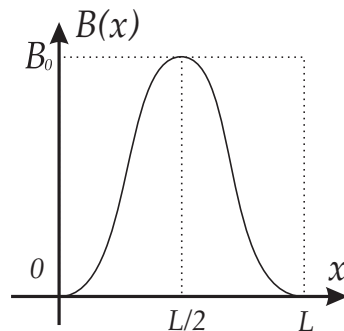
Если бассейн имеет постоянную глубину  $c(x) = c_0 = \text{const}$ , то согласно (3.1) функция  $\psi(x)$  должна удовлетворять уравнению

$$\sqrt{q}\sqrt{1 - \psi^2(x)} = c_0\psi'(x), \tag{6.1}$$

причем  $B(x) = \frac{\gamma}{c_0}(1 - \psi^2(x))$ . Обозначим через  $B_0$  максимум  $B(x)$  на  $[0, L]$ , тогда  $\gamma = c_0B_0$ . Интегрируя (6.1) с учетом условий (3.2), получим  $\sqrt{q} = \frac{\pi c_0}{L}$  и  $\psi(x) = -\cos \frac{\pi x}{L}$ . Откуда

$$B(x) = B_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L}. \tag{6.2}$$

График функции  $B(x)$  изображен на рис. 6.1.



Р и с у н о к 6.1

В этом случае функции  $u_n(x)$  имеют вид

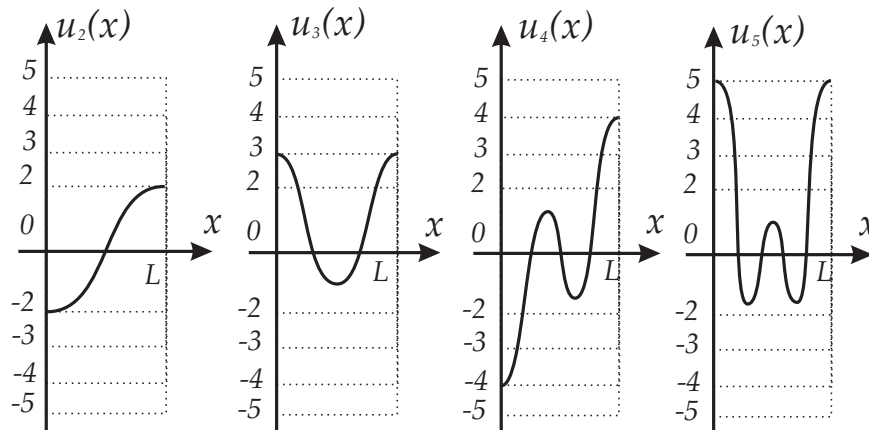
$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi n x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}}. \tag{6.3}$$

В частности (см. рис. 6.2),

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = -2 \cos \frac{\pi x}{L}, \quad u_3(x) = 4 \cos^2 \frac{\pi x}{L} - 1,$$



$$u_4(x) = -8 \cos^3 \frac{\pi x}{L} + 4 \cos \frac{\pi x}{L}, \quad u_5(x) = 16 \cos^4 \frac{\pi x}{L} - 12 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 1.$$



Р и с у н о к 6.2

Поскольку  $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ , то  $u'_n(0) = u'_n(L) = 0$ . Нули функции  $u_n(x)$  распределены равномерно:  $x_k = \frac{Lk}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . В силу оценки (4.1) внутри интервала  $(0, L)$  модуль  $|u_n(x)|$  ограничен функцией  $y(x) = \sin^{-1} \frac{\pi x}{L}$  (см. рис. 5.3).

Отметим также, что в этом случае все моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют нулевые производные.

## 7. «Согласованный» канал переменной ширины и глубины $c(x)/B(x) = \text{const}$

Согласно (3.1) условие  $c(x)/B(x) = \lambda_0 = \text{const}$  влечет, что

$$\psi'(x) = \sqrt{\gamma \lambda_0} / \sqrt{q} \quad (7.1)$$

и  $c(x) = \frac{q}{\sqrt{\gamma \lambda_0}} \sqrt{1 - \psi^2(x)}$ ,  $B(x) = \frac{\gamma \sqrt{\gamma \lambda_0}}{q} \sqrt{1 - \psi^2(x)}$ . Обозначим через  $c_0$  и  $B_0$  максимумы функций  $c(x)$  и  $B(x)$  на  $[0, L]$ . Тогда интегрируя (7.1) с учетом условий (3.2), получим  $\psi(x) = \frac{2x-L}{L}$ ,  $\sqrt{q} = \frac{2c_0}{L}$ ,  $\gamma = c_0 B_0$ ,  $\lambda_0 = c_0/B_0$ . Отсюда

$$\begin{cases} c(x) = \frac{2c_0}{L} \sqrt{x(L-x)}, \\ B(x) = \frac{2B_0}{L} \sqrt{x(L-x)}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Отметим, что производные  $c'(x)$  и  $B'(x)$  на концах отрезка  $[0, L]$  бесконечны. Графики функций  $c(x)$  и  $B(x)$  похожи на график функции  $c(x)$  на рис. 5.1.

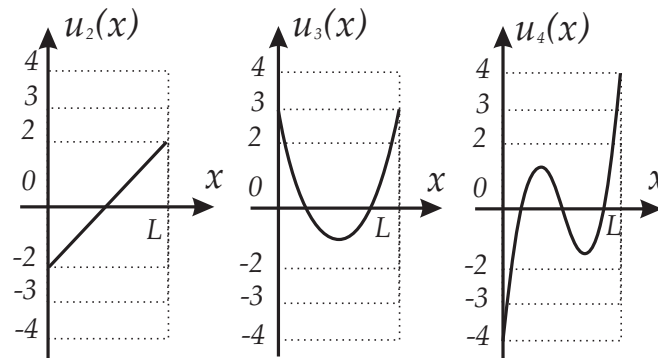
Функции  $u_n(x)$  имеют вид

$$u_n(x) = \frac{L \sin \left( n \arccos \frac{2x-L}{L} \right)}{2 \sqrt{x(L-x)}}. \quad (7.3)$$

Поскольку  $\psi(x) = \frac{2x-L}{L}$  — многочлен, то в силу свойства  $\mathcal{Z}^0$  функция  $u_n(x)$  — многочлен степени  $n-1$ . Так (см. рис. 7.1),

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = \frac{4x}{L} - 2, \quad u_3(x) = \frac{16x^2 - 16Lx + 3L^2}{L^2},$$

$$u_4(x) = \frac{4(16x^3 - 24x^2L + 10xL^2 - L^3)}{L^3}.$$



Р и с у н о к 7.1

Согласно оценке (4.1) функции  $u_n(x)$  по модулю ограничены внутри интервала  $(0, L)$  функцией  $y(x) = \frac{L}{2\sqrt{x(L-x)}}$  (см. рис. 5.3). Заметим, что  $u_n(x)$  имеют конечные производные на концах отрезка  $[0, L]$ .

Итак, и в этом случае все собственные моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют конечные ненулевые (кроме  $n = 1$ ) производные.

## 8. Заключение

Выше мы показали существование ограниченных собственных мод колебаний жидкости в замкнутом бассейне переменной глубины («озера»), глубина которого стремится к нулю на «берегах» бассейна. В этой связи необходимо еще раз обсудить граничные условия в такого рода задачах. Это обсуждение уже приводилось в книге Сретенского [9], в которой утверждалось, что даже сингулярное решение, обращающееся в бесконечность на берегу, имеет физический смысл, поскольку волна на берегу обрушивается и диссипирует. В этом случае волна не может отразиться от берега и, следовательно, в рамках линейной теории накапливается неограниченно на берегу. Но из наблюдений известно, что при определенных условиях волна не обрушивается на берегу, а отражается от нее. Этот процесс может быть строго описан в рамках нелинейной теории мелкой воды, если глубина меняется линейно в окрестности береговой линии — уреза [10],[11]. Там же получен аналитический критерий обрушения волны, который соответствует так называемой градиентной катастрофе. Естественно предположить, что такой же режим возможен и в «озерах» другой конфигурации. Тогда физически разумным граничным условием «на берегу» будет условие ограниченности волновой функции. Именно это условие использовано в [12],[13], что позволило аналитически рассмотреть накат необрушенных волн на «безотражательный» пляж. В нашей задаче также получаются ограниченные собственные моды, что свидетельствует об их физической реализуемости. Сингулярность (там, где она появляется) проявляется только в величине производной от смещения, которая не несет физического смысла. И хотя задача Штурма–Лиувилля решается не со стандартными граничными условиями типа Неймана или Дирихле, она ставится корректно и ее решения описывают собственные моды ограниченного водного бассейна переменной конфигурации («озера»).

*Благодарности.* Представленные результаты получены в рамках выполнения гос. задания в сфере научной деятельности (Задание № 5.5176.2017/БЧ), а также при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных

школ РФ НИШ-6637.2016.5 и грантов РФФИ 16-05-000167, 15-45-02061, 16-02-00167.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
2. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.
3. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
4. А. В. Багаев, Е. Н. Пелиновский, “Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:3 (2016), 127–136.
5. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. Р. Гиниятуллин, А. А. Наумов, “Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, **6**:3 (2013), 46–53.
6. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, СО РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.
7. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005, 480 с.
8. J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2003, 335 с.
9. Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977, 816 с.
10. Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996, 176 с.
11. Е. Н. Пелиновский, И. И. Диденкулова, А. А. Куркин, А. А. Родин, О. И. Диденкулов, *Аналитическая теория наката морских волн на берег*, НГТУ, Нижний Новгород, 2015, 113 с.
12. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research - Oceans*, **114**:C07006 (2009).
13. И. И. Диденкулова, Е. Н. Пелиновский, “Об отражении длинной волны от подводного склона”, *Океанология*, **51**:4 (2011), 606–611.

Поступила 28.03.2017

MSC2010 33D45, 34B24, 35C07, 35C10, 35L05

## Eigenmodes of water oscillations in the closed basin of variable depth

© A. V. Bagaev<sup>3</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>4</sup>

**Abstract.** Eigenvalue problem for variable coefficient wave equation describing small oscillations of an incompressible ideal single-layer or two-layer fluid in a closed basin with uneven bottom is discussed. Eigenmodes of oscillations are founded for the channel with functionally associated width and depth. It is shown that such eigenmodes are expressed through Chebyshev polynomials of the second kind. Some properties of the eigenmodes are found. In particular, eigenmodes are described for the following configurations of channel: 1) constant width, 2) constant depth, 3) “coherent” channel of variable width and depth. In the first case the parametric form and in two other cases the explicit form of eigenmodes are found. In conclusion, the physical interpretation and the feasibility of the obtained solutions are discussed.

**Key Words:** variable-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, Sturm–Liouville problem, Chebyshev polynomials of the second kind, water oscillations in the closed basin.

### REFERENCES

1. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
2. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.
3. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
4. A. V. Bagaev, E. N. Pelinovsky, “[The configuration of the variable cross-section channel allowed reflectionless propagation of internal waves in the ocean]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:3 (2016), 127–136 (In Russ.).
5. T. G. Talipova, E. N. Pelinovsky, O. E. Kurkina, E. A. Rouvinskaya, A. R. Giniyatullin, A. A. Naumov, “[Nonreflective propagation of internal waves in a channel of variable cross-section and depth]”, *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika*, **6**:3 (2013), 46–53 (In Russ.).
6. V. U. Lyapidevsky, V. M. Teshukov, *Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlennykh voln v neodnorodnoy zhidkosti [Mathematical model of propagation of long waves in an inhomogeneous fluid]*, SO RAN, Novosibirsk, 2000 (In Russ.), 419 p.

<sup>3</sup> **Andrey V. Bagaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (24 Minin Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com

<sup>4</sup> **Efim N. Pelinovsky**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (24 Minin Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Professor, Department of Information Systems, Nizhny Novgorod Branch of High School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Chief Scientist, Institute of Applied Physics (46 Ul'yanov Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@gmail.com

7. P. K. Suetin, *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny [Classical orthogonal polynomials]*, Fizmatlit, Moscow, 2005 (In Russ.), 480 p.
8. J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2003, 335 p.
9. L.N. Sretinsky, *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [The theory of wave motions of fluid]*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 816 p.
10. E. N. Pelinovsky, *Gidrodinamika voln tsunami [Tsunami Wave Hydrodynamics]*, Institute Applied Physics Press, Nizhny Novgorod, 1996 (In Russ.), 176 p.
11. E. N. Pelinovsky, I.I. Didenkulova, A.A. Kurkin, A.A. Rodin, O.I. Didenkulov, *Analiticheskaya teoriya nakata morskikh voln na bereg [Analytical theory of sea waves runup on the coast]*, Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.), 113 p.
12. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research - Oceans*, **114**:C07006 (2009).
13. I. I. Didenkulovaa, E. N. Pelinovsky, “Reflection of a Long Wave from an Underwater Slope”, *Oceanology*, **51**:4 (2011), 568–573.

*Submitted 28.03.2017*