DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.053-061

УДК 517.938

Недиссипативное кинематическое динамо на линзах

© **Е. В. Жужома**[1] **В. С. Медведев**[2]

Аннотация. В статье строится гладкий (бесконечно дифференцируемый) диффеоморфизм произвольной трехмерной линзы (замкнутого трехмерного многообразия, которое конечнолистно накрывается трехмерной сферой), который имеет положительную энтропию и сохраняет объем в некоторой окрестности своего неблуждающего множества (отметим, что в список трехмерных линз мы включаем трехмерную сферу). При этом в пространстве диффеоморфизмов, консервативных в некоторых окрестностях своих неблуждающих множеств, имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию (то есть построенный диффеоморфизм является относительно устойчивым в данном классе диффеоморфизмов). В силу своих свойств, построенный диффеоморфизм может служить моделью недиссипативного кинематического быстрого динамо (остается открытым вопрос о том, является ли построенный диффеоморфизм моделью среднего или диссипативного быстрого динамо).
Ключевые слова: диффеоморфизм полнотория, соленоид, недиссипативное динамо.

Теория кинематического динамо изучает происхождение и эволюцию магнитных полей в электропроводящих средах (плазме), поскольку такие поля играют большую роль в динамике астрофизических процессов. Одним из аспектов быстрого кинематического динамо является изучение движений плазмы, которые вызывают экспоненциальный рост магнитного поля при малой магнитной диффузии [1]. Рассматриваются, как правило, непрерывная и дискретная модели кинематического динамо. Согласно [1], гл. 5, п.1.1, в случае непрерывной модели система уравнений кинематического динамо состоит из уравнения индукции $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\,(\vec{v} \times \vec{B}) + \nu \triangle \vec{B}$ и бездивергентности $div\,\vec{B} = 0$ магнитного поля $\vec{B}$, заданного на некотором римановом многообразии M, где ν – магнитная вязкость (величина обратная так называемому магнитному числу Рейнольдса), $\vec{v}$ – поле скоростей электропроводящей среды, заполняющей M. Для дискретной модели быстрого кинематического динамо в упрощенной форме вопрос сводится к существованию консервативного диффеоморфизма $f : M \to M$ риманова многообразия M такого, что энергия магнитного поля $\vec{B}$, заданного на M, растет экспоненциально под действием итераций диффеоморфизма f,

$$\liminf_{\nu \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \int\int\int_M |f_*^n(\vec{B}_0)|^2 dv > 0.$$

При этом предполагается, что магнитная вязкость, входящая в соответствующее уравнение диффузии, достаточно близка к нулю, и мы также должны учитывать процесс рассеивания магнитного поля, которое формально представляется как решение уравнения диффузии. Если сразу положить $\nu = 0$, то говорят о недиссипативном динамо.

[1] **Жужома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, zhuzhomazhuл. Большая Печерская, д. 25), доктор физико-математических наук, ORCID:http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

[2] **Медведев Владислав Сергеевич**, научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), кандидат физико-математических наук, ORCID:http://orcid.org/0000-0001-6369-0000, vmedvedev@hse.ru

В 70-ых годах 20-ого века Я.Б. Зельдович и А.Д. Сахаров предложили конструкцию так называемого веревочного динамо, которая в идейном плане легла в основу современных конструкций трехмерных моделей быстрого динамо [1]. Согласно обсуждению этой конструкции в книге [1], гл. V, с точки зрения теории быстрого кинематического недиссипативного динамо конструкция Зельдовича-Сахарова имеет определенный недостаток, состоящий в том, что предложенное отображение не является консервативным в окрестности неблуждающего множества, поскольку нетривиальное неблуждающее множество, в силу построения, является аттрактором. В настоящей статье мы предлагаем модификацию конструкции Сахарова-Зельдовича, лишенную этого недостатка в окрестности неблуждающего множества.

В статье строится дискретная модель быстрого кинематического недиссипативного динамо на произвольной трехмерной линзе $L_{p,q}$ (см. определение ниже). Отметим. что в список линз мы включаем трехмерную сферу. Отметим, что одновременно с моделью быстрого недиссипативного кинематического динамо в статье строится пример диффеоморфизма с соленоидальным базисным множеством седлового типа.

Одним из общепринятых и наглядных определений соленоида является его представление в виде пересечения последовательности вложенных друг в друга полноториев, когда ось последующего полнотория монотонно прокручивается несколько раз вдоль оси предыдущего полнотория [2]. Известно, что с топологической точки зрения соленоид представляет собой неразложимый континуум, который не вкладывается ни в какую двумерную поверхность [3], [4]. Видимо, в теории динамических систем соленоид впервые появился в книге citeNemitskyStepanov-book1947 (гл.4, п.8) для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических (следовательно, нетривиально рекуррентных) траекторий. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [6], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [7], [8], [9], [10], [11]). Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура. Отметим также, что аналогичные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых циклов [9], [12]. В силу [13] (см. также [14], [15]), диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами, и при этом, одно базисное множество является аттрактором, а второе – репеллером, причем 3-многообразие необходимо представляет собой связную сумму, одним из слагаемых которой является линза. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 1.2. *Существует диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \to L_{p,q}$, консервативный в некоторой окрестности своего соленоидального инвариантного множества, который является быстрым недиссипативным кинематическим динамо.*

Центральное место занимает построение хаотического специального диффеоморфизма полнотория. Сперва рассмотрим на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, и отображение $w : D^2 \to \mathbb{R}^2$, известное как подкова Смейла [16], [6]. Напомним, что отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига вдоль оси Ox так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy. Поскольку отображение w изотопно тождественному, то w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2 (см. также [8], [16]). За счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображения w на D^2 равнялся $\frac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x;y) \longrightarrow (x+\frac{1}{2};y)$ вдоль оси Ox, и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – центральную симметрию относительно начала координат $(0;0)$, $S_0(x;y) = (-x;-y)$. Понятно, что за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2. $w(D^2) \cap (S_0 \circ w(D^2)) = \emptyset$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0. Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases} \bar{x} &= x\cos\pi t - y\sin\pi t \\ \bar{y} &= x\sin\pi t + y\cos\pi t \end{cases}$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \tan\pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to [0;1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t \; mod, 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два [**??**]. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$, и отображение $F : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ вида

$$(t;(x;y)) \longmapsto (E_2(t); w_t(x;y)), \qquad t \in S^1, \quad (x;y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}^2_t = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F,

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}^2_{E_2(t)} = \mathbb{R}^2_{2t \, mod\, 1}.$$

Лемма 1.1. *Отображение $F : S^1 \times D^2 \to F(S^1 \times D^2)$ является консервативным диффеоморфизмом на свой образ.*

Доказательство. Предположим, что $F(t_1;z_1) \cap F(t_2;z_2) \neq \emptyset$. Тогда $F(D_{t_1}) \cap F(D_{t_2}) \neq \emptyset$. Из определения F вытекает равенство $E_2(t_2) = E_2(t_1)$, то есть, $2t_1 \; mod \; 1 = 2t_2$. Так как отображение w_t является диффеоморфизмом на свой образ, то $t_1 \neq t_2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$. Имеем, $F(D_{t_1}) = R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1}(D_{t_1})$,

$$F(D_{t_2}) = F(D_{t_1+\frac{1}{2}}) = R_{2t_1+1} \circ w_0 \circ R_{-t_1-\frac{1}{2}}(D_{t_1}) = R_1 \circ R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1-\frac{1}{2}}(D_{t_1}).$$

Поскольку R_1 есть поворот на угол π, то подковы $F(D_{t_1})$ и $S_0 \circ F(D_{t_1})$ должны пересекаться, что противоречит условию 2.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\frac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ.

Доказательство закончено.

По построению окружность S_0^1 является осью полнотория $S^1 \times B^2$, а тела B и полноторий $S^1 \times B^2$ являются ее трубчатыми окрестностями. Из того, что диффеоморфизм квадрата в подкове Смейла продолжается до некоторого диффеоморфизма достаточно большого круга, вытекает, что F продолжается до некоторого диффеоморфизма (обозначим его снова через F) полнотория $S^1 \times B^2$, который сохраняет дисковую структуру, т.е. $F(D_t) \cap B \subset D_{E_2(t)}$.

Пусть $L_{p,q}$ – произвольная линза. Напомним, что для взаимно простых целых чисел p, q ($p \geq 3$, $1 \leq q < p$) *линзой* $L_{p,q}$ называется трехмерное многообразие, которое получается факторизацией стандартной сферы $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | \, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ по действию, задаваемому формулой

$$(z,w) \to (z \exp \frac{2\pi i}{p}, w \exp \frac{2\pi i q}{p}).$$

Линза $L_{p,q}$ может быть также получена в результате склеивания двух полноториев вдоль их границ (двумерных торов) с помощью линейного автоморфизма тора вида

$$\begin{cases} \overline{x} &= rx + py \\ \overline{y} &= sx + qy \end{cases},$$

где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$.

В работе [13] было показано, что на каждой линзе $L_{p,q}$ можно построить диффеоморфизм с двумя соленоидальными базисными множествами, один из которых является аттрактором, а второй – репеллером. Построение начиналось на полнотории (так называемый базовый полноторий) с определения диффеоморфизма, сохраняющего дисковую структуру таким, что образ оси полнотория делал p' оборотов вдоль оси полнотория и q'' оборотов вокруг оси полнотория (точные формулы, связывающие p', q' с p, q можно также найти в [14], [15] (см. также [18]). Если на дисках, перпендикулярных оси полнотория задать сжатие, то полученный диффеоморфизм будет иметь соленоидальное базисное множество, являющееся аттрактором. Далее, нужно взять второй полноторий и определить на нем симметричный диффеоморфизм соленоидальным базисным множеством, являющимся репеллером. Теперь два экземпляра полноториев склеиваются вдоль границе (двумерный тор) для получения требуемого диффеоморфизма $L_{p,q} \to L_{p,q}$ линзы. Понятным образом можно модифицировать F так, чтобы образ оси полнотория $S^1 \times B^2$ делал p' оборотов вдоль оси полнотория и q'' оборотов вокруг оси этого полнотория $S^1 \times B^2$. Далее, повторяя технику работ [13, 14, 15], можно получить продолжение отображения $F : B \to F(B) \subset S^1 \times B^2$ до диффеоморфизма $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$. Ясно, что f консервативный в некоторой окрестности тела B.

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в $L_{p,q}$, будем называть *базовым*, и обозначим через $\mathcal{B}$. Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [8] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [8], [16], [6]. Обозначим через $Diff^1(L_{p,q})$ пространство диффеоморфизмов линзы $L_{p,q}$, наделенное C^1 топологией.

Лемма 1.2. *Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_\Omega$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $Diff^1(L_{p,q})$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_\Omega$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.*

Доказательство. По построению якобиан отображения $f|_{\mathcal{B}} : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ равен $J(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому f имеет гиперболическую структуру на $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что множество Ω гиперболическое. Известно, что ограничение $f|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega_0$ имеет положительную энтропию [8]. Отсюда и [19] вытекает, что ограничение $f|_\Omega$ также имеет положительную энтропию. Поскольку гиперболические множества обладают устойчивостью относительно малых C^1 возмущений, то существует окрестность $U(f)$ с требуемыми свойствами, так как энтропия является инвариантом сопряженности.
Доказательство закончено.

Лемма 1.3. *Существует диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \to L_{p,q}$, совпадающий с $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$ на полнотории $\mathcal{B} \subset L_{p,q}$ (следовательно, f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество $\Omega \subset \mathcal{B}$), которое является быстрым недиссипативным кинематическим динамо.*

Доказательство. Возьмем блуждающую точку $z_0 \in L_{p,q} \setminus \mathcal{B}$ диффеоморфизма f такую, что $f(z_0) \in L_{p,q} \setminus \mathcal{B}$ и существует путь $p \in L_{p,q} \setminus NW(f)$, соединяющий точки z_0, $f(z_0)$. Стандартной операцией можно получить диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \to L_{p,q}$, совпадающий с $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$ вне сколь угодно малой окрестности пути p, и такой, что $f(z_0) = z_0$. Теперь мы можем рассматривать f_0 как диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$, тождественный вне некоторой открытой области. Ясно, что f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество Ω и ненулевую топологическую энтропию. В силу теоремы 2 [20] (мы применяем эту теорему для $d = 3$ и $q = 2$), f_0 является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно некоторого бездивергентного магнитного поля.
Доказательство закончено.

В заключение схематично приведем конкретное магнитное поле, относительно которого f является быстрым недиссипативным кинематическим динамо. Рассмотрим на $S^1 \times D^2$ магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}$, образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ можно продолжить на $L_{p,q}$ до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ имеет нулевую диффузию (то есть, рассеивание магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются не менее, чем в два раза, то под действием f поле $\vec{\boldsymbol{B}}$ переходит в поле $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ имеют длину не менее, чем в λ раз большую нежели длина векторов поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{\boldsymbol{B}})$ относительно поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \to S^3$

является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01-041), также при частичной поддержке РФФИ (проект 15-01-03687а). Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году.

Список литературы

1. В.И. Арнольд, Б.А. Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.
2. J.M. Aarts, R.J. Fokkink, "The classification of solenoids", *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111** (1991), 1161–1163.
3. R.H. Bing, "A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc", *Canadian Journ. Math.*, **12** (1960), 209–230.
4. R.H. Bing, "Embedding circle-line continua in the plane", *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
5. В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.-Л., 1947.
6. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.
7. Д.В. Аносов, "Исходные понятия. Элементарная теория", *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **1** (1985), 156–204.
8. Д.В. Аносов, В.В. Солодов, "Гиперболические множества", *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **66** (1991), 12–99.
9. Ю.С. Ильяшенко, Ли Вейгу, *Нелокальные Бифуркации*, МЦНМО-ЧеРо, М., 1999.
10. S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Translations of Math. Monographs. 196*, Amer. Math. Soc., N.Y., 1996.
11. C. Robinson, *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
12. Д. Тураев, Л.П. Шильников, "О катастрофах голубого неба", *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599.
13. H. Bothe, "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
14. B. Jiang, Y. Ni, Ch. Wang, "3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.

15. Jiming Ma, Bin Yu, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154** (2007), 3021–3031.

16. S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.

17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

18. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47–68.

19. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A.”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.

20. I. Klapper, L.-S. Young, “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **173** (1995), 623–646.

Поступила 25.03.2017

MSC2010 37C70

Nondissipativ kinematic dynamics on lenses

© **E. V. Zhuzhoma**[3], **V. S. Medvedev**[4]

Abstract. In the paper we construct smooth (infinitely differentiable) diffeomorphism of three dimensional lens (that is a closed three-manifold that is sheet-finitely covered by three-dimensional sphere). We include a three-dimensional sphere in the list of lens. This mapping has a positive entropy and preserves the volume in some neighborhood of its non-wandering set. We examine the space of diffeomorphisms that are conservative in some neighborhood of their non-wandering sets. In this space there is a neighbourhood consisting of mappings with positive topological entropy (i.e., the diffeomorphism constructed is relatively stable in the class of diffeomorphisms). Due to its properties, the diffeomorphism constructed can act like a model of non-dissipative kinematic fast dynamo. The question is open either the diffeomorphism constructed is the model of a middle or dissipative fast dynamo.

Key Words: diffeomorphism of a solid torus, solenoid, nondissipative dynamo.

References

1. V.I. Arnold, B.A. Hesin, *Tologicheskie metody v gidrodinamike [Topological Methods in Hydrodynamics]*, MCNMO publ, M., 2007 (In Russ).
2. J.M. Aarts, R.J. Fokkink, "The classification of solenoids", *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111** (1991), 1161–1163.
3. R.H. Bing, "A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc", *Canadian Journ. Math.*, **12** (1960), 209–230.
4. R.H. Bing, "Embedding circle-line continua in the plane", *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
5. V.V. Nemitsky, V.V. Stepanov, *Kachestvennaya teoriya differentsialnyh uravneniy [Qualitative theory of differential equations]*, OGIZ, M.-L., 1947 (In Russ).
6. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.
7. D.V. Anosov, "Ishodnye ponyatiya. Elementarnaya teoriya [Initial concepts. Elemetary theory]", *Sovremennye problemy matematiki, Fundamentalnye napravleniya (Itogi nauki i tehniki)*, **1** (1985), 156–204 (In Russ).
8. D.V. Anosov, V.V. Solodov, "Giperbolicheskie mnozhestva [Hyperbolic sets]", *Sovremennye problemy matematiki, Fundamentalnye napravleniya (Itogi nauki i techniki)*, **66** (1991), 12–99 (In Russ).
9. Uy.S. Ilyashenko, Li Weigu, *Nelocalnye bifurkatsii [Nonlocal bifurcations]*, MCNMO-CheRo, M., 1999 (In Russ).

[3] **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Research Institute of Higher School of Economics (603155, Russia, Nizhny Novgorod, zhuzhomazhul. Bolshaya Pecherskaya, 25), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0001-8682-7591, zhuzhoma@mail.ru

[4] **Vladislav S. Medvedev**, researcher TAPRADESS laboratory, NIU Higher School of Economics (603155, Russia, Nizhny Novgorod, Ul. Bolshaya Pecherskaya, 25), PhD (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0001-6369-0000, vmedvedev@hse.ru

10. S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Translations of Math. Monographs. 196*, Amer. Math. Soc., N.Y., 1996.

11. C. Robinson, *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, 1999.

12. D. Turaev, L.P. Shilnikov, "[About the blue sky catasrophe]", *Doklady RAN*, **342**:5 (1995), 596–599 (In Russ).

13. H. Bothe, "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

14. B. Jiang, Y. Ni, Ch. Wang, "3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.

15. Jiming Ma, Bin Yu, "The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds", *Topology and Appl.*, **154** (2007), 3021–3031.

16. S. Smale, "Diffeomorphisms with many periodic points", *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.

17. M. Shub, "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

18. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, "[On zero-dimensional solenoidal basis sets]", *Matem. sbornik*, **202**:3 (2011), 47–68 (In Russ).

19. R. Bowen, "Topological entropy and Axiom A.", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.

20. I. Klapper, L.-S. Young, "Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy", *Comm. Math. Phys.*, **173** (1995), 623–646.

Submitted 25.03.2017