DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.105-116

УДК 519.17

О производящих функциях и предельных теоремах, связанных с максимальными независимыми множествами в графах-решетках

© **Д. С. Талецкий**[1]

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются количественные характеристики максимальных независимых множеств в графах-решетках. В ней используются методы комбинаторного анализа, перечислительной комбинаторики, математического анализа и линейной алгебры. Получен явный вид производящих функций количества максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках ширины 4, 5, 6. Доказано, что пределы корней mn-ой степени из количества (максимальных) независимых множеств в прямоугольных, цилиндрических и тороидальных $m \times n$-решетках существуют и равны. Количественные аспекты максимальных независимых множеств в графах-решетках применительно к цилиндрическим и тороидальным решеткам ранее не рассматривались. Кроме того, существование пределов корней mn-ой степени из количества максимальных независимых множеств в $m \times n$-решетках также не было доказано. Таким образом, настоящая работа является дальнейшим развитием перечислительной комбинаторики.

Ключевые слова: независимое множество, граф-решетка, производящая функция, предельная теорема.

1. Введение

Исследованию асимптотики количества (максимальных) независимых множеств в графах из параметрически заданных классов посвящено значительное количество работ ([1],[2],[3]). Так, А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко в работе [1] получили асимптотику количества двоичных кодов с расстоянием 2 (т.е. числа независимых множеств в n-мерном двоичном кубе). П. Киршинхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в работе [2] существование таких констант $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$ $(\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2})$, что для $T_{q,n}$ — полного q-арного дерева высоты n при $q \in \{2,3,4\}$ и при $n \longrightarrow \infty$ выполнена асимптотика $i(T_{q,n}) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$ и при любом $q \geq 5$ при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики $i(T_{q,2k}) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}$ и $i(T_{q,2k+1}) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}$. Д. С. Талецкий и Д. С. Малышев в работе [3] доказали существование таких констант β_q, α_2 и таких попарно различных констант $\alpha_{q,1}, \alpha_{q,2}, \alpha_{q,3}$, что при $n \longrightarrow \infty$ выполнена асимптотика $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$, а для всех достаточно больших q при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики $mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_{q,1} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_{q,2} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_{q,3} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.

Декартовым произведением $G \times H$ двух графов G и H называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, при этом вершины (u_1, v_1) и (u_2, v_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$ и $(v_1, v_2) \in E(H)$, либо $v_1 = v_2$ и $(u_1, u_2) \in E(G)$. *Прямоугольной* (соответственно, *цилиндрической* и *тороидальной*) $m \times n$*-решеткой* называется декартово произведение $P_m \times P_n$ (соответственно, $C_m \times P_n$ и $C_m \times C_n$), где P_k и C_k —

[1] **Талецкий Дмитрий Сергеевич**, лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-0966-3903, dmitalmail@gmail.com

простой k-путь и простой k-цикл, соответственно. Прямоугольную (цилиндрическую и тороидальную) $m \times n$-решетку будем обозначать через $Gr_{m,n}$ ($Cyl_{m,n}$ и $Tor_{m,n}$).

Н. Калкин и Г. Вилф в работе [4] доказали, что существует предел $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, равный $1.50403\ldots$, который мы будем обозначать через η. Кроме того, ими были получены производящие функции количества н.м. в прямоугольных решетках ширины $3, 4, 5$. Позднее С. Ох и С. Ли в работе [5] предложили более простое доказательство существования двойного предела $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$.

Автору известны только две работы ([6] и [7]), в которых рассматриваются количественные аспекты м.н.м. в графах-решетках, причем в данных работах рассматриваются только прямоугольные решетки. Р. Эйлер в работе [6] получил производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках ширины $3, 4, 5$. В работе [7] были получены производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках-параллелепипедах с основаниями 2×2, 2×3 и 3×3. В работе [6] ставится вопрос о существовании двойного предела $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, ответ на который получен в данной работе.

В настоящей работе получен явный вид производящих функций количества м.н.м. в цилиндрических и тороидальных решетках ширины $4, 5, 6$. Кроме того, в данной работе показывается существование и равенство пределов $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$.

2. Максимальные независимые множества в цилиндрических и тороидальных решетках

2.1. Понятие оснащенной решетки

Пусть имеется подмножество $W \subseteq V(Cyl_{m,n})$ ($W \subseteq V(Tor_{m,n})$) и вершина $u \in V(Cyl_{m,n}) \setminus W$ ($u \in V(Tor_{m,n}) \setminus W$). Будем говорить, что вершина *u смежна* с W, если хотя бы один из ее соседей принадлежит W. Вершина *u смежна* с W *по вертикали* (*по горизонтали*), если хотя бы один из ее соседей по столбцу (по строке) принадлежит W. Вершина *u смежна* с W *слева* (*справа*), если ее левый (правый) сосед принадлежит W.

Определение 2.1. *Оснащенная цилиндрическая* $m \times n$*-решетка — такое разбиение* (I, I^V, L, R)*, возможно с пустыми частями, множества* $V(Cyl_{m,n})$*, что одновременно выполняются следующие условия:*

1. Каждое из множеств I, L, R *является независимым.*

2. Множество I^V *состоит в точности из всех вершин, смежных с* I *по вертикали.*

3. Каждая вершина, не принадлежащая $I \cup I^V$ *и смежная с* I *слева, принадлежит* L*. Левый сосед каждого элемента множества* L*, если он существует, принадлежит множеству* I*.*

4. Каждая вершина, не принадлежащая $I \cup I^V \cup L$ *и смежная с* I *справа, принадлежит* R*. Правый сосед каждого элемента множества* R*, если он существует, принадлежит множеству* I*.*

Отметим, что в оснащенной цилиндрической решетке крайний левый столбец может содержать элементы множества L, а крайний правый столбец может содержать элементы множества R.

Оснащенную цилиндрическую $m \times 1$-решетку назовем *оснащенным столбцом.* Более подробно, *оснащенный столбец* — разбиение множества $V(Cyl_{m,1})$ на части I, I^V, L, R (некоторые из которых могут быть пустыми) такое, что каждое из множеств I, L, R является независимым и множество I^V состоит в точности из всех вершин, смежных с I.

Оснащенную цилиндрическую решетку назовем L*-решеткой* (R*-решеткой*), если ее крайний левый (крайний правый) столбец не содержит элементов множества L (множества R). Назовем LR*-решеткой* такую решетку, которая одновременно является L-решеткой и R-решеткой.

Определение *оснащенной тороидальной* $m \times n$*-решетки* повторяет определение оснащенной цилиндрической $m \times n$-решетки с той лишь разницей, что разбивается множество $V(Tor_{m,n})$.

2.2. Перечисление максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках

Лемма 2.1. *Для любых $m \geq 1$ и $n \geq 1$ количество всех LR-решеток размера $m \times n$ равно $mi(Cyl_{m,n})$.*

Доказательство. Пусть имеется LR-решетка (I_1, I_1^V, L, R) размера $m \times n$. Покажем, что н.м. I_1 графа $Cyl_{m,n}$ является максимальным. Рассмотрим произвольную вершину $w \in V(Cyl_{m,n})$, не входящую в I_1. Тогда, эта вершина входит в одно из множеств I_1^V, L, R. Если $w \in L$, то w не принадлежит крайнему левому столбцу решетки, а если $w \in R$, то w не принадлежит крайнему правому столбцу решетки. Значит, w смежна с I_1, откуда следует максимальность множества I_1.

Пусть теперь имеется м.н.м. I_2 графа $Cyl_{m,n}$. Построим четверку (I_2, I_2^V, L, R), которая является разбиением множества $V(Cyl_{m,n})$, возможно с пустыми частями. Рассмотрим произвольную вершину $w \in V(Cyl_{m,n})$, не входящую в I_2. В силу максимальности I_2, вершина w смежна с I_2. Если w смежна с I_2 по вертикали, то $w \in I_2^V$. Если w не смежна с I_2 по вертикали, но смежна слева, то $w \in L$. Наконец, если w не смежна с I_2 по вертикали и слева, то $w \in R$. Таким образом, для (I_2, I_2^V, L, R) выполняются все требования пунктов 2–4 определения оснащенной цилиндрической решетки.

Ясно, что крайний левый (соответственно, крайний правый) столбец четверки (I_2, I_2^V, L, R) не содержит элементов множества L (соответственно, элементов множества R), по правилам ее построения. Если $n = 1$, то $L = R = \emptyset$. Пусть $n \geq 2$. Никакие два элемента множества L не могут быть смежны по горизонтали по правилу построения L из предыдущего абзаца. То же верно и для множества R. Никакие два элемента множества L не могут быть смежны по вертикали, иначе их левые соседи принадлежат I_2 и поэтому I_2 не будет независимым. То же верно и для множества R. Тем самым, L и R являются независимыми. Поэтому (I_2, I_2^V, L, R) — LR-решетка. Лемма доказана.
Доказательство закончено.

По аналогии с доказательством Леммы 2.1 нетрудно доказать справедливость следующего утверждения:

Лемма 2.2. *Для любых $m \geq 1$ и $n \geq 3$ количество всех оснащенных тороидальных $m \times n$-решеток равно $mi(Tor_{m,n})$.*

Будем говорить, что оснащенная цилиндрическая решетка имеет вид $(J', \ldots, J'')$, если самым левым ее столбцом является J', а самым правым является J''. Такое же обозначение будем использовать и для оснащенной тороидальной решетки, имея в виду, что ее столбцы $J', \ldots, J''$ проходятся по часовой стрелке.

Пусть $J_1, \ldots, J_{\alpha_m}$ — всевозможные оснащенные столбцы высоты m. Составим булеву матрицу $\mathbf{T}_m$ размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент t_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — оснащенная цилиндрическая решетка. Кроме того, составим булеву матрицу $\mathbf{S}_m$ размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент s_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — L-решетка. Составим булеву матрицу $\mathbf{F}_m$ размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент f_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — R-решетка.

Через $\mathbf{1}$ мы будем обозначать вектор, состоящий из одних единиц, размер которого будет ясен из контекста. Через $\mathbf{I}$ мы будем обозначать единичную матрицу, размер которой будет ясен из контекста.

Теорема 2.1. *Для любых $m \geq 1, n \geq 3$ верно равенство $mi(Cyl_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{n-3} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$, где $(\mathbf{T}_m)^0 = \mathbf{I}$.*

Доказательство. Введем обозначение $\mathbf{L}_m^{(k)} = \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^k$ и обозначим за $l_{ab}^{(k)}$ элемент матрицы $\mathbf{L}_m^{(k)}$, стоящий в a-ой строке и b-ом столбце. Покажем по индукции, что для любого $k \geq 2$ количество L-решеток размера m на k вида $(J_a, \ldots, J_b)$ равно $l_{ab}^{(k-2)}$. При $k = 2$ утверждение очевидно, поскольку $l_{ab}^{(0)} = s_{ab}$. Пусть мы доказали, что существует ровно $l_{ab}^{(k-1)}$ L-решеток размера m на $k+1$ вида $(J_a, \ldots, J_b)$. Поскольку $\mathbf{L}_m^{(k)} = \mathbf{L}_m^{(k-1)} \cdot \mathbf{T}_m$, то имеет место равенство $l_{ab}^{(k)} = \sum\limits_{p=1}^{\alpha_m} l_{ap}^{(k-1)} \cdot t_{pb}$. Каждое слагаемое этой суммы равно количеству L-решеток размера m на $k+2$ вида $(J_a, \ldots, J_p, J_b)$. Тогда вся сумма равна количеству L-решеток размера m на $k+2$ вида $(J_a, \ldots, J_b)$. Значит, сумма всех элементов матрицы $\mathbf{L}_m^{(k-2)}$, равная $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{k-2} \cdot \mathbf{1}^\top$, совпадает с количеством всех L-решеток размера m на k.

Теперь рассмотрим матрицу $\mathbf{C}_m^{(k)} = \mathbf{L}_m^{(k)} \cdot \mathbf{F}_m$ и покажем, что ее элемент $c_{ab}^{(k)}$, стоящий в a-ой строке и b-ом столбце, равен количеству LR-решеток вида $(J_a, \ldots, J_b)$ размера m на $k+3$. Действительно, $c_{ab}^{(k)} = \sum\limits_{p=1}^{\alpha_m} l_{ap}^{(k)} \cdot f_{pb}$. Каждое слагаемое этой суммы равно количеству LR-решеток размера m на $k+3$ вида $(J_a, \ldots, J_p, J_b)$ для некоторого оснащенного столбца J_p. Значит, сумма всех элементов матрицы $\mathbf{C}_m^{(n-3)}$, равная $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{n-3} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$, совпадает с количеством всех LR-решеток размера $m \geq 1$ на $n \geq 3$. Отсюда и из Леммы 2.1 следует справедливость теоремы. Теорема доказана.
Доказательство закончено.

Напомним, что *произведением Адамара* двух матриц $\mathbf{X} = (x_{ij})$ и $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ одинакового размера называется матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \mathbf{Y} = (z_{ij})$ такая, что $z_{ij} = x_{ij} \cdot y_{ij}$.

Теорема 2.2. *Для любых $m \geq 1, n \geq 2$ имеет место равенство $mi(Tor_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^{n-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$.*

Доказательство. Действуя по аналогии с рассуждениями из доказательства Теоремы 2.1 нетрудно по индукции показать, что для любого $k \geq 2$ количество оснащенных цилиндрических $m \times k$-решеток вида $(J_a, \ldots, J_b)$ равно элементу матрицы $(\mathbf{T}_m)^{k-1}$, который стоит на пересечении a-ой строки и b-ого столбца. Поэтому для любого $k \geq 2$ количество оснащенных тороидальных $m \times k$-решеток вида $(J_a, \ldots, J_b)$ равно элементу

матрицы $(\mathbf{T}_m)^{k-1} \circ \mathbf{T}_m^\top$, который стоит на пересечении a-ой строки и b-ого столбца. Отсюда и Леммы 2.2 следует, что $mi(Tor_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^{n-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$ для любых $m \geq 1, n \geq 2$. Теорема доказана.
Доказательство закончено.

Напомним, что *производящей функцией* числовой последовательности $\{a_n\}_{n \geq 0}$ называется функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Ясно, что $mi(Cyl_{1,1}) = mi(Tor_{1,1}) = 1$ и $mi(Cyl_{1,2}) = mi(Cyl_{2,1}) = mi(Tor_{1,2}) = mi(Tor_{2,1}) = 2$. Найдя явный вид матрицы $\mathbf{T}_1$ и применив Теорему 2.2, для любого $n \geq 3$ можно вычислить a_n, где $a_n = mi(Cyl_{n,1}) = mi(Tor_{1,n}) = mi(Tor_{n,1})$. Очевидно, что $mi(Cyl_{2,2}) = mi(Tor_{2,2}) = 2$. Найдя явный вид матриц $\mathbf{T}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{F}_2$ и применив Теорему 2.2, для любого $n \geq 2$ можно вычислить b_n, где $b_n = mi(Cyl_{n,2}) = mi(Tor_{2,n}) = mi(Tor_{n,2})$. В работе [6] описан механизм вычисления $mi(Cyl_{1,n})$ и $mi(Cyl_{2,n})$ для любого $n \geq 3$. Поэтому далее рассматриваются «сдвинутые» производящие функции количества м.н.м. в цилиндрических и тороидальных решетках.

Для фиксированного $m \geq 1$ через $cyl_m(x)$ и $tor_m(x)$ обозначим функции $\sum\limits_{n=0}^{\infty} mi(Cyl_{m,n+3}) \cdot x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} mi(Tor_{m,n+2}) \cdot x^{n+1}$, соответственно.

Следствие 2.1. *Справедливы равенства* $cyl_m(x) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$ *и* $tor_m(x) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$.

Доказательство. Имеет место равенство:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_m \cdot x + (\mathbf{T}_m)^2 \cdot x^2 + \ldots .$$

Домножим обе части равенства слева на произведение $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m$, а справа на произведение $\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$. По Теореме 2.1 имеем

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top = \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{T}_m \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^2 \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} mi(Cyl_{m,n}) \cdot x^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} mi(Cyl_{m,n+3}) \cdot x^n = cyl_m(x).$$

Заметим, что $\mathbf{I} \circ \mathbf{T}_m^\top$ — матрица из одних нулей ввиду определения произведения Адамара и независимости каждого из множеств I, R, L. Учитывая этот факт и Теорему 2.2, домножим обе части разложения для $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1}$ справа на матрицу $\mathbf{T}_m^\top$, после этого домножим их слева на $\mathbf{1}$, а справа на $\mathbf{1}^\top$

$$\mathbf{1} \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top = \mathbf{1} \cdot [\mathbf{I} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top + (\mathbf{1} \cdot [\mathbf{T}_m \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x + (\mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^2 \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} mi(Tor_{m,n+2}) \cdot x^{n+1} = tor_m(x)$$

Следствие доказано.
Доказательство закончено.

2.3. Производящие функции

Случай m=4

В Таблице 1 представлены все оснащенные столбцы высоты 4. Здесь и далее через I (I^V, L, R) обозначается вершина столбца, принадлежащая множеству I (I^V, L, R).

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}
I	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V	L	R
I^V	I	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L
I	I^V	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R
I^V	I	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V	I	I	R	L

Таблица 1: Оснащенные столбцы высоты 4

В Таблице 2 представлены матрицы $\mathbf{T}_4, \mathbf{S}_4, \mathbf{F}_4$. В столбце с номером k указаны все такие номера l, что элемент t_{kl} (соответственно, s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	$\mathbf{T}_4$	$\mathbf{S}_4$	$\mathbf{F}_4$
1	2,5,10,11	2,5,10,11	2,5
2	1,4,8,12	1,4,8,12	1
3	2,6,7,10	$\emptyset$	2,7
4	7	7	7
5	1,4,8,9	$\emptyset$	1,9
6	9	9	9
7	2,3,6,10	$\emptyset$	2,3
8	3	3	3
9	1,4,5,8	$\emptyset$	1,5
10	5	5	5
11	2	$\emptyset$	2
12	1	$\emptyset$	1

Таблица 2: Матрицы $\mathbf{T}_4, \mathbf{S}_4, \mathbf{F}_4$

По Таблицам 1, 2 и Следствию 2.1 производящая функция для числа цилиндрических решеток ширины 4 равна

$$cyl_4(x) = \frac{-12x^2 - 22x - 16}{2x^3 + 3x^2 + x - 1} = 16 + 38x + 98x^2 + 244x^3 + 614x^4 + 1542x^5 + O(x^6).$$

По Таблицам 1, 2 и Следствию 2.1 производящая функция для числа тороидальных решеток ширины 4 равна

$$tor_4(x) = \frac{40x^8 + 32x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 6x}{-4x^9 - 4x^8 + x^7 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 1} = 6x + 18x^2 + 42x^3 + 90x^4 + O(x^5).$$

Случай m=5

В Таблице 3 представлены все оснащенные столбцы высоты 5.

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}
I	I	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V
I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R
I	I^V	I^V	I^V	I	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L
I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I

Таблица 3: Оснащенные столбцы высоты 5

В Таблице 4 представлены матрицы $\mathbf{T}_5, \mathbf{S}_5, \mathbf{F}_5$. В столбце с номером k указаны все такие номера l, что элемент t_{kl} (s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	$\mathbf{T}_5$	$\mathbf{S}_5$	$\mathbf{F}_5$
1	3,4,12,15	3,4,12,15	3,4
2	4,5,8,11	4,5,8,11	4,5
3	1,5,7,14	1,5,7,14	1,5
4	1,2,10,13	1,2,10,13	1,2
5	2,3,6,9	2,3,6,9	1,3
6	3,12	$\emptyset$	3
7	5,11	$\emptyset$	5
8	5,14	$\emptyset$	5
9	2,13	$\emptyset$	2
10	2,6	$\emptyset$	2
11	4,15	$\emptyset$	4
12	4,8	$\emptyset$	4
13	1,7	$\emptyset$	1
14	1,10	$\emptyset$	1
15	3,9	$\emptyset$	3

Таблица 4: Матрицы $\mathbf{T}_5, \mathbf{S}_5, \mathbf{F}_5$

По Таблицам 3, 4 и Следствию 2.1 производящая функция для числа цилиндрических решеток ширины 5 равна

$$cyl_5(x) = \frac{30}{1-3x} = 30 + 90x + 270x^2 + 810x^3 + 2430x^4 + 7290x^5 + O(x^6).$$

По Таблицам 3, 4 и Следствию 2.1 производящая функция для числа тороидальных решеток ширины 5 равна

$$tor_5(x) = \frac{-30x^5 + 60x^4 - 10x^2 - 10x}{3x^6 - 7x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 1} = 10x + 30x^2 + 90x^3 + 220x^4 + 760x^5 + O(x^6).$$

Случай m=6

В Таблицах 5 и 6 представлены все оснащенные столбцы высоты 6.

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}	J_{16}	J_{17}
I	I^V	I	I^V	I^V	I	I	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V
I^V	I	I^V	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I	I	I^V	I^V	L	R
I	I^V	I^V	I^V	I	I	I	L	R	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	L	R	I^V	I^V	I	I
I	I^V	I^V	I	I^V	L	R	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I	I^V	I^V	I	I^V	I^V	I^V	I^V	L	R	I	I	I^V	I^V	I	I

Таблица 5: Оснащенные столбцы высоты 6

J_{18}	J_{19}	J_{20}	J_{21}	J_{22}	J_{23}	J_{24}	J_{25}	J_{26}	J_{27}	J_{28}	J_{29}	J_{30}	J_{31}
I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	L	R
I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	R	L
L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R
R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L
L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R
I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	R	L

Таблица 6: Оснащенные столбцы высоты 6, продолжение

В Таблицах 7, 8 представлены матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$. В столбце с номером k указаны все такие номера l, что элемент t_{kl} (соответственно, s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	$\mathbf{T}_6$	$\mathbf{S}_6$	$\mathbf{F}_6$
1	2,11,13,17,21,25,29,30	2,11,13,17,21,25,29,30	2
2	1,7,9,15,23,27,31	1,7,9,15,23,27,31	1
3	4,5,12,14	4,5,12,14	4,5,12,14
4	3,5,6,16	3,5,6,16	3,5,6,16
5	3,4,8,10	3,4,8,10	3,4,8,10
6	2,4,11,13,17,25,26,29	$\emptyset$	2,4
7	4,26	4,26	4
8	2,5,11,13,17,21,22,25	$\emptyset$	2,5
9	5,22	5,22	5
10	1,5,7,9,15,19,27,28	$\emptyset$	1,5
11	5,28	5,28	5
12	1,3,7,9,15,23,24,27	$\emptyset$	1,3
13	3,24	3,24	3
14	2,3,11,13,17,18,21,29	$\emptyset$	2,3
15	3,18	3,18	3
16	1,4,7,9,15,19,20,23	$\emptyset$	1,4
17	4,20	4,20	4

Таблица 7: Матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$

	$\mathbf{T}_6$	$\mathbf{S}_6$	$\mathbf{F}_6$
18	2,11,17,25	$\emptyset$	2
19	14	$\emptyset$	14
20	1,9,15,27	$\emptyset$	1
21	16	$\emptyset$	16
22	2,13,17,29	$\emptyset$	2
23	8	$\emptyset$	8
24	1,7,9,19	$\emptyset$	1
25	12	$\emptyset$	12
26	2,11,13,21	$\emptyset$	2
27	6	$\emptyset$	6
28	1,7,15,23	$\emptyset$	1
29	10	$\emptyset$	10
30	2	$\emptyset$	2
31	1	$\emptyset$	1

Таблица 8: Матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$, продолжение

По Таблицам 5–8 и Следствию 2.1 производящая функция $cyl_6(x)$ для числа цилиндрических решеток ширины 6 равна дроби $\frac{A}{B}$, где $A = 40x^{21} + 110x^{20} + 124x^{19} + 126x^{18} + 120x^{17} + 61x^{16} + 468x^{15} - 325x^{14} - 1021x^{13} + 13x^{12} - 1017x^{11} + 593x^{10} - 669x^9 - 1629x^8 + 337x^7 + 1220x^6 - 659x^5 - 1327x^4 - 126x^3 + 292x^2 + 211x + 82, B = -2x^{22} - 5x^{21} - 5x^{20} - 5x^{19} - 4x^{18} - x^{17} - 23x^{16} + 26x^{15} + 49x^{14} - 15x^{13} + 50x^{12} - 41x^{11} + 40x^{10} + 81x^9 - 54x^8 - 54x^7 + 61x^6 + 52x^5 - 14x^4 - 17x^3 - 7x^2 - x + 1$.

По Таблицам 5–8 и Следствию 2.1 производящая функция $tor_6(x)$ для числа тороидальных решеток ширины 6 равна дроби $\frac{A}{B}$, где $A = -58x^{30} - 196x^{29} - 216x^{28} - 178x^{27} - 184x^{26} - 115x^{25} - 800x^{24} - 141x^{23} + 2310x^{22} - 223x^{21} + 332x^{20} + 417x^{19} - 444x^{18} + 6607x^{17} - 2524x^{16} - 2477x^{15} + 2366x^{14} + 1946x^{13} + 2832x^{12} - 2485x^{11} - 2674x^{10} + 3515x^9 + 2136x^8 - 2121x^7 - 946x^6 + 768x^5 + 348x^4 - 61x^3 - 66x^2 - 20x, B = 2x^{31} + 7x^{30} + 8x^{29} + 7x^{28} + 9x^{27} + 9x^{26} + 35x^{25} + 6x^{24} - 95x^{23} + 20x^{22} - 10x^{21} - 25x^{20} + 21x^{19} - 351x^{18} + 160x^{17} + 144x^{16} - 165x^{15} - 127x^{14} - 202x^{13} + 201x^{12} + 229x^{11} - 346x^{10} - 229x^9 + 263x^8 + 133x^7 - 128x^6 - 70x^5 + 15x^4 + 22x^3 + 10x^2 - 1$.

3. Предельные теоремы для количества (максимальных) независимых множеств в графах-решетках

Напомним, что в работе [4] было установлено, что $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \eta = 1.50403\ldots$. Далее мы доказываем несколько более общий факт.

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \eta.$$

Доказательство. Докажем, что $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$. Действительно, справедливы соотношения:

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{(m+2)(n+2)}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}((i(Gr_{m,n})^{\frac{1}{mn}})^{\frac{1}{1+\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{4}{mn}}} =$$

$$= (\eta)^1 = \eta.$$

Теперь воспользуемся тем, что при любых $m, n \geq 3$ выполнено неравенство $i(Gr_{m-2,n-2}) \leq i(Tor_{m,n}) \leq i(Cyl_{m,n}) \leq i(Gr_{m,n})$. Отсюда и из доказанного выше утверждения следует справедливость утверждения теоремы. Теорема доказана.
Доказательство закончено.

Известная лемма Фекете утверждает, что если последовательность a_n неотрицательных чисел является *субаддитивной*, то есть для любых m, n выполняется неравенство $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, то последовательность $\frac{a_n}{n}$ сходится к величине $\inf\{\frac{a_n}{n}\}$. Воспользуемся одним из обобщений этой леммы (см. [5]).

Лемма 3.1. *Пусть двойная последовательность $\{a_{m,n}\}$, такая что $a_{m,n} \geq 1$, удовлетворяет двойным неравенствам $a_{m_1+m_2,n} \leq a_{m_1,n} \cdot a_{m_2,n} \leq a_{m_1+m_2+1,n}$ и $a_{m,n_1+n_2} \leq a_{m,n_1} \cdot a_{m,n_2} \leq a_{m,n_1+n_2+1}$ для произвольных m, m_1, m_2, n, n_1, n_2. Тогда верно равенство*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(a_{m,n})^{\frac{1}{mn}} = \inf_{m,n}(a_{m,n})^{\frac{1}{mn}} = \sup_{m,n}(a_{m,n})^{\frac{1}{(m+1)(n+1)}}$$

при условии, что супремум существует.

Независимое множество прямоугольной $m \times n$-решетки назовем *внутренне максимальным*, если оно является максимальным во внутренней прямоугольной $(m-2)\times(n-2)$-подрешетке. Обозначим за $mi'(Gr_{m,n})$ количество внутренне максимальных независимых множеств в прямоугольной решетке размера $m \times n$.

Лемма 3.2. *Существует двойной предел $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi'(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa$.*

Доказательство. Применим Лемму 3.1, положив $a_{m,n} = mi'(Gr_{m,n})$. Проверим выполнение первого неравенства. Понятно, что $(m_1 + m_2) \times n$-решетка разбивается на $(m_1 \times n)$-решетку и $(m_2 \times n)$-решетку. Поэтому любое внутренне максимальное множество $(m_1 + m_2) \times n$-решетки может быть разбито на два подмножества, каждое из которых также будет внутренне максимальным либо в $(m_1 \times n)$-решетке, либо в $(m_2 \times n)$-решетке. Следовательно, выполняется левая часть неравенства. Правое неравенство выполняется, поскольку объединение любого внутренне максимального множества $(m_1 \times n)$-решетки и любого внутренне максимального множества $(m_2 \times n)$-решетки может быть продолжено до некоторого внутренне максимального множества $(m_1+m_2+1)\times n$-решетки. Выполнение второго неравенства проверяется по аналогии.
Доказательство закончено.

В работе [6] был поставлен вопрос о существовании пределов $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$. В данной работе мы доказываем их существование и равенство.

Теорема 3.2. *Имеет место равенство:*

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n\longrightarrow\infty}(mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa.$$

Доказательство. Поскольку для любых $m, n \geq 3$ имеет место неравенство

$$mi'(Gr_{m-2,n-2}) \leq mi(Tor_{m,n}) \leq mi(Cyl_{m,n}) \leq mi(Gr_{m,n}) \leq mi'(Gr_{m+2,n+2}),$$

то достаточно доказать, что $\lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi'(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim\limits_{m,n\longrightarrow\infty}(mi'(Gr_{m+2,n+2}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa$. Это легко проверить по аналогии с рассуждениями из доказательства Теоремы 3.1. Теорема доказана.

Доказательство закончено.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

Список литературы

1. А. Д. Коршунов, А. А. Сапоженко, “О числе двоичных кодов с расстоянием 2”, *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 103–130.

2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

3. Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, “О количестве максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях”, *Дискретная математика*, **28**:4 (2016), 139–149.

4. N. J. Kalkin, H. S. Wilf, “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM Journal of Discrite Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.

5. S. Oh, S. Lee, “Enumerating independent vertex sets in grid graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.

6. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.

7. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Поступила 18.04.2017

MSC2010 05C30

On generating functions and limit theorems connected with maximal independent sets in grid graphs

© **D. S. Taletskii**[2]

Abstract. In this paper we study some quantitative characteristics of maximal independent sets in grid graphs using methods of combinatorial analysis, enumerative combinatorics, mathematical analysis and linear algebra. We obtain the explicit generating functions for the number of maximal independent sets in cylindrical and toroidal lattices of width 4, 5, 6. We prove that the limits of mn-th root of the number of (maximal) independent sets in rectangular, cylindrical and toroidal $m \times n$-lattices exist and that they are equal. Nobody studied the quantitative characteristics of maximal independent sets in grid graphs with respect to cylindrical and toroidal lattices before. Also nobody proved the existence of the limits of mn-th root of the number of maximal independent sets in grid graphs. Thus, our paper is a further development of enumerative combinatorics.

Key Words: independent set, grid graph, generating function, limit theorem.

References

1. A. D. Korshunov, A. A. Sapozhenko, "[On the number of binary codes with distance two]", *Problemy kibernetiki*, **40** (1983), 103–130 (In Russ).

2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, "Fibonacci numbers of graphs: II", *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

3. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, "[On the number of maximal independent sets in complete q-ary trees]", *Diskretnya Matematika*, **28**:4 (2016), 139–149 (In Russ).

4. N. J. Kalkin, H. S. Wilf, "The number of independent sets in a grid graph", *SIAM Journal of Discrite Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.

5. S. Oh, S. Lee, "Enumerating independent vertex sets in grid graphs", *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.

6. R. Euler, "The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences", *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.

7. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, "Counting maximal distance-independent sets in grid graphs", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Submitted 18.04.2017

[2] **Dmitry S. Taletskii**, laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-0966-3903, dmitalmail@gmail.com