DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.098-104

УДК 519.17

Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k-раскраске

© **Д. В. Сироткин**[1]

Аннотация. В данной работе вводится некоторый класс замен подграфов в графах, причем замены из этого класса сохраняют k-раскрашиваемость. Каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном – набором разбиений множества на его подмножества. Показывается, что заменяющий подграф существует для любого шаблона, а также приводится оценка на количество его вершин в зависимости от размера шаблона. Данный результат является основным в работе, для его получения были использованы методы теории графов и комбинаторного анализа. Рассматриваемый в работе класс преобразований может быть полезен при построении полиномиальных сведений для задачи о k-раскраске. В частности, вместе с основным результатом работы, он может быть использован при редукции данных для решения задачи о k-раскраске.

Ключевые слова: задача о k-раскраске, локальное преобразование, задача реализации, функция Шеннона.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т.е. непомеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $G[V']$ обозначается подграф графа G, порожденный V', а через $G \setminus V'$ результат удаления всех элементов V' из графа G. Для натуральных чисел a и b через $\overline{a,b}$ обозначается множество $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n.

Классические понятия независимого множества, наибольшего независимого множества, числа независимости $\alpha(G)$ графа G представлены, например, в [1]. Там же определяется задача о независимом множестве.

В [2] рассматривался достаточно общий класс локальных преобразований графов, названных *схемами замен*, при которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что принципиальных изменений не произойдёт, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу. В данной работе рассматривается некоторый подкласс класса схем замен, который будет определен далее.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H-отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Пусть граф G содержит порожденный подграф G_1 с G_1-отделяющим множеством A, G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$.

[1] **Сироткин Дмитрий Валерьевич**, лаборант, лаборатория теории и практики систем поддержки принятия решений, ФГАОУ ВО "НИУ ВШЭ" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2682-9867, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

Определение 1.1. *Замена G_1 на G_2 в графе G* состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G)\setminus V(G_1))\cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G)\setminus E(G_1))\cup E(G_2)$.

Определение 1.2. Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются *α-подобными относительно* $A\subseteq V(G_1)\cap V(G_2)$, если существует такая константа c, что для любого $X\subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1\setminus X)=\alpha(G_2\setminus X)+c$.

Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются α-подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1,A)=\mathfrak{M}_\alpha(G_2,A)$, где $\mathfrak{M}_\alpha(H,A)$ — семейство всех таких множеств $X\subseteq A$, что для всякого $Y\subset X$ выполняется неравенство $\alpha(H\setminus X)<\alpha(H\setminus Y)$. Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть графы G_1 и G_2 являются α-подобными относительно $A\subseteq V(G_1)\cap V(G_2)$, причем A является G_1-отделяющим в графе G. Тогда если граф G^*_α — результат замены G_1 на G_2 в графе G, то $\alpha(G^*_\alpha)=\alpha(G)+\alpha(G_2)-\alpha(G_1)$.*

Интерес к схемам замен обусловлен потенциальной возможностью их применения для редукции графов, что может быть полезным при решении задачи о независимом множестве в некоторых классах графов [3]–[8]. Применительно к нашим заменам также интересны следующие задачи реализации и оптимизации. *Задача реализации* для заданного множества $\mathcal{M}\subseteq 2^A$ состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли граф G и подмножество $A\subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha(G,A)=\mathcal{M}$. *Задача оптимизации* для заданных G и $A\subseteq V(G)$ состоит в поиске такого графа H с минимальным количеством вершин, что $A\subseteq V(H)$ и $\mathfrak{M}_\alpha(G,A)=\mathfrak{M}_\alpha(H,A)$.

Задача реализации имеет положительное решение далеко не для любого $\mathcal{M}$. Это так, например, для $\mathcal{M}=\{\{a,b\},\{a\}\}$. Действительно, соотношения $\alpha(G\setminus\{b\})=\alpha(G\setminus\{a\})=\alpha(G)-1, \alpha(G\setminus\{b\})=\alpha(G\setminus\{a,b\})-1, \alpha(G\setminus\{a\})=\alpha(G\setminus\{a,b\})$ одновременно не совместны. Для задачи о независимом множестве задача реализации кажется достаточно сложной, а задача оптимизации представляется еще более трудной. В настоящей работе рассматриваются локальные преобразования, а также задачи реализации и оптимизации применительно к задаче о раскраске. Классические понятия k-раскраски, k-раскрашиваемого графа и задачи о k-раскраске представлены в [1].

Можно говорить о k-раскраске подмножества $A\subseteq V(G)$, имея в виду частичную k-раскраску подграфа $G[A]$, а также о ее продолжении на k-раскраску всего графа G. Можно также говорить о том, что любая k-раскраска подмножества A или графа G задается некоторым разбиением A или $V(G)$ на не более чем k независимых множеств.

Определение 1.3. Будем говорить, что графы H_1 и H_2 являются *(χ,k)-подобными относительно* $A\subseteq V(H_1)\cap V(H_2)$, если для любых k-раскрасок c_1 и c_2, соответственно, графов H_1 и H_2 существуют k-раскраски c'' и c', соответственно, графов H_2 и H_1 такие, что для любой вершины $v\in A$ справедливы равенства $c_1(v)=c''(v)$ и $c_2(v)=c'(v)$.

Для заданных графа G и подмножества $A\subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G,A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений A на не более чем k непустых частей, каждое из которых не продолжается до k-раскраски G. Отметим, что если некоторое разбиение A не задает k-раскраску данного подмножества, то оно заведомо не продолжается до k-раскраски G. Нетрудно видеть, что графы H_1 и H_2 являются (χ,k)-подобными относительно $A\subseteq V(H_1)\cap V(H_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H_1,A)=\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H_2,A)$.

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, H_1 и H_2 являются (χ, k)-подобными относительно A. Предположим, что граф H содержит порожденный подграф H_1 с H_1-отделяющим множеством A. Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.2. *Если граф $H^*_{(\chi,k)}$ — результат замены H_1 на H_2 в графе H, то граф H является k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $H^*_{(\chi,k)}$.*

Лемма 1.2 обуславливает интерес к задачам реализации и оптимизации для задачи о k-раскраске. В данной работе задача реализации решается полностью. Именно, будет показано, что для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$.

Задачу оптимизации поставим следующим образом. Для заданных натуральных чисел $m, n, k \geq 3$ определим функцию шенноновского типа $f_\chi(m, n, k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1,n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m, n, k) = \max\limits_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где $g_\chi(\varrho) = \min\limits_{\{H:\ \overline{1,n} \subseteq V(H),\ \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H, \overline{1,n}) = \varrho\}} |V(H)|$. В данной работе будет показано, что $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

2. Результаты работы

Пусть a — натуральное число, а b — целое неотрицательное число. Обозначим через $E_{a,b}$ граф, который получается из полного графа на вершинах $v, v_1, \ldots, v_{a+b}$ и пустого графа на вершинах $u, u_1, \ldots, u_b$ добавлением всевозможных ребер вида uv_i и $u_j v_{a+j}$, где $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$. Вершину v назовем *верхней*, а вершины $u, u_1, \ldots, u_b$ назовем *нижними*.

Лемма 2.1. *Для любых $k \geq 3$ и $1 \leq a \leq k-1$ справедливы следующие утверждения:*

а) в любой k-раскраске графа $E_{a,k-1-a}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние;

б) любая k-раскраска верхней и всех нижних вершин графа $E_{a,k-1-a}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k-раскраски всего графа.

Доказательство. Первый пункт очевиден, поскольку все вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$ должны иметь разные цвета, каждый из которых отличен от цвета нижних вершин. Поскольку цвет вершины v отличен от цветов каждой из вершин $v_1, \ldots, v_{k-1}$, то он совпадает с цветом нижних вершин.

Для доказательства второго пункта применим индукцию по параметру k. Утверждение очевидно, когда $k = 3$. Предположим, что оно справедливо для некоторого k. Докажем его справедливость для $k+1$.

Рассмотрим отдельно случай графа $E_{k-1,1}$. Пусть c — его частичная $(k+1)$-раскраска, в которой $c(u) = 1, c(u_1) = 2$ и $c(v) = x$. Если $x = 1$, то можно назначить $c(v_1) = 2$ и

$c(v_i) = i+1$ для любого $i \in \overline{2,k}$. Если $x = 2$, то можно назначить $c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i+2$ для любого $i \in \overline{1,k-1}$. Если же $x \notin \{1,2\}$, то можно считать, что $x = k+1$, и можно назначить $c(v_1) = 2, c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i+1$ для любого $i \in \overline{2,k-1}$.

Далее мы будем считать, что в графе $E_{a,k-a}$ выполнены неравенства $2 \le k-a \le k-1$. Поскольку некоторая $(k+1)$-раскраска c' вершин $u, u_1, \ldots, u_{k-a}$ не является одноцветной и т. к. $2 \le k-a \le k-1$, то существует такая вершина u_i и такой цвет $col \in \overline{1,k+1}$, что c' не является одноцветной на $\{u, u_1, \ldots, u_{k-a}\} \setminus \{u_i\}$ и $col \notin \{c'(u), c'(u_1), \ldots, c'(u_{k-a})\}$. Не уменьшая общности можно считать, что $i = k-a$. Удалив из графа $E_{a,k-a}$ вершины v_k и u_{k-a}, мы получим порожденный подграф $E_{a,k-1-a}$. К нему можно применить предположение индукции. Если $\{c'(v), c'(u), c'(u_1), \ldots, c'(u_{k-a})\} \neq \overline{1,k+1}$, то можно предполагать, что $col \neq c'(v)$. Но тогда соответствующая k-раскраска подграфа $E_{a,k-1-a}$ продолжается до $(k+1)$-раскраски всего графа $E_{a,k-a}$ окрашиванием вершины v_k в цвет col независимо от цвета $c'(u_{k-a})$. Остается рассмотреть случай, когда $a = 1, c'(u) = 1, c'(u_1) = 2, \ldots, c'(u_{k-1}) = k, c'(v) = k+1$. Но тогда для каждого $i \in \overline{1,k}$ вершине v_i можно назначить цвет $(i+1) \mod n$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для любых заданных натуральных чисел $k \ge 3$ и l рекурсивно определим граф $H_{k,l}$, а также его верхнюю и l нижних вершин:

i) Если $1 \le l \le k-1$, то граф $H_{k,l}$ изоморфен графу $E_{k-l,l-1}$, верхняя вершина графа $H_{k,l}$ совпадает с верхней вершиной графа $E_{k-l,l-1}$, множества нижних вершин графов $H_{k,l}$ и $E_{k-l,l-1}$ совпадают.

ii) Пусть $l \ge k$. Тогда граф $H_{k,l}$ получается из графа $H_{k,\lceil \frac{l}{k-1} \rceil}$ отождествлением каждой из его $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ первых нижних вершин с верхней вершиной графа $E_{1,k-2}$ и отождествлением возможной оставшейся нижней вершины с верхней вершиной графа $E_{k-l+(k-1)\cdot\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1)\cdot\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$. Верхние вершины графов $H_{k,l}$ и $H_{k,\lceil \frac{l}{k-1} \rceil}$ совпадают, множество нижних вершин графа $H_{k,l}$ совпадает с объединением совокупности нижних вершин всех $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ экземпляров графа $E_{1,k-2}$ и множества нижних вершин возможного экземпляра графа $E_{k-l+(k-1)\cdot\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1)\cdot\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$.

Исходя из справедливости Леммы 2.1 и правил построения графа $H_{k,l}$, индукцией по параметру l нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 2.2. *Для любых натуральных $k \ge 3$ и l справедливы следующие утверждения:*

а) в любой k-раскраске графа $H_{k,l}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние;

б) любая k-раскраска верхней и всех нижних вершин графа $H_{k,l}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k-раскраски всего графа.

Пусть $\varrho = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$, где для любого i элемент ρ_i является разбиением одного и того же n-элементного множества A на не более чем k непустых частей $A_{i,1}, \ldots, A_{i,j_i}$. Построим некоторый граф, в котором множество A будет независимым. Для любых $i \in \overline{1,m}$ и $j \in \overline{1,j_i}$ построим граф $H_{k,|A_{i,j}|}$ с множеством нижних вершин $A_{i,j}$. Если $j_i \ge$

2, то к полученному графу добавим граф K_{k+1-j_i}, все вершины которого соединим с верхними вершинами соответствующих его подграфов $H_{k,|A_{i,1}|},\ldots,H_{k,|A_{i,j_i}|}$. Полученный таким образом граф обозначим через $G(\varrho)$.

Л е м м а 2.3. *Некоторая k-раскраска множества A графа $G(\varrho)$ продолжается до k-раскраски всего этого графа тогда и только тогда, когда она не задается ни одним из разбиений $\rho_1,\ldots,\rho_m$. Количество вершин в графе $G(\varrho)$ есть $O(m\cdot(k^2\cdot\log_k n+n))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если k-раскраска c множества A задается разбиением ρ_i, то по первой части Леммы 2.2 при любом ее продолжении на весь граф $G(\varrho)$ верхние вершины соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|},\ldots,H_{k,|A_{i,j_i}|}$ будут окрашены в попарно различные цвета. Но тогда соседние им вершины подграфа K_{k+1-j_i} нельзя окрасить в $k-j_i$ цветов. Поэтому c не продолжается до k-раскраски всего графа $G(\varrho)$.

Пусть c' — некоторая k-раскраска множества A, которая не задается ни одним из разбиений $\rho_1,\ldots,\rho_m$. Тогда по второй части Леммы 2.2 для любого i эта раскраска может быть продолжена до k-раскраски каждого из соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|},\ldots,H_{k,|A_{i,j_i}|}$, в которой j_i их верхних вершин окрашены в не более чем j_i-1 различных цветов. Тем самым, вершины соответствующего подграфа K_{k+1-j_i} могут быть раскрашены в $k+1-j_i$ цветов. Поэтому c' продолжается до k-раскраски всего графа $G(\varrho)$.

Оценим количество вершин в графе $G(\varrho)$. Очевидно, что $|V(E_{1,k-2})|=2k-1$ и что $|V(E_{k-l+(k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{k-1}\rfloor,\,l-1-(k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{k-1}\rfloor})|=k+l-(k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{k-1}\rfloor$. Поэтому, по правилам построения графа $H_{k,l}$, справедливо неравенство $|V(H_{k,l})|\le|V(H_{k,\lceil\frac{l}{k-1}\rceil})|+\ (2k-1)\cdot\lfloor\frac{l}{k-1}\rfloor+k+l-\lfloor\frac{l}{k-1}\rfloor\le|V(H_{k,\lceil\frac{l}{k-1}\rceil})|+k+3l$. Поэтому справедливо соотношение $|V(H_{k,l})|=O(k\cdot\log_k l+l)$. Поэтому для любого i общее количество вершин в графах $H_{k,|A_{i,1}|},\ldots,H_{k,|A_{i,j_i}|},K_{k+1-j_i}$ не превосходит $O(j_i\cdot k\cdot\log_k n+n)=O(k^2\cdot\log_k n+n)$. Тем самым, количество вершин в графе $G(\varrho)$ есть $O(m\cdot(k^2\cdot\log_k n+n))$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из Леммы 2.3 следует справедливость следующего утверждения, которое является основным в данной работе.

Т е о р е м а 2.1. *Для любых n и $k\ge 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество вершин $A\subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G,A)=\varrho$. Справедливо соотношение $f_\chi(m,n,k)=O(m\cdot(k^2\cdot\log_k n+n))$.*

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

Список литературы

1. М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, 1982, 416 с.

2. В. Е. Алексеев, В. В. Лозин, "О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости", *Дискретный анализ и исследование операций*, **5**:1 (1998), 3–19.

3. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, "Local transformations of graphs preserving independence number", *Discrete Applied Mathematics*, **135** (2004), 16–29.

4. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, "Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3**:1 (2008), 1–5.

5. B. Lévêque, D. de Werra, "Graph transformations preserving the stability number", *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 2752–2759.

6. V. V. Lozin, "Conic reduction of graphs for the stable set problem", *Discrete Mathematics*, **222**:1–3 (2000), 199–211.

7. V. V. Lozin, "Stability preserving transformations of graphs", *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.

8. D. S. Malyshev, "Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:2 (2013), 221–228.

Поступила 15.04.2017

MSC2010 05C15

Theorems of existence and sufficiency connected with local transformations of graphs for the k-colourability problem

© **D. V. Sirotkin**[2]

Abstract. In the paper we consider some class of subgraphs' replacements in graphs. These while replacements in this class preserve k-colorability. Every local transformantion from this class is defined by a pattern that is a collection of partitions of a set into subsets. The paper shows that a replacing subgraph exists for every pattern. An estimation is given for the number of its vertices depending on size of the pattern. This is the main result of the paper, to obtain it we used methods of graph theory and combinatorial analysis. Said class of replacements might be useful for creating polynomial reductions for the k-colorability problem. In particular, together with main result of the paper one can use it for input reduction for solving the k-colorability problem.

Key Words: k-colourability problem, local transformation, realization problem, Shannon function.

References

1. M. Garey, D. Johnson, *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi [Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness]*, Mir Publ., Moscow, 1982, 416 p.

2. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, "[On local transformations of graphs that preserve the independence number]", *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, **5**:1 (1998), 3–19 (In Russ).

3. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, "Local transformations of graphs preserving independence number", *Discrete Applied Mathematics*, **135** (2004), 16–29.

4. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, "Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3**:1 (2008), 1–5.

5. B. Lévêque, D. de Werra, "Graph transformations preserving the stability number", *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 2752–2759.

6. V. V. Lozin, "Conic reduction of graphs for the stable set problem", *Discrete Mathematics*, **222**:1–3 (2000), 199–211.

7. V. V. Lozin, "Stability preserving transformations of graphs", *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.

8. D. S. Malyshev, "Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:2 (2013), 221–228.

Submitted 15.04.2017

[2] **Dmitry V. Sirotkin**, laboratory assistant, Laboratory of Theory and Practice of Decision Support Systems, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia); laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/ 0000-0002-2682-9867, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com