Математика

DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.13-18

УДК 519.612

Применение метода Гаусса для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений

© **Л. Б. Болотин** [1] **Е. Б. Кузнецов** [2]

Аннотация. Работа посвящена поиску численного решения систем линейных алгебраических уравнений, содержащих параметр (в качестве которого может выступать время) и имеющих плохую обусловленность при определенных значениях параметра.Решение такой системы, например, по правилу Крамера или с помощью метода Гаусса невозможно в окрестности сингулярности матрицы системы уравнений. Предложен алгоритм, который позволяет успешно проходить как окрестности сингулярности, так и сами особые точки, в которых матрица системы вырождается. Данный алгоритм предполагает применение метода продолжения решения по наилучшему параметру совместно с методом Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, особые точки, метод продолжения решения по параметру, наилучший параметр продолжения, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Введение

В работах [1, 2], посвященных решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохой обусловленностью, рассматривалось решение систем, матрицы которых становятся сингулярными при некоторых значениях параметра задачи. В окрестности таких точек задачи становятся плохо обусловленными, т.е. малым изменениям элементов матрицы отвечают большие изменения элементов решения. Несмотря на то, что плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике это решение численно получить сложно, так как даже незначительные вычислительные ошибки округления, неминуемо накапливаемые при расчете, приводят к большим погрешностям.

В этих работах исследовались предельные особые точки, в которых ранг матрицы n-го порядка СЛАУ с n неизвестными принимает значение, равное $n-1$. Такие ситуации возникают, например, при решении задач упруговязкопластичности в механике деформируемого твердого тела. Был предложен алгоритм, который основан на применении метода продолжения решения по параметру. Решение преобразованной системы находилось путем применения правила Крамера и численных методов интегрирования начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

[1] **Болотин Леонид Борисович**, студент кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5473-9458, yourleo@yandex.ru

[2] **Кузнецов Евгений Борисович**, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), доктор физико - математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5759-0062, kuznetsov@mai.ru

Недостаток такого алгоритма заключается в том, что при применении правила Крамера к решению СЛАУ n-го порядка необходимо знать $n+1$ определитель n-го порядка, вычисление которых с заданной точностью сильно усложняется при увеличении порядка СЛАУ. Этот недостаток особенно очевиден при решении плохо обусловленных СЛАУ. Поэтому для решения таких систем здесь применяется метод Гаусса.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$A(t)x = b(t), \tag{2.1}$$

где A – квадратная матрица $\|a_{ij}\|_n^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$, $b = (b_1, ..., b_n)^T$, параметр задачи $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим решение системы (2.1) с матрицей вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где строка $a_{11} + \varepsilon_1(1-t), \ldots, a_{1n} + \varepsilon_n(1-t)$ – k-ая строка, $k = \overline{1,n}$, $\varepsilon_i \ll 1$, $i = \overline{1,n}$, $t \in [0.2]$.

3. Метод решения задачи

В окрестности $t = 1$ решение $x_i(t)$ системы (2.1) будет плохо обусловленным, а при $t = 1$ матрица системы становится вырожденной. Для решения системы применим метод продолжения решения по наилучшему параметру [3].

Продифференцируем систему (2.1) по переменной t:

$$A(t)\dot{x} = \dot{b}(t) - \dot{A}(t)x. \tag{3.1}$$

После введения обозначения

$$e(t) = -\dot{b}(t) + \dot{A}(t)x \tag{3.2}$$

систему уравнений (3.1) можно записать в виде

$$A(t)\dot{x} + e(t)\dot{t} = 0. \tag{3.3}$$

Предполагая, что переменные x и t являются функциями наилучшего параметра λ, который является длиной дуги кривой множества решений системы уравнений (2.1), см. [3], перепишем систему (3.3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь штрих определяет дифференцирование по наилучшему параметру λ, который удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2 + (t')^2 = 1, \tag{3.4}$$

где x_i' и t' – производные функций x_i и t по параметру λ.

Наилучший параметр с учетом уравнения (3.4) делает задачу (3.3) нелинейной в силу последнего уравнения преобразованной системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}+\varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n}+\varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \\ x_1' & \cdots & x_n' & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризуем эту систему, переписав последнее уравнение в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i*}')(x_i') + (t_*')(t') = 1, \tag{3.5}$$

где индекс "звездочка"обозначает значение функции, вычисленное на предыдущем шаге процесса пошагового интегрирования. Тогда с учетом (3.5) линеаризованная система запишется в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{11}+\varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n}+\varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \\ x_{1*}' & \cdots & x_{n*}' & t_*' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_k' \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это уже система линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена, например, методом Гаусса. В линеаризованной системе звездочкой помечены компоненты единичного вектора $X_*' = (x_{1*}', \cdots, x_{n*}', t_*')^T$ – вектора производных, вычисленных на предыдущем шаге процесса продолжения решения, а вектор $X' = (x_1', \cdots, x_n', t')^T$ – вектор производных, вычисленных на рассматриваемом шаге в результате решения линеаризованной системы. Как и вектор X_*', вектор X' направлен по касательной к интегральной кривой задачи, но не является единичным, как это требует последнее уравнение преобразованной системы, так как в силу последнего уравнения линеаризованной системы проекция вектора X' на направление единичного вектора X_*' равна единице. Но его можно сделать единичным, произведя нормировку по формуле

$$X_*' = \frac{X'}{||X'||},$$

где $||X'||$ – квадратичная норма матрицы X'.

Полученный таким образом вектор будет решением на данном шаге исходной задачи и ее можно интегрировать любым численным методом интегрирования задачи Коши с начальными условиями, взятыми из предыдущего шага.

При решении преобразованной системы начальное приближение единичного вектора X'_* выбирается из условия, чтобы он не был ортогональным к вектору касательной в начальной точке интегральной кривой. Если эта точка не является предельной по переменной t', то вектор X'_* можно принять, например, равном $X'_* = (0, 0, \cdots, 1)^T$.

4. Пример

В качестве примера рассматривалось численное решение следующей СЛАУ третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2+0.1(1-t) & 1+0.2(1-t) & 3+0.3(1-t) \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Численное решение задачи на отрезке $t \in [0, 2]$ было получено в вычислительной среде MathCAD 14 несколькими численными методами интегрирования начальной задачи [4].

Применялись следующие методы:

1. Метод Эйлера.
2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

На рис. 4.1 приведены графики решения с применением обоих методов в окрестности особой точки $t = 1$. Заметим, что графики, полученные при помощи правила Крамера и метода Гаусса решения СЛАУ практически не отличались.

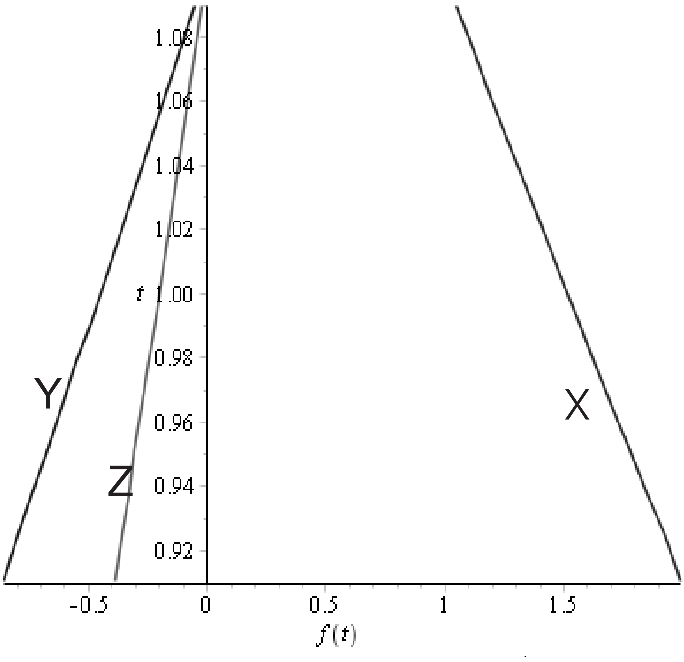

Рисунок **4.1**

Отметим, что достоверное решение непреобразованной задачи этими методами получить не удалось из-за переполнения памяти ЭВМ в окрестности особой точки.

5. Выводы

Таким образом, предложен алгоритм и разработана вычислительная программа применения метода Гаусса для решения СЛАУ с особенностями, содержащей параметр. Данный алгоритм при решении СЛАУ низкого порядка дает такие же результаты, как и алгоритм, использующий правило Крамера [1, 2], но может с успехом использоваться и при решении систем высокого порядка. В настоящее время ведется работа по применению для решения задач рассмотренного класса искусственных нейронных сетей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00943.

Список литературы

1. Л. Б. Болотин, Е. Б. Кузнецов, “Решение плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 7-11.

2. Л. Б. Болотин, Е. Б. Кузнецов, “Решение системы линейных алгебраических уравнений с особенностью”, *Материалы VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ"имени Е.В. Воскресенского с международным участием*, 2016, 20-21.

3. В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 222 с.

4. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987, 599 с.

Поступила 18.04.2017

MSC2010 65F22

Gauss method application to solution of ill-conditioned systems of linear algebraic equations

© L. B. Bolotin [3] E. B. Kuznetsov [4]

Abstract. The paper deals with the numerical solution of the system of linear algebraic equations that is singular under certain values of the problem parameter, which can be, for example, time. The solution of such system by the Kramer's rule or using Gaussian elimination method is impossible in the neighborhood of singularity of the system matrix. The algorithm is proposed which can successfully overcome the neighborhood of the singularity and singular points where the system matrix degenerates. The algorithm implies the application of the method of solution continuation with respect to the best parameter and Gaussian elimination method for linear algebraic equations' system.

Key Words: system of linear algebraic equations, singular points, method of solution continuation with respect to a parameter, the best parameter of continuation, numerical methods, ordinary differential equations.

References

1. L. B. Bolotin, E. B. Kuznetsov, "[Solution of ill-conditioned system of linear algebraic equations]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:1 (2016), 7-11 (In Russ.).

2. L. B. Bolotin, E. B. Kuznetsov, "[Solution of linear algebraic equations system with singularities]", *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm"imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016) SVMO Publ.*, 2016, 20-21 (In Russ.).

3. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 2003, 236 p.

4. N. S. Bahvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 599 p.

Submitted 18.04.2017

[3] **Leonid B. Bolotin**, student, Department of differential equations, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5473-9458, yourleo@yandex.ru

[4] **Evgeny B. Kuznetsov**, Professor, Department of differential equations, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5759-0062, kuznetsov@mai.ru