Прикладная математика и механика

DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.116-129

*УДК 533.6.013.4*

# Динамическая устойчивость упругой пластины при струйном обтекании

© **А. В. Анкилов**[1], **П. А. Вельмисов**[2]

**Аннотация.** Предложена математическая модель динамической системы, содержащей упругую пластину при одностороннем обтекании ее потоком идеального несжимаемого газа с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Поведение упругого материала описывается нелинейной моделью, учитывающей как продольные, так и поперечные деформации упругой пластины. Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, содержащая только неизвестные функции деформации пластины. На основе построения функционала, соответствующего этой системе уравнений, получены достаточные условия устойчивости нулевого решения системы. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток газа, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

## 1. Введение

При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем и т. д. различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды.

Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1-4], так и зарубежные [5-7] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуком потоке, и только небольшая часть работ посвящена обтеканию пластин и оболочек дозвуковым потоком, что указывает на сложность исследования динамики упругих тел при указанном режиме обтекания и требует более пристального и глубокого внимания к этим задачам.

[1] **Анкилов Андрей Владимирович**, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5946-8535, ankil@ulstu.ru.

[2] **Вельмисов Петр Александрович**, зав. кафедрой «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком газа (жидкости) в модели идеальной несжимаемой среды с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала в работе описывается нелинейной моделью. Для решения связанной задачи аэрогидроупругости используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные деформации пластины [8]. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций. На основе построения функционала, соответствующего этой системе уравнений, получены достаточные условия устойчивости решений системы.

Подобные задачи по исследованию динамической устойчивости при дозвуковом режиме обтекания рассматривались в [8] – [17]. Кроме того, отличием от ранее полученных результатов [9] является то, что в данной работе рассмотрена нелинейная математическая модель упругого тела, учитывающая и продольные и поперечные колебания упругой пластины.

## 2. Математическая модель

Рассматривается плоская задача о колебаниях упругой пластины при одностороннем обтекании ее потоком идеальной несжимаемой среды с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Пусть в плоскости $xOy$ отрезок $[0,l]$ оси $Ox$ соответствует упругой пластине, которая в точке $x=0$ соединена с жесткой недеформируемой пластиной, занимающей положение $y=0,\ x\in(-\infty,0)$. В бесконечно удаленной точке скорость среды равна $V$ и направлена вдоль оси $Ox$.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi=0,\ (x,y)\in H=\{(x,y)\in R^2:|x|<\infty, y>0\}; \tag{2.1}$$

$$\varphi_y(x,0,t)=0, \qquad x\in(-\infty,0); \tag{2.2}$$

$$\varphi_y(x,0,t)=\dot w(x,t)+Vw'(x,t), \quad x\in(0,l); \tag{2.3}$$

$$\varphi_y(x,0,t)=\dot h(x,t)+Vh'(x,t), \quad x\in(l,+\infty); \tag{2.4}$$

$$\varphi_t(x,0,t)+V\varphi_x(x,0,t)=0, \quad x\in(l,+\infty); \tag{2.5}$$

$$w(0,t)=0; \tag{2.6}$$

$$h(l,t)=w(l,t); \tag{2.7}$$

$$|\nabla\varphi|^2_\infty=(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_t^2)_\infty=0; \tag{2.8}$$

$$P(x,t)=\rho(\varphi_t(x,0,t)+V\varphi_x(x,0,t)), \quad x\in(0,l); \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} -EF\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)'+M\ddot u(x,t)-\beta_2 I^{-1}\dot u''(x,t)=0,\\ -EF\left[w'(x,t)\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)\right]'+Dw''''(x,t)+M\ddot w(x,t)+\\ +Nw''(x,t)+\beta_2\dot w''''(x,t)+\beta_1\dot w(x,t)+\beta_0 w(x,t)=P(x,t),\ \ x\in(0,l). \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь введены обозначения: $\rho$ – плотность газа; $M=h_p\rho_p$ – погонная масса пластины; $h_p$ – толщина пластины; $E$, $\rho_p$ – модуль упругости и линейная плотность пластины;

$N$ – сжимающая (растягивающая) пластину сила; $F = \dfrac{h_p}{1-\nu^2}$; $D = EI$ – изгибная жесткость пластины; $I = \dfrac{h_p^3}{12(1-\nu^2)}$ – момент инерции пластины; $\beta_2, \beta_1$ – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; $\beta_0$ – коэффициент жесткости слоя обжатия; $\nu$ – коэффициент Пуассона. Индексы $x, y, t$ снизу обозначают частные производные по $x, y, t$; штрих обозначает частную производную по координате $x$, а точка – по времени $t$. Неизвестными являются функции: $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости газа; $w(x,t)$, $u(x,t)$ – функции, определяющие деформации пластины в направлении осей $Oy$ и $Ox$ соответственно (поперечная и продольная составляющие деформации пластины); $h(x,t)$ – функция, определяющая форму свободной поверхности; $P(x,t)$ – аэродинамическая нагрузка на пластину.

Условия (2.2 – 2.4) – условия непротекания, (2.5) – условие непрерывности давления на свободной поверхности, (2.6) – условие закрепления пластины в точке $x = 0$, (2.7) – условие стыковки; (2.8) – условие на бесконечности.

В силу несжимаемости среды поток вектора скорости через вещественную ось равен нулю, поэтому граничные значения (2.2) – (2.4) должны удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(x,0,t)\,dx = \int_0^l (\dot{w} + Vw')\,dx + \int_l^{\infty} (\dot{h} + Vh')\,dx = 0. \tag{2.11}$$

Для сходимости несобственного интеграла в (2.11) потребуем, чтобы для достаточно больших значений $x$

$$|\dot{h} + Vh'| \leq A(t)x^{-\alpha}, \tag{2.12}$$

где $A(t)$ – неотрицательная функция времени $t$, $t \geq 0$; $\alpha > 1$.

## 3. Определение силового воздействия потока

В верхней полуплоскости $H$ введем комплексный потенциал $W = f(z,t) = \varphi + i\psi$ (где $z = x + iy$, $\psi$ – функция тока) и рассмотрим в ней аналитическую функцию $if_z(z,t) = \varphi_y + i\varphi_x$. Пользуясь условиями (2.2) – (2.4), (2.8), представим $if_z(z,t)$ в $H$ с помощью интеграла Щварца [18] в виде

$$if_z(z,t) = \frac{1}{\pi i}\int_0^l w_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi i}\int_l^{\infty} h_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{3.1}$$

$$w_1(x,t) = \dot{w} + Vw', \qquad h_1(x,t) = \dot{h} + Vh'. \tag{3.2}$$

Введем обозначения

$$w_2(\tau,t) = \int_0^{\tau} w_1(x,t)\,dx = \int_0^{\tau} (\dot{w} + Vw')\,dx, h_2(\tau,t) = \int_{\tau}^{\infty} h_1(x,t)\,dx = \int_{\tau}^{\infty} (\dot{h} + Vh')\,dx.$$

Поскольку $w_2(0,t) = 0$, а в силу условий (2.11), (2.12)

$$w_2(l,t) + h_2(l,t) = 0, \ \lim_{\tau\to\infty} h_2(\tau,t)\ln(\tau - z) = 0,$$

то, интегрируя в (3.1) сначала по $z$, а затем по частям, будем иметь

$$f(z,t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l w_2(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi}\int_l^{\infty} h_2(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - z} + C_1(t). \tag{3.3}$$

Продифференцируем (3.3) по $t$ и перейдем по формулам Сохоцкого [18] к пределу при $z \to x \in (l,\infty)$. Отделяя вещественную часть, получим с учетом условия (2.8):

$$\varphi_t(x,0,t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{d\tau}{\tau - x} + \frac{1}{\pi}\int_l^\infty \frac{\partial h_2}{\partial t}\frac{d\tau}{\tau - x}. \tag{3.4}$$

Из выражения (3.1) при $z \to x \in (l,\infty)$ найдем

$$\varphi_x(x,0,t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l w_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{1}{\pi}\int_l^\infty h_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x}. \tag{3.5}$$

Условие (2.5), таким образом, принимает вид

$$\int_0^l w_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x} = \int_l^\infty h_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau - x}, \quad x \in (l,\infty), \tag{3.6}$$

$$w_3(x,t) = \frac{\partial w_2}{\partial t} + Vw_1 = \int_0^x (\ddot{w} + V\dot{w}')dx + V\dot{w} + V^2 w', \tag{3.7}$$

$$h_3(x,t) = \frac{\partial h_2}{\partial t} - Vh_1 = \int_x^\infty (\ddot{h} + V\dot{h}')dx - V\dot{h} - V^2 h'. \tag{3.8}$$

Выразим $h_3(x,t)$ из (3.6). Пусть $\tau_1 = -1/\tau,\ x_1 = -1/x$, тогда

$$\int_l^\infty h_3(x,t)\frac{d\tau}{\tau - x} = -\int_{-1/l}^0 h_3\left(-\frac{1}{\tau},t\right)\frac{d\tau_1}{\tau_1^2(\tau_1^{-1} - x_1^{-1})} = \int_{-1/l}^0 h_3\left(-\frac{1}{\tau},t\right)\frac{x_1\,d\tau_1}{\tau_1(\tau_1 - x_1)},$$

и, следовательно, (3.6) можно представить в виде

$$\int_{-1/l}^0 \frac{1}{\tau_1}h_3\left(-\frac{1}{\tau},t\right)\frac{d\tau_1}{\tau_1 - x_1} = \int_0^l w_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau x_1 + 1}. \tag{3.9}$$

Полученное равенство будем рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $\tilde{h}(\tau_1,t) = \frac{1}{\tau_1}h_3\left(-\frac{1}{\tau_1},t\right)$. Оно имеет следующие решения [19]:

1) решение, не ограниченное на обоих концах отрезка $[-1/l,0]$;
2) решение, ограниченное на одном из концов отрезка $[-1/l,0]$;
3) решение, ограниченное на обоих концах отрезка $[-1/l,0]$, при условии, что

$$\int_{-1/l}^0 \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 + 1/l)(-x_1)}}\int_0^l w_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau x_1 + 1} = 0. \tag{3.10}$$

Решения, не ограниченные на левом конце отрезка, не подходят по смыслу рассматриваемой задачи. Решение 3) налагает дополнительное условие на $w$. В дальнейшем будем пользоваться решением 2) уравнения (3.6):

$$h_3(x,t) = \frac{\sqrt{x - l}}{\pi}\int_0^l w_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\sqrt{l - \tau}(\tau - x)},\ x \in (l,\infty), \tag{3.11}$$

ограниченным на левом и не ограниченным на правом конце отрезка $[-1/l,0]$, и полученным обращением интеграла типа Коши в левой части уравнения (3.9).

Интегрируя в (3.11) по частям с учетом (2.6), (3.7), (3.8) и затем дифференцируя полученное равенство по $x$, получим дифференциальное уравнение относительно функции $h(x,t)$

$$\ddot{h} + 2V\dot{h}' + V^2 h'' = -\frac{V^2 w'(0,t)}{\pi x}\sqrt{\frac{l}{x - l}} + \tag{3.12}$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{x-l}}\int_0^l(\ddot{w}(\tau,t)+2V\dot{w}'(\tau,t)+V^2w''(\tau,t))\frac{\sqrt{l-\tau}}{\tau-x}d\tau,\ x\in(l,\infty),$$

при условии

$$h'(l,t)=w'(l,t). \tag{3.13}$$

Преобразуем теперь правую часть выражения для давления (2.9). Исходя из выражений (3.1), (3.3), предельным переходом при $z\to x\in(0,l)$ получим соответственно:

$$\varphi_x(x,0,t)=-\frac{1}{\pi}\int_0^l w_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}-\frac{1}{\pi}\int_l^\infty h_1(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x},$$

$$\varphi_t(x,0,t)=-\frac{1}{\pi}\int_0^l\frac{\partial w_2}{\partial t}(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{\pi}\int_l^\infty\frac{\partial h_2}{\partial t}(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}.$$

Следовательно,

$$\varphi_t+V\varphi_x=-\frac{1}{\pi}\int_0^l w_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{\pi}\int_0^l h_3(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x},\ x\in(0,l). \tag{3.14}$$

Преобразуя интегралы в (3.14) методом интегрирования по частям, с учетом условий (2.6), (2.7), (2.11), (3.13) будем иметь:

$$\phi_t+V\phi_x=\frac{1}{\pi}\int_0^l\frac{\partial w_3}{\partial\tau}\ln|\tau-x|d\tau-\frac{1}{\pi}\int_l^\infty\frac{\partial h_3}{\partial\tau}\ln|\tau-x|d\tau+\frac{V^2}{\pi}w'(0,t)\ln x.$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial h_3}{\partial\tau}(\tau,t)=-\frac{1}{\pi\sqrt{\tau-l}}\int_0^l\frac{\partial w_3}{\partial\xi}(\xi,t)\frac{\sqrt{l-\xi}}{\xi-\tau}d\xi+\frac{V^2w'(0,t)}{\pi}\frac{\sqrt{l}}{\tau\sqrt{l-\tau}},$$

$$\int_0^\infty\frac{\ln(\omega^2+a^2)}{(\omega^2+b^2)}d\omega=\frac{\pi\ln(a+b)}{b},\qquad(a>0;\ b>0),$$

и проводя ряд преобразований, получим выражение для давления (2.9):

$$P(x,t)=\rho\left.(\varphi_t+V\varphi_x)\right|_{y=0}=-\frac{\rho}{\pi}\int_0^l\frac{\partial w_3}{\partial\tau}(\tau,t)\ln\frac{(\sqrt{l-x}+\sqrt{l-\tau})^2}{|\tau-x|}d\tau-$$

$$-\frac{\rho V^2w'(0,t)}{\pi}\ln\frac{(\sqrt{l-x}+\sqrt{l})^2}{x}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial x}(x,t)=\ddot{w}(x,t)+2V\dot{w}'(x,t)+V^2w''(x,t),\quad x\in(0,l).$$

Если решение системы уравнений (3.15), (2.10) найдено, то отыскание функции $h(x,t)$, определяющей границу свободной поверхности, сводится к решению дифференциального уравнения (3.12) с краевыми условиями (2.7), (3.13). При этом функции $w(x,t)$ и $h(x,t)$ должны также удовлетворять условиям (2.11), (2.12). Далее, если функция $h(x,t)$ найдена, то, полагая в (3.3) $z=x+iy$ и отделяя вещественную часть, получим потенциал $\varphi(x,y,t)$.

## 4. Исследование устойчивости

Введем обозначение

$$K(x,\tau)=\ln\left|\frac{\sqrt{l-\tau}+\sqrt{l-x}}{\sqrt{l-\tau}-\sqrt{l-x}}\right|,\quad x\neq\tau.$$

Тогда аэрогидродинамическая нагрузка (3.15) примет вид

$$P(x,t)=-\frac{\rho V^2 w'(0,t)}{\pi}K(x,0)-\frac{\rho}{\pi}\int_0^l\big(\ddot w(\tau,t)+2V\dot w'(\tau,t)+V^2w''(\tau,t)\big)\,K(x,\tau)d\tau. \quad (4.1)$$

Интегрируя по частям, запишем (4.1) в виде

$$P(x,t)=-\frac{\rho}{\pi}\int_0^l\left(\ddot w(\tau,t)+2V\dot w'(\tau,t)\right)K(x,\tau)d\tau+\frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l w'(\tau,t)\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в систему (2.10), окончательно получим

$$\begin{cases} -EF\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)'+M\ddot u(x,t)-\beta_2 I^{-1}\dot u''(x,t)=0,\\ -EF\left[w'(x,t)\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)\right]'+Dw''''(x,t)+M\ddot w(x,t)+\\ +Nw''(x,t)+\beta_2\dot w''''(x,t)+\beta_1\dot w(x,t)+\beta_0 w(x,t)=\\ =-\frac{\rho}{\pi}\int_0^l\left(\ddot w(\tau,t)+2V\dot w'(\tau,t)\right)K(x,\tau)d\tau+\frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l w'(\tau,t)\frac{\partial K(x,\tau)}{\partial\tau}d\tau,\quad x\in(0,l). \end{cases} \quad (4.3)$$

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения $w(x,t)\equiv 0$, $u(x,t)\equiv 0$ системы интегро-дифференциальных уравнений (4.3) по отношению к возмущениям начальных условий.

Введем функционал:

$$\Phi(t)=\int_0^l\left\{EF\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)^2+M(\dot u^2(x,t)+\dot w^2(x,t))+Dw''^2(x,t)-\right.$$

$$-Nw'^2(x,t)+\beta_0 w^2(x,t)+4M\theta u(x,t)\dot u(x,t)+2M\theta\dot w(x,t)w(x,t)+$$

$$\left.+2\beta_2 I^{-1}\theta u'^2(x,t)+\beta_1\theta w^2(x,t)+\beta_2\theta w''^2(x,t)\right\}dx+\sum_{i=1}^4 I_i(t), \quad (4.4)$$

$$I_1(t)=\frac{\rho}{\pi}\int_0^l dx\int_0^l \dot w(x,t)\dot w(\tau,t)K(\tau,x)d\tau,\quad I_2(t)=-\frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l dx\int_0^l w'(x,t)w'(\tau,t)K(\tau,x)d\tau,$$

$$I_3(t)=\frac{2\rho\theta}{\pi}\int_0^l dx\int_0^l w(x,t)\dot w(\tau,t)K(\tau,x)d\tau,\quad I_4(t)=\frac{2\rho\theta}{\pi}\left(\int_0^l\frac{w(x,t)}{\sqrt{l-x}}dx\right)^2,$$

где параметр $\theta\geq 0$. Найдем производную от $\Phi$ по $t$:

$$\dot\Phi(t)=2\int_0^l\left\{EF\left(u'+\frac{1}{2}w'^2\right)\left(\dot u'+w'\dot w'\right)+M\dot u\ddot u+M\dot w\ddot w+Dw''\dot w''-Nw'\dot w'+\right.$$

$$+\beta_0 w\dot w+2M\theta\dot u^2+2M\theta u\ddot u+M\theta\dot w^2+M\theta w\ddot w+2\beta_2 I^{-1}\theta u'\dot u'+ \quad (4.5)$$

$$\left.+\beta_1\theta w\dot w+\beta_2\theta w''\dot w''\right\}dx+\sum_{i=1}^4\dot I_i(t).$$

Граничные условия для функций $w(x,t)$, $u(x,t)$ могут иметь вид

1) жесткое неподвижное защемление:

$$w(x,t) = w'(x,t) = u(x,t) = 0; \tag{4.6}$$

2) жесткое подвижное защемление:

$$w(x,t) = w'(x,t) = u'(x,t) = 0; \tag{4.7}$$

3) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w(x,t) = w''(x,t) = u(x,t) = 0. \tag{4.8}$$

Пусть на левом конце пластины при $x = 0$ имеют место условия (4.6) или (4.7), что согласуется с условием (2.6), а на правом конце пластины при $x = l$ – условия (4.6), или (4.7), или (4.8).

Тогда для функций $w(x,t)$, $u(x,t)$, являющихся решением системы уравнений (4.3), равенство (4.5) примет вид:

$$\dot{\Phi}(t) = 2\int_0^l \left\{ -2EF\theta\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)^2 - \beta_2 I^{-1}\dot{u}'^2 - \beta_2\dot{w}''^2 - \beta_1\dot{w}^2 + 2M\theta\dot{u}^2 + \right.$$

$$\left. + M\theta\dot{w}^2 - \beta_0\theta w^2 - D\theta w''^2 + N\theta w'^2 \right\} dx + \sum_{i=1}^{4} \dot{I}_i(t) - \tag{4.9}$$

$$-\frac{2\rho}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t)\left(\ddot{w}(\tau,t) + 2V\dot{w}'(\tau,t)\right) K(x,\tau) d\tau +$$

$$+\frac{2\rho V^2}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t) w'(\tau,t) \frac{\partial K(x,\tau)}{\partial\tau} d\tau -$$

$$-\frac{2\rho\theta}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w(x,t)\left(\ddot{w}(\tau,t) + 2V\dot{w}'(\tau,t)\right) K(x,\tau) d\tau +$$

$$+\frac{2\rho V^2\theta}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w(x,t) w'(\tau,t) \frac{\partial K(x,\tau)}{\partial\tau} d\tau.$$

Пользуясь симметричностью ядра $K(\tau,x) = K(x,\tau)$, найдем $\dot{I}_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$.

Введем обозначение

$$K_1(x) = \int_0^l K(\tau,x) d\tau, \quad K_0 = \sup_{x\in(0,l)} K_1(x).$$

Произведем оценку интегралов $\dot{I}_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$ и последних четырех интегралов в (4.9), используя неравенства $\pm 2ab \le a^2 + b^2$, $K(\tau,x) \ge 0$, $K(\tau,x) = K(x,\tau)$. Тогда оценка (4.9) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) \le 2\int_0^l \left\{ -\beta_2\dot{w}''^2 - \left(\beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi}\right)\dot{w}^2 - \beta_0\theta w^2 - \left(D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2\theta l^2}{\pi}\right) w''^2 - \right.$$

$$\left. + \left(N\theta + \frac{\rho\theta V^2(4K_0 + l^2)}{\pi}\right) w'^2 - \beta_2 I^{-1}\dot{u}'^2 + 2M\theta\dot{u}^2 \right\} dx. \tag{4.10}$$

Пусть выполняются неравенства

$$\beta_2 \geq 0, \quad D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2 \theta l^2}{\pi} \geq 0, \tag{4.11}$$

тогда, используя неравенства Релея [20]

$$\int_0^l w''^2(x,t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x,t)dx, \quad \int_0^l w''^2(x,t)dx \geq \mu_1 \int_0^l w^2(x,t)dx,$$

$$\int_0^l \dot{u}'^2(x,t)dx \geq \eta_1 \int_0^l \dot{u}^2(x,t)dx, \tag{4.12}$$

где $\lambda_1$, $\mu_1-$ наименьшие собственные значения краевых задач $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$ с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции $w(x,t)$, $\eta_1-$ наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi''(x) = -\eta\psi(x)$ с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции $u(x,t)$, получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq -2\int_0^l \left\{ \left(\beta_2\mu_1 + \beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi}\right)\dot{w}^2 + \beta_0\theta w^2 + \left(\beta_2 I^{-1}\eta_1 - 2M\theta\right)\dot{u}^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\lambda_1\left(D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2\theta l^2}{\pi}\right) - \left(N\theta + \frac{\rho\theta V^2(4K_0 + l^2)}{\pi}\right)\right] w'^2 \right\} dx. \tag{4.13}$$

Если выполняются условия

$$\begin{array}{l} \beta_2\mu_1 + \beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi} \geq 0, \quad \beta_2 I^{-1}\eta_1 - 2M\theta \geq 0, \\ D\lambda_1\theta - N\theta - \frac{\rho V^3 l^2 \lambda_1}{\pi} - \frac{\rho V^2\theta(4K_0 + l^2 + l^2\lambda_1)}{\pi} \geq 0, \end{array} \tag{4.14}$$

то из (4.13) получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0.$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до $t$

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \tag{4.15}$$

Подставим выражение для $\Phi(0)$ в неравенство (4.15)

$$\Phi(t) \leq \int_0^l \left\{ EF\left(u_0' + \frac{1}{2}w_0'^2\right)^2 + M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + Dw_0''^2 - Nw_0'^2 + \beta_0 w_0^2 + 4M\theta u_0\dot{u}_0 + \right.$$

$$\left. + 2M\theta\dot{w}_0 w_0 + 2\beta_2 I^{-1}\theta u_0'^2 + \beta_1\theta w_0^2 + \beta_2\theta w_0''^2 \right\} dx + \tag{4.16}$$

$$+\frac{\rho}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,0)\dot{w}(\tau,0)K(\tau,x)d\tau - \frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w'(x,0)w'(\tau,0)K(\tau,x)d\tau +$$

$$+\frac{2\rho\theta}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w(x,0)\dot{w}(\tau,0)K(\tau,x)d\tau + \frac{2\rho\theta}{\pi}\left(\int_0^l \frac{w(x,0)}{\sqrt{l-x}}dx\right)^2.$$

Здесь индекс 0 снизу означает, что значение берется при $t = 0$.
Используя неравенства (4.12), неравенство $\pm 2ab \leq a^2 + b^2$ и учитывая, что

$$\int_0^l dx \int_0^l w'(x,0)w'(\tau,0)K(\tau,x)d\tau \geq 0,$$

получим

$$\Phi(t) \le \int_0^l \left\{ EF\left(u_0' + \frac{1}{2}{w'}_0^2\right)^2 + 2M\theta u_0^2 + 2M\theta \dot{u}_0^2 + \right.$$

$$+2\beta_2 I^{-1}\theta {u'}_0^2 + \left(M + M\theta + \frac{\rho K_0(1+\theta)}{\pi}\right)\dot{w}_0^2 + \tag{4.17}$$

$$\left. + \left[D + \beta_2\theta + \frac{1}{\lambda_1}\left(|N| + \frac{4\rho\theta l^2}{\pi}\right) + \frac{1}{\mu_1}\left(\beta_0 + M\theta + \beta_1\theta + \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right)\right] {w''_0}^2 \right\} dx.$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t)\dot{w}(\tau,t)K(\tau,x)d\tau \ge 0,$$

получим

$$\Phi(t) \ge \int_0^l \left\{ EF\left(u' + \frac{1}{2}{w'}^2\right)^2 + M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + 4M\theta u\dot{u} + \right.$$

$$\left. +2\beta_2 I^{-1}\theta {u'}^2 + (D + \beta_2\theta){w''}^2 - N{w'}^2 + (\beta_0 + \beta_1\theta)w^2 + 2M\theta\dot{w}w \right\} dx -$$

$$-\frac{\rho V^2}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w'(x,t)w'(\tau,t)K(\tau,x)d\tau + \frac{2\rho\theta}{\pi}\int_0^l dx \int_0^l w(x,t)\dot{w}(\tau,t)K(\tau,x)d\tau.$$

Используя первое неравенство (4.12), неравенство $\pm 2ab \ge -a^2 - b^2$ , будем иметь

$$\Phi(t) \ge \int_0^l \left\{ M\dot{u}^2 + 4M\theta u\dot{u} + 2\beta_2 I^{-1}\theta {u'}^2 + \left(M - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right)\dot{w}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right){w'}^2 + \left(\beta_0 + \beta_1\theta - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right)w^2 + 2M\theta\dot{w}w \right\} dx. \tag{4.18}$$

Пусть выполняются условия

$$M - \frac{\rho\theta K_0}{\pi} > 0, \quad \lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} > 0. \tag{4.19}$$

Используя неравенство Релея

$$\int_0^l {w'}^2(x,t)dx \ge \vartheta_1 \int_0^l w^2(x,t)dx, \tag{4.20}$$

где $\vartheta_1-$ наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi''(x) = -\vartheta\psi(x)$ с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции $w(x,t)$ и третье неравенство (4.12), получим

$$\Phi(t) \ge \int_0^l \left\{ M\dot{u}^2 + 4M\theta u\dot{u} + 2\beta_2 I^{-1}\eta_1(1-\psi_2)\theta u^2 + 2\beta_2 I^{-1}\psi_2\theta {u'}^2 + \left(M - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right)\dot{w}^2 + \right.$$

$$+\psi_1\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right){w'}^2 + 2M\theta\dot{w} + \tag{4.21}$$

$$\left. + \left[\vartheta_1(1-\psi_1)\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right)\beta_0 + \beta_1\theta - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right] w^2 w \right\} dx,$$

где параметры $\psi_1 \in (0,1)$, $\psi_2 \in (0,1)$ выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\beta_2 I^{-1}\eta_1(1-\psi_2) - 2M\theta \geq 0, \quad \left(M - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right) \times$$
$$\times \left[\vartheta_1(1-\psi_1)\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right)\beta_0 + \beta_1\theta - \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right] - M^2\theta^2 \geq 0. \tag{4.22}$$

Учитывая неравенства (4.22) и то, что

$$w^2(x,t) \leq l\int_0^l w'^2(x,t)dx, \quad u^2(x,t) \leq l\int_0^l u'^2(x,t)dx,$$

окончательно получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left(2\beta_2 I^{-1}\psi_2\theta u'^2 + \psi_1\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right)w'^2\right)dx \geq$$
$$\geq \frac{2\beta_2 I^{-1}\psi_2\theta}{l}u^2 + \frac{\psi_1}{l}\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right)w^2. \tag{4.23}$$

Используя оценки (4.17), (4.23), получим неравенство

$$\frac{2\beta_2 I^{-1}\psi_2\theta}{l}u^2(x,t) + \frac{\psi_1}{l}\left(\lambda_1 D + \beta_2\lambda_1\theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi}\right)w^2(x,t) \leq \int_0^l \left\{EF\left({u'}_0 + \frac{1}{2}{w'}_0^2\right)^2 + \right.$$
$$+2M\theta u_0^2 + 2M\theta\dot{u}_0^2 + 2\beta_2 I^{-1}\theta {u'}_0^2 + \left(M + M\theta + \frac{\rho K_0(1+\theta)}{\pi}\right)\dot{w}_0^2 +$$
$$\left. + \left[D + \beta_2\theta + \frac{1}{\lambda_1}\left(|N| + \frac{4\rho\theta l^2}{\pi}\right) + \frac{1}{\mu_1}\left(\beta_0 + M\theta + \beta_1\theta + \frac{\rho\theta K_0}{\pi}\right)\right]{w''}_0^2\right\}dx,$$

из которого следует теорема.

**Теорема 4.1.** *Если найдутся числа* $\theta > 0$, $\psi_1 \in (0,1)$, $\psi_2 \in (0,1)$, *такие, что выполняются условия* (4.11), (4.14), (4.19), (4.22), *и краевые условия имеют вид* (4.6)–(4.8), *то решение* $w(x,t), u(x,t)$ *системы уравнений* (4.3) *устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений* $\dot{u}_0$, $u_0$, $u'_0$, $\dot{w}_0$, $w'_0$, $w''_0$.

## 5. Заключение

На основе предложенной нелинейной математической модели колебаний упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком идеальной несжимаемой среды с отрывом струи проведено исследование устойчивости этой пластины. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными для неизвестных функций деформации пластины и потенциала скорости газа. На основе методов теории функций комплексного переменного получена связанная система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, содержащая только неизвестные функции деформации пластины. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости нулевого решения этой системы уравнений. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонную массу пластины, изгибную жесткость пластины, сжимающее (растягивающее) пластину усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

**Благодарности**. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599 и № 15-41-02455-р-поволжье-а.

# Список литературы


1. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, L. N. Rabinsky, E. L. Kuznetsova, "Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer", *Applied Mathematical Sciences*, **10**:21 (2016), 1101–1109.

2. V. V. Vedeneev, "Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds", *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.

3. В. Б. Курзин, "Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины", *Прикладная механика и техническая физика*, **52**:3 (2011), 153–157.

4. В. Г. Соколов, И. О. Разов, "Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке", *Вестник гражданских инженеров*, **43**:2 (2014), 65–68.

5. E. Aulisa, A. Ibragimov, E. Y. Kaya-Cekin, "Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid", *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 7*, **6** (2014), 1133–1148.

6. A. N. Kounadis, "Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping", *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.

7. S. Willems, A. Gulhan and B. Esser, "Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow", *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285–308.

8. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Саратовский государственный университет, Саратов, 1994, 176 с.

9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2009, 220 с.

10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2013, 322 с.

11. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2015, 146 с.

12. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2000, 115 с.

13. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.

14. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость решений начально-краевой задачи аэрогидроупругости”, *Современная математика. Фундаментальные направления.*, **59** (2016), 35–52.

15. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 94–107.

16. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость вязкоупругих элементов несущей поверхности в дозвуковом потоке”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **9**:1 (2007), 69–81.

17. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова, “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2**:1 (38) (2009), 7–17.

18. М. А. Лаврентьев, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973, 736 с.

19. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Изд-во физ-мат. лит., М., 1963, 640 с.

20. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

*Поступила 18.04.2017*

*MSC2010 74F10*

# Dynamic stability of elastic plate at jet flow

© **A. V. Ankilov**[3], **P. A. Velmisov**[4]

**Abstract.** The mathematical model of the dynamic system containing an elastic plate at a one-sided flow of ideal incompressible gas stream with a separation of jet according to Kirchhoff's scheme is offered. The behavior of elastic material is described by the nonlinear model considering both longitudinal and transversal deformations of an elastic plate. The solution of an aerohydrodynamic part of a problem is based on methods of the theory of functions of complex variable. The related system of the integro-differential equations with partial derivatives containing only unknown plate deformations functions is obtained. Basing on the building of the functional corresponding to this system of the equations the sufficient conditions for stability of system solutions are established. Definition of elastic body stability corresponds to the Lyapunov's concept of stability of dynamic systems.

**Key Words:** aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic flow of gas, partial differential equations, functional.

## References

1. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, L. N. Rabinsky, E. L. Kuznetsova, "Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer", *Applied Mathematical Sciences*, **10**:21 (2016), 1101–1109.

2. V. V. Vedeneev, "Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds", *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.

3. V. B. Kurzin, "Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины", *Applied mechanics and technical physics*, **52**:3 (2011), 153–157 (In Russ.).

4. V. G. Sokolov, I. O. Razov, "Parametrical vibrations and dynamic stability of long-distance gas pipelines at above-ground laying", *Bulletin of Civil Engineers*, **43**:2 (2014), 65–68 (In Russ.).

5. E. Aulisa, A. Ibragimov, E. Y. Kaya-Cekin, "Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid", *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 7*, **6** (2014), 1133–1148.

6. A. N. Kounadis, "Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping", *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.

7. S. Willems, A. Gulhan and B. Esser, "Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow", *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285—308.

[3] **Andrey V. Ankilov**, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venetc Str., Ulyanovsk 432027, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5946-8535, ankil@ulstu.ru

[4] **Petr A. Velmisov**, Head of Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venetc Str., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7825-7015, velmisov@ulstu.ru.

8. P. A. Velmisov, Yu. A. Reshetnikov, *Stability of viscoelastic plates at aerohydrodynamic influence*, Saratov State University, Saratov, 1994 (In Russ.), 176 c.

9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Dynamics and stability of elastic plates at aerohydrodynamic influence*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 220 c.

10. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable elements of constructions at aerohydrodynamic influence*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2013 (In Russ.), 322 c.

11. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Lyapunov functionals in some problems of dynamic stability of aeroelastic constructions*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2015 (In Russ.), 146 c.

12. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Stability of viscoelastic elements of walls of flowing channels*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2000 (In Russ.), 115 c.

13. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.

14. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions of initial boundary value problem of aerohydroelasticity”, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.*, **59** (2016), 35–52 (In Russ.).

15. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “Research of dynamics and stability of an elastic element of the flow channel”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **18**:1 (2016), 94–107 (In Russ.).

16. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of viscoelastic elements of bearing surface in subsonic flow”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **9**:1 (2007), 69–81 (In Russ.).

17. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, E. P. Semenova, “Research of dynamic stability of elastic elements of channel walls”, *Bulletin of Saratov State Technical University*, **2**:1 (38) (2009), 7–17 (In Russ.).

18. M. A. Lavrentev, *Methods of complex variable functions theories*, Science, M., 1973 (In Russ.), 736 c.

19. F. D. Gahov, *Boundary value problems*, Publishing house of physical and mathematical literature, M., 1963 (In Russ.), 640 c.

20. L. Kollatc, *Eigenvalue problems*, Science, M., 1968 (In Russ.), 503 c.


*Submitted 18.04.2017*