

УДК 517.9

Потоки Морса-Смейла и модели топологии магнитных полей в плазме

© А. Н. Сахаров¹, А. А. Шиловская²

Аннотация. Настоящая статья является продолжением работы [14] и посвящена изложению результатов, связанных с построением моделей магнитных полей в электропроводящей среде (плазме) в терминах динамических систем. Исследования в этом направлении интенсивно ведутся в течении последних 20 лет. Так как решение уравнений магнитной гидродинамики сопряжено с известными трудностями, то в рассматриваемом подходе используются приближенные модели магнитного поля. Строится класс моделей векторных полей, объединенных общим названием *модель топологии магнитных зарядов*. Поля из этого класса порождают непрерывные динамические системы (потоки) на трехмерных многообразиях с достаточно простой структурой. Во-первых, неблуждающее множество конечно и состоит из гиперболических состояний равновесия, во-вторых, эти потоки допускают существование так называемой самоиндексирующейся энергетической функции, позволяющей провести их полную топологическую классификацию. Кроме того, поля из указанного класса могут быть сколь угодно близко аппроксимированы векторными полями, порождающими структурно устойчивые потоки. Особое внимание уделяется полям в короне Солнца, что связано с актуальной задачей оценки выброса энергии при солнечных вспышках.

Ключевые слова: особые точки поля, магнитные силовые линии, источники, стоки, сепаратрисы, сепараторы, гетероклинические траектории.

1. Введение

Структура (топология силовых линий) магнитного поля в плазме играет важную роль для решения ряда задач магнитной гидродинамики (МГД): эволюция магнитного поля в короне Солнца, устойчивость плазмы в термоядерных реакторах, механизмы турбулентного динамо³, теория магнитного перезамыкания.

Эволюция магнитного поля в плазме описывается системой уравнений в частных производных (уравнениями МГД, [1], гл. 8), которые определяют два векторных поля на некотором трехмерном многообразии M^3 (которое будем называть несущим): магнитное поле \mathbf{H} и поле скоростей частиц плазмы \mathbf{v} . Поэтому решение задачи описания топологии магнитного поля включает в себя два этапа. На первом этапе решается система уравнений МГД. Найденное поле \mathbf{H} порождает (при известных предположениях) непрерывную динамическую систему (поток) на M^3 . На втором этапе находятся интегральные

¹ Сахаров Александр Николаевич, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, ФГБОУ ВО "Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия" (603107, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 97), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, ansakharov2008@yandex.ru

² Шиловская Анна Анатольевна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3328-8157>, a.shilovskaia@gmail.com

³ Динамо – механизм усиления или поддержания стационарного (либо колебательного) состояния магнитного поля гидродинамическими движениями проводящей среды.

кривые этой системы, структура которых и определяет топологию магнитного поля. Так как решение задачи первого этапа сопряжено с известными трудностями, то в магнитной гидродинамике используется подход, основанный на построении приближенной модели магнитного поля, учитывающей специфику решаемой задачи. Удачный выбор такой модели позволяет, во-первых не решать уравнения МГД, и, во-вторых, получить адекватную физическую картину топологии магнитного поля.

Здесь мы сосредоточимся на задаче построения реалистических моделей магнитного поля в атмосфере Солнца, которая весьма актуальна для оценки величины выброса энергии при солнечных вспышках. Реальные физические поля достаточно часто не удовлетворяют требованиям, гарантирующим существование глобальных непрерывных потоков на несущем многообразии. Однако, при ряде дополнительных ограничений физического характера (их точное описание будет приведено ниже) можно получить поля, которые являются стандартными объектами теории динамических систем. Как уже было отмечено в работе [14] возникает класс моделей магнитных полей, для которых является естественным рассмотрение следующих задач:

Задача 1. Для заданного набора источников поля построить все структурно устойчивые⁴ конфигурации магнитных силовых линий (фазовые портреты соответствующего потока);

Задача 2. Найти типичные⁵ бифуркации конфигураций, порождаемых однопараметрическим семействами таких векторных полей.

В последнее двадцатилетие решению этих двух задач было посвящено большое количество работ специалистов в области астрофизики. Появился даже термин *магнитная топология*, обозначающий метод описания структуры магнитного поля в терминах трехмерных векторных полей. Однако, для получения полной картины не хватает, на наш взгляд, строгого математического обоснования этих результатов, чему посвящена настоящая статья.

Нелокальные бифуркации в магнитных полях связаны с рождением или разрушением так называемых сепараторов, математическими образами которых являются гетероклинические траектории потоков, принадлежащие пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия. Проблема существования таких траекторий для произвольных потоков Морса-Смейла⁶ является нетривиальной (см. например, работы [3]-[6]).

Изучение топологии магнитных полей в плазме в терминах динамических систем началось достаточно давно (в начале 60-х годов прошлого века), о чем свидетельствует внушительное количество публикаций по данной тематике. Большую их часть можно найти в библиографическом списке монографии [7] и обзора [8]. Некоторые более поздние работы приведены списке литературы данной публикации. Отдельно отметим пионерские работы

⁴ Пусть v – C^r -гладкое векторное поле ($r \geq 1$) на C^{r+1} -гладком многообразии M . Поток, порождаемый полем v , называется структурно устойчивым (грубым), если в пространстве всех C^1 -гладких векторных полей на M существует окрестность поля v такая, что всякое векторное поле из этой окрестности топологически орбитально эквивалентно исходному, причем, гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождественному.

⁵ Понятие типичности бифуркации векторных полей подробно обсуждается в книге [2].

⁶ Гладкий поток называется потоком Морса-Смейла, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) его неблуждающее множество является объединением конечного числа гиперболических положений равновесия и замкнутых траекторий;

2) пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий неблуждающего множества трансверсальны.

[9], [10], [11] и [12], с которых собственно и началось применение топологических методов для изучения рассматриваемого класса магнитных полей.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются геометрические понятия, используемые при описании топологической структуры произвольных магнитных полей, удовлетворяющих уравнениям МГД. Кроме того, обсуждается свойство вмерзности магнитного поля в идеальную плазму. Следствием этого свойства является неизменность топологической структуры магнитного поля с течением времени: поля \mathbf{H}_{t_1} и \mathbf{H}_{t_2} орбитально топологически эквивалентны⁷.

В разделе 3 рассматриваются основные модели магнитных полей в короне Солнца: так называемые модели топологии магнитных зарядов (модели ТМЗ).

В разделе 4 рассмотрена простейшая но важная модель ТМЗ, порождаемого потенциалом, определяемым положением зарядов в фазовом пространстве.

2. Геометрия магнитных полей, удовлетворяющих уравнениям МГД

Будем предполагать, если не оговорено отдельно, что несущее многообразие M^3 , на котором задано магнитное поле, гомеоморфно трехмерной сфере S^3 . Пусть $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ – вектор магнитной индукции произвольного магнитного поля, удовлетворяющего уравнениям МГД. Если обозначить через $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ евклидовы координаты точки S^3 в локальной карте, то силовые линии магнитного поля являются интегральными кривыми векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где s – параметр, определяющий положение точки на интегральной кривой относительно начального положения.

2.1. Особенности магнитного поля

Описание топологии силовых линий магнитного поля начинается с описания конфигурации особенностей поля. Электромагнитное поле имеет особенности в точках, где оно равно нулю (такие точки называются нулевыми точками поля), а также в точках, где расположены источники поля: электрические или магнитные заряды. Силовые линии поля либо начинаются, либо заканчиваются в этих точках. Магнитные заряды – монополи – до сих пор экспериментально не обнаружены, поэтому считается, что магнитное поле не имеет источников. Математически это свойство эквивалентно равенству

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (2.2)$$

Нулевые точки поля определяются уравнением

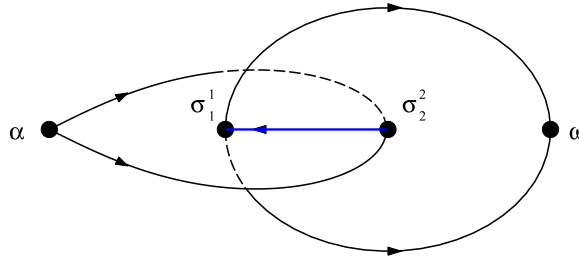
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.3)$$

Они являются положениями равновесия (неподвижными точками) потока, порождаемого этим полем. Из условия бездивергентности (2.2) следует, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки удовлетворяют равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (2.4)$$

⁷ Два векторных поля на многообразии M^3 называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M^3 \rightarrow M^3$, переводящий интегральные кривые первого поля в интегральные кривые второго, сохраняя их ориентации.

В типичном случае вещественные части собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нулевой точки поля \mathbf{B} не равны нулю. Тогда из равенства (2.4) следует, что нулевая точка является седлом с двумерной и одномерной сепаратрисами. Так как собственные значения являются корнями вещественного многочлена третьей степени, то они либо все вещественные, либо одно из них вещественно, а два других – комплексно сопряженные.



Р и с у н о к 2.1

Гетероклиническое пересечение двумерных сепаратрис

В литературе по физике магнитных полей одномерную сепаратрису седла называют *шипом* (spine), а двумерную – *веерной поверхностью* (fan). Пересечения веерных поверхностей различных нулевых точек принято называть *сепараторами*. Если эти пересечения трансверсальны, то их называют *гетероклиническими сепараторами*. На языке непрерывных динамических систем (потоков) – это гетероклинические траектории (рис. 2.1). Объединение особенностей поля, шипов, веерных поверхностей и сепараторов определяет топологическую структуру поля и называется *скелетом* магнитного поля⁸.

2.2. Свойство вмороженности и устойчивость топологии магнитного поля

Эволюция во времени магнитного поля описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu_m \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

где ν_m – магнитная вязкость, характеризующая проводимость плазмы, \mathbf{v} – скорость движения частиц плазмы. Таким образом, геометрия магнитного поля меняется с течением времени, т.к. правая часть уравнения (2.1) зависит от t как от параметра.

В идеально проводящей плазме ($\nu_m = 0$) магнитное поле обладает так называемым свойством *вмороженности*: при движении среды силовые линии следуют за ней, будучи как бы приклеенными к ее частицам (теорема Альфвена⁹ [13]). Критерием вмороженности магнитного поля в плазму является выполнение уравнения индукции.

Т е о р е м а 2.1. ([14], теорема 2.1) *Правая часть уравнения (2.5) при $\nu_m = 0$ равна скобке Пуассона полей \mathbf{v} и \mathbf{B} .*

⁸ При построении изображений скелетов векторных полей мы придерживаемся общепринятых обозначений: источники обозначаются буквой α , стоки – ω , седла – σ^n , где n – размерность неустойчивого многообразия.

⁹ Ханнес Улоф Йёста Альфвен (швед. Hannes Olof Gosta Alfven; 30 мая 1908, Норрчёпинг – 2 апреля 1995, Юрсхольм) – известный шведский физик, специалист по физике плазмы. Лауреат Нобелевской премии по физике в 1970 г. за работы в области теории магнитогидродинамики.

Равенство нулю скобки Пуассона¹⁰ эквивалентно свойству коммутруемости потоков, порождаемых этими полями ([16], гл. 8, § 39, теорема D).

В идеальной плазме свойство вмороженности поля является следствием постоянства магнитного потока через поверхность, натянутую на произвольный замкнутый контур, который движется вместе с плазмой (теорема Кельвина о циркуляции для магнитного потока). Рассмотрим закон Ома для плазмы

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{R},$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, $\mathbf{R} = \nu_m \nabla \times \mathbf{B}$. Пусть вектор \mathbf{R} удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = 0, \quad (2.6)$$

которое при $\mathbf{B} \neq 0$ эквивалентно уравнению

$$\nabla \times \mathbf{R} = \alpha \mathbf{B},$$

где α – некоторая скалярная функция. Небольшой модификацией доказательства теоремы 2.1 можно показать, что скобка Пуассона полей \mathbf{v} и \mathbf{B} и в этом случае также равна нулю. Таким образом, при выполнении условия (2.6) магнитное поле обладает свойством вмороженности¹¹.

Экспериментальные наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля в плазме демонстрирует характер релаксационных колебаний: в течении значительного промежутка времени структура магнитного поля не изменяется, затем быстро происходит перестройка структуры, которая сопровождается явлением *перезамыкания магнитных силовых линий* [7]. Так как силовые линии поля движутся вместе с частицами плазмы, то линии с разными направлениями¹² могут оказаться достаточно близко. Далее силовые линии могут либо разойтись без изменения топологии, либо перезамкнуться. Очевидно, возможными моделями явления магнитного перезамыкания являются бифуркации в системе (2.1), приводящие к изменению топологии поля.

Так как вектор индукции \mathbf{B} зависит от времени t , то поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$ определяют, вообще говоря, две различные конфигурации интегральных кривых. Свойство вмороженности гарантирует неизменность топологии магнитного поля во времени.

Т е о р е м а 2.2. ([15]) Пусть магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ коммутирует с вектором скорости частиц плазмы. Тогда поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$ топологически орбитально эквивалентны для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

3. Модели топологии магнитных зарядов

3.1. Свойства полей, определяемых моделями топологии магнитных зарядов

Некоторые особенности магнитного поля в короне Солнца позволяют использовать в качестве его моделей поля с точечными источниками, в которых условие бездивергентности поля (2.2) нарушается. С точки зрения электродинамики, точечные источники поля

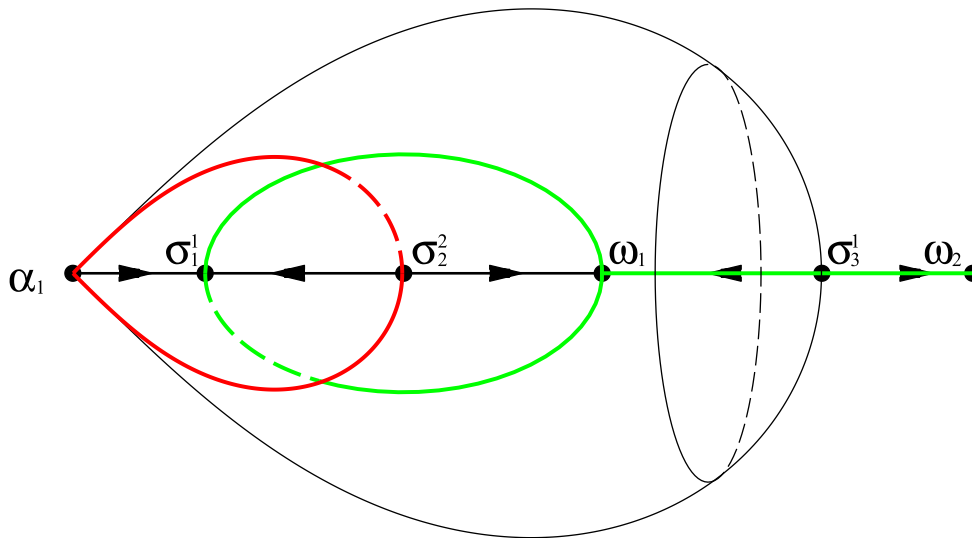
¹⁰ Пусть L_u, L_v – оператор дифференцирования по направлению поля \mathbf{u}, \mathbf{v} соответственно. Дифференциальный оператор (1-го порядка) $L_u L_v - L_v L_u$ называется скобкой Пуассона векторных полей \mathbf{u} и \mathbf{v} .

¹¹ Впервые в геометрических терминах свойство вмороженности обсуждалось в работе [15].

¹² Направление силовой линии в заданной точке совпадает с направлением вектора \mathbf{B} , касающегося линии в этой точке.

это особенности поля, в которых оно принимает бесконечные значения. Для того, чтобы избежать работы с бесконечностями в астрофизике используется так называемая модель *топологии магнитного заряда* (модель ТМЗ), суть которой сводится к следующему:

1. реальный источник поля представляется в виде нулевой точки поля, которая является устойчивым (неустойчивым) положением равновесия;
2. поле потенциально, то есть представимо в виде $\mathbf{B} = \nabla\Phi$, где Φ – скалярный потенциал;
3. при моделировании магнитного поля короны Солнца граница фотосферы рассматривается как двумерная сфера S^2 , на которой располагаются все источники поля.



Р и с у н о к 3.1

Скелет магнитного поля с тремя источниками (α_1 – источник, ω_1, ω_2 – стоки) и тремя седлами ($\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^1$). Сепаратор – интегральная кривая, соединяющая седло σ_1^1 с седлом σ_2^2

Физическое обоснование корректности этой модели можно найти, например, в обзоре [8]. С точки зрения теории динамических систем суть модели ТМЗ сводится к следующему.

Обычно поток (непрерывная динамическая система) порождается векторным полем, особенностями которого являются только нулевые точки. Так как геометрически силовые линии поля в окрестности источников ведут себя также, как в окрестности неустойчивых (устойчивых) нулевых точек поля, то в модели ТМЗ условие 1 утверждает, что геометрия реального поля несущественно отличается от геометрии поля, у которого источники (стоки) поля являются неустойчивыми (устойчивыми) нулевыми точками. На границе фотосферы этим точкам соответствуют следы (конечного размера) пучков магнитных линий, пересекающих границу. Таким образом, точечные источники – компактификация этих следов. Хотя дивергенция поля в этих точках не равна нулю, однако именно это условие позволяет из множества потенциальных полей выделить класс полей, допускающих полную топологическую классификацию, что невозможно для бездивергентных полей.

Естественно предположить, что потенциальное поле в условии 2 порождается *функцией Морса*¹³. Известно (см., например, книгу [17]), что существует плотное множество

¹³ Напомним, что C^2 -функция φ на n -мерном многообразии называется функцией Морса, если для любой ее критической точки p существует окрестность V_p с координатной системой $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и целое i_p – индекс p такие, что $\varphi(\mathbf{x})|_{V_p} = \varphi(p) - \sum_{k=1}^{i_p} x_k^2 + \sum_{k=i_p+1}^n x_k^2$

градиентных векторных полей таких, что любое поле из этого множества порождается функцией Морса φ и допускает так называемую *самоиндексирующуюся энергетическую функцию* f , которая является функцией Морса со свойствами:

- 1) множество критических точек φ и f совпадают;
- 2) для каждой критической точки p имеем $f(p) = \varphi(\mathbf{x}) + \text{const}$ при $x \in V_p$ и $f(p) = i_p$;
- 3) $\nabla\varphi \cdot \nabla f < 0$ вне множества критических точек.

Вообще говоря, условие 3 не является существенным, оно лишь дает некоторые удобства при численном исследовании моделей поля. Кроме того, иногда его дополняют предположением об инвариантности границы фотосферы относительно порождаемого потока (компонента B_z магнитного поля равна нулю).

Как показано в [5] и [18] модель ТМЗ приводит к рассмотрению сформулированных во введении задач для векторных полей, порождающих потоки со следующими свойствами:

- 1) каждый поток \mathbf{F}^t не имеет замкнутых траекторий и его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия;
- 2) поток \mathbf{F}^t допускает самоиндексирующуюся энергетическую функцию $f : S^3 \rightarrow [0, 3]$.

Будем обозначать через G множество потоков со свойствами 1) и 2). Заметим, что потоки из G не обязательно являются структурно устойчивыми.

На рис. 3.1 показан скелет магнитного поля с одним источником, двумя стоками и тремя нулевыми точками, построенный в соответствии с моделью ТМЗ.

3.2. Энергетическая функция и топологическая классификация

Самоиндексирующуюся энергетическую функцию потоков из класса G можно использовать для топологической классификации этих потоков.

Рассмотрим векторное поле, порождающее поток из класса G . Пусть Ω_0 – множество источников, Ω_3 – множество стоков, $\Omega_{1,2}$ – множество седел индексов 1 и 2, соответственно. Если f – самоиндексирующаяся энергетическая функция, соответствующая этому полю, то $\Sigma = f^{-1}(3/2)$. Из предположений модели ТМЗ следует, что число особенностей поля удовлетворяет соотношению

$$n_\alpha - n_\sigma^2 = n_\omega - n_\sigma^1, \quad (3.1)$$

где n_α – число источников, n_ω – число стоков, n_σ^1 – число седел индекса 1, n_σ^2 – число седел индекса 2. Оно является следствием равенства нулю суммы индексов особых точек векторного поля на трехмерном замкнутом многообразии. Равенство (3.1) определяет топологию поля с точностью до числа гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых двумерных сепаратрис. Далее, пусть

$$g = \frac{n_\sigma^1 + n_\sigma^2 - n_\alpha - n_\omega + 2}{2}.$$

Тогда для произвольного потока из G справедливы следующие утверждения ([18], лемма 2):

1. g – целое неотрицательное число;
2. поток имеет не менее g седел индекса 1, устойчивое многообразие которых содержит гетероклиническую траекторию;
3. поверхность уровня энергетической функции Σ является замкнутой ориентируемой поверхностью рода g .

Энергетическая функция потоков из класса G является полным топологическим инвариантом в следующем смысле.

О п р е д е л е н и е 3.1. *Говорят, что самоиндексирующиеся энергетические функции f и f' потоков F^t и F'^t согласованно топологически эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $H : S^3 \rightarrow S^3$ такой, что*

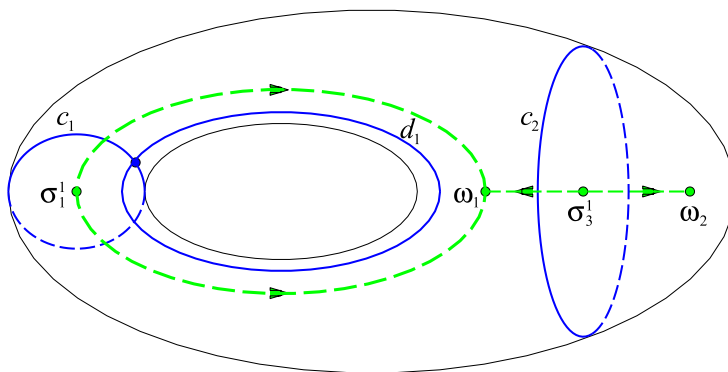
1. $f' \circ H = f$;
2. $H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega'_1}^s \cap \Sigma'$, $H(W_{\Omega_2}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega'_2}^u \cap \Sigma'$.

Два потока из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их энергетические функции согласованно топологически эквивалентны ([18], теорема 3).

3.3. Градиентно-подобные потоки

Как было отмечено выше, потенциальные векторные поля порождают потоки, которые не обязательно являются структурно устойчивыми. С другой стороны, как было показано С. Смейлом ([19], теорема А), градиентный поток, порождаемый функцией Морса, может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1 -топологии) *градиентно-подобным потоком*. Напомним, что градиентно-подобные потоки это потоки Морса-Смейла, у которых отсутствуют замкнутые траектории. Градиентно-подобные потоки структурно устойчивы, для потоков на трехмерной сфере существует полная топологическая классификация (см., например, [20]). В силу этого можно считать, что структурно устойчивые конфигурации магнитных полей, удовлетворяющих требованиям модели ТМЗ, представляются градиентно-подобными потоками.

В каком смысле равенство (3.1) является топологическим инвариантом градиентно-подобных потоков? При фиксированном числе источников и стоков это уравнение имеет целочисленные решения вида $n_\sigma^1 + m$, $n_\sigma^2 + m$, $m = 0, 1, \dots$. Покажем, что каждому m соответствует структурно устойчивая конфигурация интегральных кривых.



Р и с у н о к 3.2

Окрестность аттрактора (штриховые линии) для поля, скелет которого изображен на рис. 3.1

Для различения топологически не эквивалентных конфигураций будем использовать топологический инвариант градиентно-подобных потоков на трехмерных многообразиях, предложенный в работе [20].

Обозначим через W_a^u , W_a^s неустойчивое и устойчивое интегральное многообразие точки a . Объединение A стоков, седел индекса 1 и их неустойчивых сепаратрис является

аттрактором¹⁴ потока, порождаемого рассматриваемым векторным полем (соответственно, объединение R источников, седел индекса 2 и их устойчивых сепаратрис является репеллером потока).

Известно [21], что граница F трубчатой окрестности множества A представляет собой ориентированную поверхность рода $n_\sigma^1 - n_\omega + 1$, которая задает разбиение Хегора¹⁵ сферы S^3 . Пересечения

$$\{c_k = W_{\sigma_k^1}^s \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^1\}$$

представляют собой набор непересекающихся простых замкнутых кривых на поверхности F . Еще один набор замкнутых кривых на F дают пересечения

$$\{d_k = W_{\sigma_k^2}^u \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^2\}.$$

По построению число гетероклинических интегральных кривых равно числу пересечений кривых первого набора с кривыми из второго набора (рис. 3.2).

Тогда, согласно теореме 1 из [20], поверхность F с первым и вторым наборами замкнутых кривых является полным топологическим инвариантом потока, порождаемого векторным полем: две конфигурации интегральных кривых орбитально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : F \rightarrow F'$, который переводит первый набор окружностей в первый, а второй во второй. Алгоритм проверки существования гомеоморфизма h приведен в упомянутой работе [20].

З а м е ч а н и е 3.1. Каждому n соответствует счетное число топологически не эквивалентных конфигураций интегральных кривых, т.к. число гетероклинических траекторий потока Морса-Смейла – топологический инвариант.

4. Простая модель потенциального поля, удовлетворяющая модели ТМЗ

Здесь рассматривается простая, но очень популярная модель магнитного поля, порождаемая потенциалом, имеющим конечное число источников поля. Потенциал задается положением зарядов в фазовом пространстве и имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}. \quad (4.1)$$

Тогда

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3}. \quad (4.2)$$

Это поле имеет n источников с интенсивностями α_k , расположенных в точках \mathbf{r}_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Условие бездивергентности $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ выполняется всюду, кроме источников поля. В равенстве (4.2) подразумевается баланс источников поля, то есть сумма

¹⁴ Замкнутое множество A называется *аттрактором* потока f^t , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f^t(U_A) \subset \operatorname{int}U_A$ и $A = \bigcap_{t \geq 0} f^t(U_A)$. Множество R называется *репеллером*, если оно – аттрактор потока f^{-t} .

¹⁵ Разбиение Хегора замкнутого трехмерного многообразия – представление его в виде объединения двух трехмерных многообразий с общим краем, каждое из которых является полным кренделем (handlebody).

интенсивностей всех источников равна нулю. В случае неравенства нулю этой суммы добавляется источник соответствующей интенсивности, расположенный в бесконечно удаленной точке.

В этой модели магнитное поле в источниках принимает бесконечные значения. Однако, как было отмечено выше, поведение силовых линий в окрестности источников не отличается от поведения этих линий в окрестности притягивающих (отталкивающих) нулевых точек поля. Построим векторное поле, эквивалентное полю (4.2), такое что все источники являются нулевыми точками. В физике ей соответствует так называемая *процедура регуляризации* в окрестности источников.

Пусть $a(\mathbf{r}) = \prod_{k=1}^n \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3$. Тогда уравнение (2.3) можно представить в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) a(\mathbf{r}) / \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3 = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \mathbf{Q}(\mathbf{r}).$$

Ясно, что уравнение $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = 0$ определяет нули поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ и имеет, кроме этого, простые нули в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$.

Пусть $\epsilon > 0$, для любого $k = 1, 2, \dots, n$ найдем шар $U_k(\epsilon)$ радиуса $\rho(\epsilon)$ с центром в точке \mathbf{r}_k такой, что $a(\mathbf{r}) < \epsilon$ для всех $\mathbf{r} \in U_k(\epsilon)$. Очевидно, что $\rho(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{r}, \epsilon)} \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \tag{4.3}$$

где $a(\mathbf{r}, \epsilon) = a(\mathbf{r}) + \epsilon \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{r})$, а $b_k : \bar{U}_k(\epsilon) \rightarrow [0, 1]$ – C^∞ -функция такая, что

1. $b_k(\mathbf{r}) = 1$ при $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| \leq \frac{\rho(\epsilon)}{2}$,
2. $0 < b_k(\mathbf{r}) < 1$ при $\frac{\rho(\epsilon)}{2} < \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| < \rho(\epsilon)$,
3. $b_k(\mathbf{r}) = 0$ при $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| \geq \rho(\epsilon)$.

Определенное таким образом поле $\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r})$ имеет те же самые нули, что и поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, бездивергентно в области $S^3 \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k(\epsilon)$ и имеет в качестве источников-стоков простые нулевые точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$.

Как связаны векторные поля (4.2) и (4.3)? Ответ дает следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ орбитально топологически эквивалентно полю $\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h : S^3 \rightarrow S^3$ – отображение, задаваемое следующим образом. Вне окрестностей $U_k(\epsilon)$ h – тождественное отображение, так как интегральные кривые обоих полей совпадают.

В окрестности $U_k(\epsilon)$ все интегральные кривые уравнения (2.1) входят в источник \mathbf{r}_k или выходят из него, причем достигают источник за конечное “время”, зависящее, вообще говоря, от начальных данных¹⁶.

¹⁶ В простейшем случае одного источника уравнение (2.1) в сферических координатах $(\varphi, \theta, \rho = \|\mathbf{r}\|)$ записывается в виде системы

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2},$$

Рассмотрим интегральные кривые полей \mathbf{B} и \mathbf{B}_ε с одинаковыми начальными данными на границе шара $U_k(\varepsilon): (\varphi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$. Тогда гомеоморфизм $h: U_k(\varepsilon) \rightarrow U_k(\varepsilon)$ строится следующим образом. Пусть $\mathbf{F}_{\mathbf{B}_\varepsilon}^s(\mathbf{r}_0)$ – интегральная кривая уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}_\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

с начальным значением \mathbf{r}_0 . Сопоставим точке $\mathbf{F}_{\mathbf{B}_\varepsilon}^s(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$ точку на интегральной кривой поля \mathbf{B} с параметром $s_k s / (s_k - s)$, где $s_k(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$ – “время” достижения точки \mathbf{r}_k . Так как функция $s_k(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$ непрерывна, то это соответствие будет не только взаимно однозначным, но и непрерывным.

Далее, при $\mathbf{r} \in U_k(\varepsilon)$ уравнение (4.4) представляет собой сингулярно возмущенное уравнение

$$a(\mathbf{r}, \varepsilon) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

имеющее единственное положение равновесия, которое асимптотически устойчиво (неустойчиво). Пусть $\mathbf{r}(s, \mathbf{r}_0, \varepsilon)$ – решение (4.5) с начальным значением $\mathbf{r}_0 = (\varphi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$. Тогда согласно классической теореме А.Н. Тихонова [22] $\mathbf{r}(s, \mathbf{r}_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{r}_k$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда следует, что отображение h мало отличается от тождественного и непрерывно. **Доказательство закончено.**

Благодарности. Авторы выражают благодарность В.З. Гринесу, Е.В. Жужома и Е.Я. Гуревич за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
2. В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Совер. пробл. математики. т. 5.*, Наука, М., 1985.
3. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка, “О существовании магнитных линий, соединяющих нулевые точки”, *Журнал СВМО*, **16:1** (2014), 8–15.
4. В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, С.Х. Зинина, “Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы”, *Нелинейная динамика*, **10:4** (2014), 427–438.
5. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D*, **294** (2015), 1–5.
6. Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Рождение сепараторов в магнитных полях”, *Динамические системы*, 2017 (в печати).
7. Э. Прист, Т. Форбс, *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.

общее решение которой имеет вид $\varphi = \varphi_0, \theta = \theta_0, \rho = (2\alpha_k s + \rho_0^3)^{1/3}$. Интегральные кривые с начальными данными на границе шара $U(\varepsilon)$ через конечное значение параметра $s_0 = \frac{\rho_0^3}{3|\alpha|}$ входят в точку 0.

8. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2:7** (2005), 5–72.
9. М.М. Молоденский, С.И. Сыроватский, “Магнитное поле в активных областях и его нулевые точки”, *Астрономический Журнал*, **54** (1977), 1293–1304.
10. В.С. Горбачев, С.Р. Кельнер, Б.В. Сомов, А.С. Шварц, “Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек”, *Астрономический журнал*, **65:3** (1988), 601–612.
11. E.R. Priest, V.S. Titov, “Magnetic Reconnection at Three-Dimensional Points”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **354** (1996), 2951–2992.
12. D.W. Longcope, “Topology and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona”, *Solar Phys.*, **169:1** (1996), 91–121.
13. Н. Алфвен, “On sunspots and the solar cycle”, *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1–17.
14. М.Л. Коломиец, А.Н. Сахаров, Е.В. Трегубова, “Топология магнитных полей и динамические системы”, *Журнал СВМО*, **18:1** (2016), 31–44.
15. G. Hornig, K. Schindler, “Magnetic topology and the problem of its invariant definition”, *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.
16. В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
17. А.Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология*, Издательство МГУ, М., 1983.
18. V. Grines, O. Pochinka, “Topological Classification of Global Magnetic Fields in the Solar Corona”, *Solar Physics*, 2017 (in press).
19. S. Smale, “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math.*, **74:1** (1961), 199–206.
20. А.О. Пришляк, “Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях”, *Матем. заметки*, **71:2** (2002), 254–260.
21. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сборник*, **194:7** (2003), 25–56.
22. А.Н. Тихонов, “О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра”, *Матем. сб.*, **22:2** (1948), 193–204.

Поступила 10.04.2017

MSC2010 37C15

Morse-Smale flows and the model of the topology of magnetic fields in plasma

© A. N. Sakharov¹⁷, A. A. Shilovskaya¹⁸

Abstract. This article is a continuation of the work [14] and is devoted to the presentation of results related to the construction of models of magnetic fields in an electrically conductive medium (plasma) in terms of dynamic systems. Research in this direction has been intensively pursued over the past 20 years. Since the solution of magnetic hydrodynamics' equations is associated with certain difficulties approximate models of magnetic fields are used. A class of vector fields' models is constructed, united by the common name *model of the topology of magnetic charges*. Fields from this class generate continuous dynamical systems (flows) on three-dimensional manifolds with a sufficiently simple structure. First, the non-wandering set is finite and consists of hyperbolic equilibrium states. Second, these flows allow the existence of a so-called self-indexing energy function that allows them to be completely topologically classified. In addition, fields of this class may be arbitrarily closely approximated by vector fields generating structurally stable flows. Particular attention is paid to the fields in the corona of the Sun, which is associated with the actual problem of energy release estimation in solar flares.

Key Words: singular points of the field, magnetic field lines, sources, sinks, separatrix, separators, heteroclinic curves.

REFERENCES

1. L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Elektrodinamika sploshnykh sred [Continuum electrodynamics]*, Nauka, M., 1982 (In Russ).
2. V.I. Arnold, V.S. Afraimovich, U.C. Iliashenko, L.P. Shilnikov, *Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. Itogi nauki i tekhniki. Sovr. prob. matematiki. m. 5.*, Nauka, M., 1985 (In Russ).
3. V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, O.V. Pochinka, “[On the existence of magnetic lines connecting the zero points]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **16**:1 (2014), 8–15 (In Russ).
4. V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, E.V. Zhuzhoma, S.H. Zinina, “[Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in a magnetic field of a plasma]”, *Nelineynaya dinamika*, **10**:4 (2014), 427–438 (In Russ).
5. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “[On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids]”, *Physica D*, **294** pages 1–5 (2015).
6. E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, “[The birth of separators in magnetic fields]”, *Dinamicheskie sistemy*, 2017 (в печати) (In Russ).

¹⁷ **Alexandr N. Sakharov**, Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, FGBOU VO "Nizhegorodskaya State Agricultural Academy"(603107, Russia, Nizhny Novgorod, Gagarin Avenue, 97), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, ansakharov2008@yandex.ru

¹⁸ **Anna A. Shilovskaia**, postgraduate student of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3328-8157>, a.shilovskaia@gmail.com

7. E. Priest, T. Forbes, *Magnetic reconnection: magnetohydrodynamic theory and applications*, Phizmatlit, M., 2005 (In Russ).
8. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2:7** (2005), 5–72.
9. M.M. Molodenskiy, S.I. Syrovatskiy, “[Magnetic field in active regions and its zero points]”, *Astronomicheskii Zhurnal*, **54** (1977), 1293–1304 (In Russ).
10. V.S. Gorbachev, S.R. Kelner, B.V. Somov, A.S. Shvarts, “[A new topological approach to the problem of the trigger of solar flares]”, *Astronomicheskii Zhurnal*, **65:3** (1988), 601–612 (In Russ).
11. E.R. Priest, V.S. Titov, “Magnetic Reconnection at Three-Dimensional Points”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **354** (1996), 2951–2992.
12. D.W. Longcope, “Topology and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona”, *Solar Phys.*, **169:1** (1996), 91–121.
13. H. Alfven, “On sunspots and the solar cycle”, *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1–17.
14. M.L. Kolomiets, A.N. Sakharov, E.V. Tregubova, “[The topology of magnetic fields and dynamical systems]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18:1** (2016), 31–44 (In Russ).
15. G. Hornig, K. Schindler, “Magnetic topology and the problem of its invariant definition”, *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.
16. V.I. Arnold, [*Mathematical methods of classical mechanics*], Nauka, M., 1974 (In Russ).
17. A.T. Fomenko, *Diffentsialnaya geometriya i topologiya [Differential geometry and topology]*, MGU publ., M., 1983 (In Russ).
18. V. Grines, O. Pochinka, “[Topological Classification of Global Magnetic Fields in the Solar Corona]”, *Solar Physics*, 2017 (in press).
19. S. Smale, “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math.*, **74:1** (1961), 199–206.
20. A.O. Prishlyak, “[Vector Morse-Smale fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds]”, *Matem. zametki*, **71:2** (2002), 254–260 (In Russ).
21. V.Z. Grines, E.V. Zhuzoma, V.S. Medvedev, “[New relations for Morse-Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices]”, *Matem. sbornik*, **194:7** (2003), 25–56 (In Russ).
22. A.N. Tihonov, “[On the dependence of solutions of differential equations on a small parameter]”, *Matem. sbornik*, **22:2** (1948), 193–204 (In Russ).

Submitted 10.04.2017