УДК 517.938

О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n посредством раскрашенного графа

© Е.Я. Гуревич[1], Д. С. Малышев[2]

Аннотация. В работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n > 3$. Каждому диффеоморфизму $f \in G$ ставится в соответствие раскрашенный граф Γ_f, оснащенный автоморфизмом P_f и дается определение изоморфизма двух таких графов. Анонсируется результат о том, что существование изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ в смысле данного определения является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in G$, и существует алгоритм, распознающий существование изоморфизма таких графов за линейное время.

Ключевые слова: структурно-устойчивые динамические системы, диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, алгоритм распознавания изоморфизма графов

Задача топологической классификации динамических систем восходит к работам А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера и М. Пейшото. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в 1937 году ввели понятие грубости динамической системы и показали, что необходимые и достаточные условия грубости потока на плоскости (двумерной сфере) состоят в требовании конечности множества неблуждающих орбит, его гиперболичности и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло. В 1960 году С. Смейл ввел класс динамических систем на многообразиях произвольной размерности, удовлетворяющих аналогичным условиям, при этом условие отсутствия траекторий, идущих из седла в седло, трансформировалось в более общее условие трансверальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит. Такие системы позднее получили название систем Морса-Смейла. Условие конечности множества неблуждающих орбит приводит к идее сведения проблемы топологической классификации таких систем к комбинаторной задаче описания взаимного расположения этих орбит в несущем многообразии. Впервые этот подход был применен Е. А. Леонтович и А. Г. Майером для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий и был развит в работах М. Пейшото, А. А. Ошемкова и В. В. Шарко, а так же Я. Л. Уманского, С. Ю. Пилюгина, в которых решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а также В. З. Гринесом, А. Н. Безденежных для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит.

Как оказалось, эта идея, вообще говоря, не работает в случае диффеоморфизмов на многообразиях размерности 3 из-за существования диффеоморфизмов с дико вложенными инвариантными многообразиями седел. Этот факт потребовал нового языка для получения топологических инвариантов в классе таких систем. Полная топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях получена в цикле работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, О. В. Починки, Е. В. Жужомы, В.

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; egurevich@hse.ru

[2] Профессор кафедры прикладной математики и информатики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород; dsmalyshev@hse.ru

С. Медведева (см. для ссылок обзор [5]). Идея, приведшая к успешному решению этой задачи, состоит в выделении связных аттрактора и репеллера и описания блуждающего множества, содержащегося в области притяжения аттрактора (области отталкивания репеллера), при помощи *схемы диффеоморфизма* – инварианта, отражающего структуру пространства орбит и вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек.

В работах В. З. Гринеса, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведева [3], [4] был сделан первый шаг в топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях M^n размерности большей трех ($n \geq 4$) в предположении, что множество неустойчивых сепаратрис одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Было установлено, что классы топологической сопряженности таких диффеоморфизмов определяются графом диффеоморфизма, как и в случае градиентно-подобных динамических систем на поверхностях, и что, вообще говоря, не верно для случая $n = 3$. В работе [6] при помощи схемы диффеоморфизма была получена топологическая классификация n-мерных диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений в предложении, что размерность инвариантных мнгоообразий седловых периодических точек равна 1 или $(n-1)$.

Настоящая работа является продолжением работ [3], [4], [6]. Мы рассматриваем класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n, $n > 3$, не имеющих гетероклинических пересечений. Сразу отметим, что, в силу [6] (теорема 3), справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Инвариантные многообразия любой седловой периодической точки произвольного каскада $f \in G$ имеют размерность 1 и $n-1$.*

Пусть Ω_f — неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$, $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f |\, dim\, W_p^u = i\}$, $i \in \{0, 1, n-1, n\}$.

Для описания класса топологической эквивалентности диффеоморфизма $f \in G$ воспользуемся идеей А. А. Ошемкова и В. В. Шарко и поставим ему в соответствие раскрашенный граф, оснащенный автоморфизмом, который определяется ниже.

Следующее утверждение, доказанное в [7] (см. теорему 2.3), является одним из ключевых для обоснования вводимого инварианта. Если p — седловая периодическая точка, то каждую компоненту связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) будем называть *устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой* и обозначать через l_p^s (l_p^u).

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Тогда:*

1) $M^n = \bigcup\limits_{p \in \Omega_f} W_p^u = \bigcup\limits_{p \in \Omega_f} W_p^s$;

2) *для любой точки $p \in \Omega_f$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n;*

3) *для любой точки $p \in \Omega_f$ верно равенство $cl\; l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup\limits_{q \in \Omega_f : W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$* [3].

Из пункта 3 этого утверждения, в частности, следует, что для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in G$ замыкание ее инвариантного многообразия W_σ^δ размерности $(n-1)$ содержит, кроме самого этого многообразия, в точности одну периодическую точку. Эта точка является стоковой в случае $\delta = u$ и источниковой в случае $\delta = s$. Тогда

[3] Здесь $cl\; l_p^u$ обозначает замыкание множества l_p^u.

множество $cl\ W^{\delta}_{\sigma}$ является сферой размерности $(n-1)$, гладкой во всех точках кроме, возможно, одной. В силу работ [2], [1], эта сфера является цилиндрически вложенной (что контрастирует со случаем $n=3$)[4]. Объединение $\mathcal{L}_f = \bigcup\limits_{p\in\Omega^1_f} cl\ W^s_p \cup \bigcup\limits_{q\in\Omega^{n-1}_f} cl\ W^u_q$ замыканий всех инвариантных многообразий размерности $(n-1)$ делит сферу S^n на $k=|\Omega^1_f\cup\Omega^{n-1}_f|+1$ компоненту связности[5]. Обозначим эти компоненты связности через $D_1,\dots,D_k$ и положим $\mathcal{D}_f=\bigcup\limits_{i\in 1}^{k} D_i$.

Определение 1.1. *Раскрашенным графом диффеоморфизма $f\in G$ будем называть граф Γ_f со следующими свойствами:*

1) *множество Γ^0_f вершин графа Γ_f изоморфно множеству $\mathcal{D}_f$, множество Γ^1_f ребер изоморфно множеству $\mathcal{L}_f$ посредством некоторого изоморфизма $\xi:\Gamma^0_f\cup\Gamma^1_f\to\mathcal{D}_f\cup\mathcal{L}_f$;*

2) *вершины v_i,v_j соединены ребром $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие вершинам v_i,v_j области D_i,D_j имеют общую границу;*

3) *ребро $e_{i,j}$ имеет цвет s (u), если ему соответствует многообразие $W^s_p\subset\mathcal{L}_f$ ($W^u_q\subset\mathcal{L}_f$).*

4) *Граф Γ_f оснащен автоморфизмом $P_f:\Gamma^0_f\to\Gamma^0_f$ таким, что $\xi P_f=f\xi$.*

Определение 1.2. *Графы $\Gamma_f,\Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов $f,f'\in G$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\eta:\Gamma^0_f\to\Gamma^0_{f'}$ такой, что $P_{f'}=\eta P_f\eta^{-1}$.*

Теорема 1.1. *Диффеоморфизмы $f,f'\in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $\Gamma_f,\Gamma_{f'}$ изоморфны.*

Следующий результат показывает, что раскрашенный граф оказывается наиболее эффективным инвариантом для классификации диффеоморфизмов из класса G, поскольку существует оптимальный линейный алгоритм различения графов таких диффеоморфизмов.

Теорема 1.2. *Пусть $\Gamma_f,\Gamma_{f'}$ – графы диффеоморфизмов $f,f'\in G$ с одинаковым числом k вершин. Тогда существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f,\Gamma_{f'}$ за время $O(n)$.*

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-31-60008-мол-а-дк, 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а), Российского научного фонда (проект 14-41-00044), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2016 году (проект 98) и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

Дата поступления 30.11.2016

[4] Сфера $S^{n-1}\subset M^n$ называется цилиндрически вложенной в M^n, если существует топологическое вложение $h:\mathbb{S}^{n-1}\times[-1;+1]\to M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1}\times\{0\})=S^{n-1}$.

[5] Здесь $|P|$ обозначает мощность множества P.

Список литературы

1. Brown M., “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math*, **75**:2 (1962), 331-341.

2. Cantrell J.C., “Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n”, *Proceeding of the American Mathematical society*, **15**:4 (1964), 574-578.

3. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61-86.

4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62-86.

5. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, 2013, №1(409), 129–188.

6. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015,), 81-90.

7. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

On the topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on the sphere S^n via colored graphs

© **E. Gurevich**[6], **D. Malyshev**[7]

Abstract. We consider a class G of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections defined on the sphere S^n of dimension $n > 3$. For every diffeomorphism $f \in G$ corresponding colored graph Γ_f, endowed by a automorphism P_f, is found. We also give definition of isomorphism of such graphs. The result is stated that existing isomorphism of graphs $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ is the neccesary and sufficient condition of topological conjugacy of diffeomorphisms $f, f' \in G$, and thatan algorithm exists which recognizes this existence by linear time.

Key Words: structurally stable dynamical systems, Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, algorithm of recognizing an existence of an isomorphism of graphs

[6] Associate professor of Fundamental Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics, egurevich@hse.ru

[7] Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; dsmalyshev@hse.ru