

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.865.5, 519.254

## Математическая модель оценки производственных фондов малого предпринимательства

© В. К. Горбунов<sup>1</sup>, А. Г. Львов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Производственные фонды малого предпринимательства (МП) не имеют формального определения и не являются показателем отчётности. Предлагается определение стоимости таких фондов в рамках метода построения «капитальных» производственных функций (ПФ) по данным о производственных инвестициях (показатель отчётности МП), затратах других факторов и выпуске продукции (В.К. Горбунов и А.Г. Львов, 2012). В этом методе в эконометрическую систему оценивания параметров ПФ вводится уравнение динамики «эффективных фондов» на промежутке наблюдения объекта. Начальное значение эффективных фондов является оцениваемым параметром вместе с параметрами используемой ПФ. Задача одновременной оценки этих параметров является плохо обусловленной (некорректно поставленной). Её регуляризация обеспечивается введением дополнительной связи на начальное и конечное значения эффективных фондов. Приводится пример оценки производственных фондов МП Приволжского федерального округа.

**Ключевые слова:** производственные функции, динамика производственных фондов, эффективные фонды, малое предпринимательство, оценивание параметров, плохая обусловленность, регуляризация

## 1. Введение

Производственные фонды являются одним из основных факторов экономического развития страны, её регионов и отраслей. Количественный показатель разнотипных производственных фондов, находящихся на балансе предприятий, кроме малых предприятий<sup>3</sup>, выражается их стоимостью и отражается экономической статистикой. Для малого предпринимательства (МП) в качестве производственных фондов часто используются помещения, машины и оборудование личного пользования, поэтому показатель «производственные фонды» здесь не является показателем отчётности и контроля, но производственные инвестиции частных предпринимателей учитываются и поощряются налоговой политикой. Таким образом, возникает проблема косвенной оценки стоимости производственных фондов МП как специфического сектора экономики. Важность этой проблемы определяется существенной и непрерывно возрастающей долей этого сектора в экономике многих стран, в том числе и в России. Однако нам не известны методики оценок стоимости производственных фондов МП, отражаемые в научной и учебной литературе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-06-00372.

<sup>1</sup> Профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vkgorbunov@mail.ru

<sup>2</sup> Доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; aglvov@mail.ru

<sup>3</sup> В соответствии с законодательством РФ [3] к малым предприятиям относятся индивидуальные предприниматели и предприятия численностью до ста человек с предельной годовой выручкой 800 млн. руб. (до 1.08.2016 – 400 млн. руб.).

Следует отметить, что балансовая стоимость производственных фондов в остальных секторах экономики обычно плохо представляет реальный производственный потенциал из-за известных сложностей стоимостной оценки различных компонент фондов, совпадающих по формальным характеристикам, но имеющих различные сроки эксплуатации и фактические технические характеристики. Кроме того, в экономике, ориентирующейся на изменчивый рыночный спрос, часто не все балансовые фонды работают в полной мере. Это особенно актуально для России после прошедшей в 1990-е годы деиндустриализации [1], [2].

Эффективность оценки реального производственного потенциала может быть повышена на основе анализа производственных инвестиций. Этот показатель отражается в отчётности всех предприятий, в том числе относящихся и к сектору МП. Производственные инвестиции формируют производственные фонды и могут использоваться для косвенной оценки последних. Такая оценка оказывается возможной в рамках метода производственных функции (ПФ), отражающего рациональность (предполагаемую в экономической теории) использования производственных факторов для выпуска продукции в соответствии с рыночным спросом [4], [5], [6], [7]. Эта возможность была реализована в работах [8], [9], [10].

Производственные функции определяют зависимость *валового выпуска* моделируемого объекта от основных производственных факторов, к которым, как правило, относятся производственные фонды, называемые в экономической теории *капиталом*, и *труд*, как это было сделано в указанной пионерской работе американских исследователей Чарлза Кобба и Пола Дугласа<sup>4</sup>. Однако отмеченная выше проблема оценки стоимости производственных фондов, тем более фондов, реально участвующих в производстве продукции, часто делает предположение рациональности использования *балансовых фондов* не соответствующим реальности. Эти трудности стимулировали формальную (без изменения спецификации ПФ) замену некоторыми исследователями фактора «капитал», представляющего запас производственных фондов, на показатель производственных инвестиций, имеющий смысл потока [11], [12]. Соответствующие производственные функции называются *инвестиционными*. Замена показателя запаса капитала на поток инвестиций оправдывается тем, что инвестиции, в отличие от балансовых фондов, определяются текущей рыночной конъюнктурой и, по мере освоения, реализуются в виде новых фондов, реально производящих продукцию. К недостаткам такой замены относится то, что при обнулении любого фактора стандартной ПФ её значение становится нулём. Соответственно, при отсутствии инвестиций на некотором периоде продукция, согласно модели ПФ, не выпускается, несмотря на ненулевой запас капитала<sup>5</sup>.

В работе Воскобойникова И.Б. [1] в целях более адекватного представления производственного потенциала использовано понятие *эффективных основных фондов*, представляющих ту часть балансовых фондов, которые реально участвуют в выпуске продукции. Метод автора оценки динамики эффективных фондов основан на предположении о постоянстве срока службы оборудования на исследуемом интервале и использовании оценок ожидаемых сроков службы. Такие оценки могут быть лишь весьма условными. Соответственно, они будут субъективными.

В наших работах [8], [9] предложен метод построения «капитальных» ПФ по информации о производственных инвестициях вместо информации о балансовых фондах. При

<sup>4</sup> Производственная функция в [4] определена для индексов данных показателей обрабатывающих отраслей (manufacturing) США относительно начального состояния периода наблюдений 1899-1922 гг.

<sup>5</sup> В работе [13] также анализируется некорректное применение в некоторых российских публикациях метода «пространственной регрессии», вместо регрессии по временным рядам, для построения универсальной инвестиционной ПФ (Кобба-Дугласа) сектора МП абстрактного региона России.

этом на периоде наблюдения реконструируется динамика не балансовых фондов, а фондов, объясняющих в рамках теории ПФ реальный выпуск, наблюдаемый на промежутке идентификации. Такие фонды также можно называть эффективными, но они определяются на более объективной основе. Это было продемонстрировано на реальных данных экономики России.

Усложнение содержательной проблемы математического моделирования производства с помощью производственной функции, основным аргумент которой – капитал – не наблюдается непосредственно, а реконструируется, усложняет и задачу идентификации модели. Здесь одновременно с оценкой параметров используемой капитальной ПФ также оценивается начальное значение стоимости эффективных фондов. Соответствующая задача метода наименьших квадратов (МНК) одновременного (комплексного) оценивания расширенного набора параметров в общем случае является плохо обусловленной (некорректно поставленной) задачей нелинейного программирования. Она требует использования эффективных методов оптимизации, а также регуляризации на основе дополнительной содержательной (экспертной) информации. В [8], [9] был предложен специальный вариант известного итеративного *метода продолжения* [14] (*Continuation Method* [15]) для решения систем нелинейных уравнений.

Возможность определения и количественной оценки эффективных фондов по информации о производственных инвестициях в рамках математической модели [8] создаёт предпосылки введения показателя «эффективные производственные фонд» (ЭПФ) для всей экономики страны или региона, а также её отраслей, включая малое предпринимательство. В работе [10] эта модель и вычислительная технология получили дальнейшее развитие. В уравнение динамики фондов введён дополнительно *коэффициент реализуемости инвестиций*, представляющий долю реального использования выделенных производственных инвестиций (после коррупционного присвоения части инвестиций). В качестве дополнительного средства преодоления вычислительной сложности задач МНК был использован переход к *индексным* ПФ с последующим восстановлением параметров функций в абсолютных формах (относительно абсолютных значений переменных), описанный в [7]. Новая технология макроэкономического анализа была апробирована на данных двух регионов – Приволжского и Уральского федеральных округов с использованием нескольких классов двухфакторных ПФ. В качестве второго фактора были рассмотрены альтернативно труд и потребление энергии.

Распространение понятия ЭПФ и метода оценки этого экономического показателя на малое предпринимательство позволяет использовать метод ПФ для анализа этого сектора в традиционном варианте, когда в качестве основного фактора используются не производственные инвестиции, учитываемые официальной статистикой, а накапливаемая стоимость ЭПФ. Этому посвящена данная статья.

Из зарубежных исследований нам известна близкая в алгоритмическом отношении работа М. Doms [16], в которой для построения ПФ по данным об инвестициях (с одновременной оценкой коэффициентов амортизации) применён панельный МНК для группы сталелитейных заводов, использующих одинаковую технологию. Недавняя монография S.T. Naskman [17], охватывающая широкий круг экономико-математического анализа реальных производственных проблем методом ПФ, работ по оценке эффективного капитала не отражает.

Далее изложено развитие метода комплексной оценки параметров «капитальной» ПФ одновременно с оценкой динамики эффективных фондов, заключающееся во введении дополнительного условия смешанного типа на начальное и конечное значения оцениваемых ЭПФ, а также результаты его применения для отрасли консолидированного малого предпринимательства Приволжского федерального округа (ПФО).

## 2. Производственные функции в абсолютной и индексной формах

Производственные функции являются математическими моделями типа *чёрного ящика* [7] достаточно крупных производственных объектов (фирма, отрасль, регион). Таким объектом может быть *совокупность малых предприятий* некоторого территориального образования. Производственные функции описывают сложный объект упрощённо на основе выделения его наиболее существенных (для конкретного исследования) показателей затрат, имеющих количественные меры, и установления конкретной функциональной связи, которая, по предположению, существует между затратами и выпуском.

Далее рассматриваются стационарные двухфакторные капитальные ПФ различных параметрических классов

$$Y = F(K, L; w), \quad (2.1)$$

где валовой выпуск моделируемого производственного объекта  $Y$  за отчётную единицу времени (обычно год) определяется уровнем использования эффективных фондов (эффективного капитала)  $K$  и труда  $L$  и переменная  $w = (w_1, \dots, w_p)$  представляет вектор параметров соответствующего класса ПФ, выбираемый из некоторого множества  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  пространства параметров данного класса функций. Основные переменные  $(Y, K, L)$  по смыслу производственной функции (2.1) неотрицательные.

Инвестиционные ПФ, используемые некоторыми авторами, в частности, для математического моделирования малого предпринимательства [12], [13], отличаются от капитальных (2.1) простой заменой капитальной переменной  $K$  на переменную инвестиций  $I$ . Такие функции лучше отражают рыночную конъюнктуру, чем капитальные (2.1), если последние используют в качестве  $K$  балансовые фонды, но они не могут решить рассматриваемую здесь задачу оценки производственных фондов МП.

При рассмотрении теоретических вопросов зависимость ПФ от параметров не выделяется:  $Y = F(K, L)$ . В записи (2.1) предполагается, что основные переменные  $(Y, K, L)$  имеют размерности: валовой выпуск  $Y$  и фонды  $K$  измеряются стоимостью и затраты труда  $L$  – стоимостью, временем или численностью. Производственные функции (2.1) с содержательно измеренными переменными будем называть ПФ *в абсолютной форме*.

В соответствии с современными представлениями о рациональности производства, производственная функция  $F(K, L)$  должна быть монотонно *возрастающей и квазивогнутой*<sup>6</sup> в некоторой *экономической области* пространства факторов  $\{K \geq 0, L \geq 0\}$ . Внутренняя структура этих функций не существенна и может, в частности, содержать трансцендентные операции относительно их аргументов<sup>7</sup>.

Переменные функциональной связи (2.1), представляющей реальный объект, обычно имеют различный числовой порядок, и это усложняет стандартную задачу МНК оценивания параметров функции, так как минимизируемый функционал имеет обычно овражную форму. В [7] отмечена целесообразность перехода к *индексным* ПФ для преодоления этой проблемы с последующим восстановлением параметров функций в абсолютных формах (относительно абсолютных значений переменных). При этом индексами соответствующих показателей называются отношения значений переменных  $(Y, K, L)$  к их базовым вели-

<sup>6</sup> Квазивогнутость функции  $F(K, L)$  означает, что верхние множества  $\{K \geq 0, L \geq 0 : F(K, L) \geq c\}$  уровней  $c$  выпуклые.

<sup>7</sup> В экономико-математической литературе периодически появляются работы, подвергающие метод ПФ критике с точки зрения эвристической теории размерностей, применяемой в технических науках и физике. При этом практически все ПФ в абсолютной форме, начиная с функции Кобба-Дугласа, приведенной ниже, объявляются нелегитимными. Надуманность этой проблемы для метода ПФ и теории потребительского спроса, использующей функции полезности с подобными свойствами и смыслом инструмента аппроксимации содержательных зависимостей, аргументирована в [7].

чинам  $(Y_0, K_0, L_0)$ :

$$v = \frac{Y}{Y_0}, \quad \kappa = \frac{K}{K_0}, \quad \lambda = \frac{L}{L_0}. \quad (2.2)$$

Индексная функция  $F(\kappa, \lambda; \omega)$  связана с абсолютной функцией  $F(K, L; w)$  равенством

$$F(K, L; w) = Y_0 F(\kappa, \lambda; \omega). \quad (2.3)$$

Связь параметров абсолютной и индексной форм  $w$  и  $\omega$  устанавливается структурным анализом равенства (2.3) для конкретных классов функций [7].

Производственная функция в абсолютной форме  $F(K, L)$  позволяет вычислять принципиально наблюдаемые характеристики производства [5],[7]: *средние эффективности факторов*  $Y/K$  и  $Y/L$ , *предельные эффективности*  $\partial F(K, L)/\partial K$  и  $\partial F(K, L)/\partial L$ , *их отношения – факторные эластичности*

$$\epsilon_K = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} : \frac{Y}{K} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln K}, \quad \epsilon_L = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{Y}{L} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln L}. \quad (2.4)$$

Сумма факторных эластичностей  $\mu_{KL} = \epsilon_K + \epsilon_L$  является *эластичностью производства по масштабу*.

Факторные эластичности как и эффективности факторов, представляют количественные характеристики зависимости выпуска от затрат соответствующих факторов. Однако эластичности не зависят от масштабирования единиц измерения факторов и выпуска и являются относительными безразмерными характеристиками. На языке процентов факторные эластичности показывают, на сколько процентов (примерно) увеличится выпуск, если использование соответствующего фактора возрастёт на 1%. Эластичность производства показывает, что при росте всех факторов на 1% выпуск возрастёт примерно на  $\mu_{KL}$  %.

Производственная функция также позволяет вычислять более глубокие характеристики процесса замещения факторов, при котором сохраняется уровень выпуска:

- *предельную норму замещения* (ПНЗ) труда капиталом

$$S_{LK}(K, L) \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = -\frac{dK}{dL}, \quad (2.5)$$

- *эластичность замещения* труда капиталом

$$\sigma_{LK}(K, L) = \frac{d(K/L)}{K/L} : \frac{dS_{LK}}{S_{LK}} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln S_{LK}}, \quad F(K, L) = const. \quad (2.6)$$

Величина ПНЗ (2.5) представляет предельный коэффициент замещения затрат труда капиталом при условии сохранения уровня выпуска. Математически ПНЗ равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в данной точке  $(K, L)$ , к соответствующей изокванте функции  $F(\cdot)$ . Эта величина зависит от единиц измерения факторов  $(K, L)$  и выпуска  $Y$ . Эластичность замещения (2.6) представляет, аналогично факторным эластичностям (2.4), относительную безразмерную характеристику связи фондовооружённости  $K/L$  с предельной нормой замещения  $S_{LK}$ , показывая (примерно), на сколько процентов изменяется фондовооружённость при изменении ПНЗ на 1%.

Неявными характеристиками ПФ, которые могут дополнить анализ соответствия функции реальному процессу, являются функции *факторного спроса, предложения, прибыли и издержек*, определяемые задачами рационального производства – максимизации прибыли или минимизации издержек [5],[17].

Далее, ввиду сложности задачи комплексной оценки (динамики эффективных фондов и параметров производственной функции), рассматриваемой в следующем разделе, используются только два наиболее простых класса нелинейных капитальных ПФ (2.1): простейший класс – функции Кобба-Дугласа (КД)

$$AK^\alpha L^\beta \quad (2.7)$$

с положительными параметрами  $w = (A, \alpha, \beta) > 0$ , и его обобщение – класс функций

$$A(\nu K^{-\rho} + (1 - \nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho} \quad (2.8)$$

с параметрами  $w = (A, \nu, \rho, \mu)$ . Эти параметры должны удовлетворять условиям  $(A, \mu) > 0$ ,  $-1 \leq \rho \neq 0$ ,  $0 < \nu < 1$ . Приведенные ограничения на параметры функций (2.7) и (2.8) обеспечивают их возрастание и квазивогнутость во всем неотрицательном отрезке аргументов  $(K, L)$ .

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа (2.7). Эта функция положительно однородная степени  $\mu = \alpha + \beta$ , и эта степень представляет также эластичность производства относительно масштаба затрат. Известно [5], что степени  $\alpha$  и  $\beta$  представляют факторные эластичности производства (2.3), и эластичность замещения (2.5)  $\sigma = 1$ . Все эти параметры постоянны для моделируемого объекта относительно режимов его работы, определяемых переменными затрат факторов  $(K, L)$ , что, конечно, является упрощением реальности, неявно заложенным в структуру данной ПФ.

Функция (2.8) положительно однородная степени  $\mu$  и эта степень, как и в случае функции КД, представляет эластичность производства. Здесь факторные эластичности (2.4) уже не постоянные, и эластичность замещения равна  $\sigma = 1/(1 + \rho)$ . Эластичность замещения принимает любые положительные значения при изменении параметра  $\rho$ . Постоянство эластичности замещения  $\sigma$  относительно аргументов  $(K, L)$  дало название этому классу – функции постоянной эластичности замещения (ПЭЗ). В пределе  $\rho \rightarrow 0$  функция ПЭЗ (2.7) переходит в функцию КД (2.6).

Функции КД (2.7), ПЭЗ (2.8) в индексной форме  $F(\kappa, \lambda; \omega)$  и их параметры, отличающиеся от параметров соответствующих абсолютных функций  $F(K, L; w)$ , определяются следующими равенствами. Функция КД:

$$v = a\kappa^\alpha \lambda^\beta, \quad A = \frac{Y_0 a}{K_0^\alpha L_0^\beta}. \quad (2.9)$$

Функция ПЭЗ:

$$v = a(\nu' \kappa^{-\rho} + (1 - \nu') \lambda^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \quad (2.10)$$

$$A = \frac{Y_0 a}{(\nu' K_0^\rho + (1 - \nu') L_0^\rho)^{\mu/\rho}}, \quad \nu = \frac{\nu' K_0^\rho}{\nu' K_0^\rho + (1 - \nu') L_0^\rho}.$$

Переход к индексным функциям (2.9) и (2.10) используется далее как метод улучшения вычислительных свойств задачи реконструкции эффективных фондов с одновременным построением производственной функции МП.

### 3. Задача построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов

Статистика деятельности малого предпринимательства регионов [3] содержит данные о выпуске  $Y_t$ , о производственных инвестициях  $I_t$  и о затратах труда  $L_t$ :

$$\{Y_t, I_t, L_t : t = \overline{0, T}\}. \quad (3.1)$$

Как и при любых наблюдениях (измерениях) реальных объектов, эти данные приближённые.

Метод построения капитальных функций (2.1) по данным (3.1) предложен в [8]. Он основан на использовании уравнения динамики производственного капитала  $K$ , отражающего процесс накопления (освоения инвестиций) и амортизацию фондов. Процесс накопления в общем случае учитывается введением временного лага, но для малого предпринимательства инвестиции обычно расходуются на закупку оборудования и строительство простых объектов. Поэтому лагом здесь можно пренебречь и описать динамику накопления фондов с нормой амортизации  $m$  уравнением

$$K_t = (1 - m) K_{t-1} + I_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.2)$$

Для определения величин  $\{K_1, \dots, K_T\}$  согласно (3.2) следует задать начальное значение эффективного капитала  $K_0$ . Норма амортизации  $m$  обычно задаётся для отраслей и всей экономики. Таким образом, динамика капитала определяется, кроме известных на промежутке наблюдения значений формальных инвестиций  $\{I_0, \dots, I_T\}$  и нормы амортизации  $m$ , также неизвестным начальным капиталом  $K_0$ .

Определение динамики капитала (3.2) позволяет использовать капитальную ПФ некоторого параметрического класса как модель производства, представленного статистикой (3.1). Параметры такой модели  $w$  должны оцениваться вместе с начальным капиталом  $K_0$  из условия достаточно хорошего согласования расчётных значений выпуска  $F(K_t, L_t; w)$  с приближённо заданными значениями  $Y_t$ :

$$Y_t \simeq F(K_t, L_t; w). \quad (3.3)$$

Таким образом, соотношения (3.2) и (3.3) являются математической моделью формирования ЭПФ с дискретным временем. Идентификация такой модели сводится к оценке параметров этой модели

$$z = (w_1, \dots, w_p, K_0),$$

удовлетворяющих ограничениям

$$w \in W, \quad K_0 > 0, \quad (3.4)$$

где множество  $W$  соответствует ограничениям на параметры выбранного класса функций (2.1).

Основным методом решения задач идентификации математического моделирования является метод наименьших квадратов. Для модели (3.2), (3.3) оценка параметров  $\hat{z}$  определяется как точка минимума функции квадратичной невязки системы приближённых равенств статистических и расчётных значения выпусков (3.3):

$$\phi(z) = \sum_{t=0}^T [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \quad (3.5)$$

при условиях (3.2) и (3.4). Далее эту задачу будем называть задачей *комплексного оценивания экономической динамики*.

Наш опыт решения задач минимизации функции (3.5) при условиях вида (3.2) и (3.4) показал типичную плохую обусловленность относительно искомого начального значения капитала  $K_0$ . Для данных о российской [8] и региональных [10] экономик этот параметр

допускал некоторую экспертную оценку, которая позволяла стабилизировать (регуляризовать) задачу минимизации относительно его значений. В случае малого предпринимательства никаких данных относительно производственных фондов нет. Здесь регуляризация описанной задачи достигается наложением следующего условия на искомое начальное значение  $K_0$  и вычисляемое конечное значение  $K_T$  производственных фондов.

Будем считать, что на рассматриваемом периоде известен темп изменения фондовооружённости труда и этот темп на данном этапе будем считать постоянным. Обозначим его  $c$ . Это значит, что

$$\frac{K_T}{L_T} = c^T \frac{K_0}{L_0}. \quad (3.6)$$

Величина темпа изменения фондовооружённости труда существенно проще для измерений и экспертных оценок. Таким образом, описанная выше задача содержательно и структурно усложняется наложением условия (3.6). Но это формальное усложнение легко учитывается при реализации данного варианта МНК для модели комплексной оценки эффективных фондов и производственной функции исследуемого объекта, в данном случае – консолидированного малого предпринимательства региона.

Поставленная задача минимизации функционала (3.5) при условиях (3.2), (3.4) и (3.6) с целью улучшения её вычислимости преобразуется к индексной форме относительно переменных (2.2). При этом уравнение динамики (3.2) следует разделить на начальное значение  $K_0$  и ввести переменную ( $\iota$  – йота)

$$\iota_t = \frac{I_t}{K_0}. \quad (3.7)$$

Уравнение динамики в индексной форме:

$$\kappa_t = (1 - m) \kappa_{t-1} + \iota_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.8)$$

Индексная задача комплексной оценки заключается в минимизации функционала

$$\psi(z') = \sum_{t=1}^T [v_t - F(\kappa_t, \lambda_t; \omega)], \quad (3.9)$$

по переменным минимизации  $z' = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$  при условиях (3.4), скорректированных с учётом перехода к параметрам  $\omega$ , динамическим условиям (3.8) и индексным вариантом терминального условия (3.6) – условием

$$\kappa_T = c^T \lambda_T. \quad (3.10)$$

Основные переменные индексной задачи комплексного оценивания параметров  $z'$ , т.е. переменные (2.2), принимают значения порядка единицы. Это существенно снижает эффекты овражности функционала (3.9), что облегчает вычислительный процесс поиска его минимума при данных условиях.

Задачи МНК обычно рассматриваются в рамках регрессионного анализа, относящегося к прикладной математической статистике. При этом ошибки данных считаются случайными величинами. Это предполагает знание функций распределений этих ошибок, причём независимыми и, обычно, нормально распределёнными. Такие предпосылки позволяют вводить и вычислять некоторые критерии качества регрессии, определяемой выбранными функциональными связями между переменными величинами модели. Для построения производственных функций и других проблем экономико-математического моделирования



эти предпосылки обычно не выполняются, так как экономическая динамика, представляющая производство, обычно уникальна и не допускает повторяемых экспериментов, на основе которых в других областях (техника, финансовые рынки) может быть выявлена статистическая закономерность ошибок. Однако эти недостатки компенсируются содержательностью развитых экономических моделей. В нашем случае теория производственных функций представляет обоснованный набор математических свойств этих функций и их содержательных характеристик, перечисленных выше (возрастание и квазивогнутость, эластичности). Это позволяет рассматривать задачу комплексной оценки эффективных фондов и производственной функции как задачу сглаживания производственной функции (2.1), неявно заданной таблицей данных (3.1), с заданными свойствами.

#### 4. Пример построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов

Описанная задача комплексного оценивания экономической динамики решалась для экономики МП ПФО с использованием официальных данных 2005–2014 г. из статистических сборников «Малое и среднее предпринимательство в России» (за 2006–2014 гг.), «Регионы России. Социально-экономические показатели» (2011 г., 2015 г.), «Российский статистический ежегодник» (2015 г.). Норма амортизации  $m$  для уравнения динамики фондов (3.2), как и в работе [10], определялась на уровне 0.055. Для задания темпа изменения фондовооруженности труда (3.6) дополнительно использовались данные по труду за 2004 год. Все расчеты реализованы с помощью системы компьютерной математики «Mathematica».

В таблице 1 представлены исходные (статистические) и приведенные к ценам 2014 года стоимостные данные моделирования совокупности субъектов МП – юридических лиц<sup>8</sup>. Исходными данными являются:  $Y_t^s$  – оборот МП (млрд. руб.);  $i_t^Y$  – индекс величины валового регионального продукта (ВРП) (в процентах к предыдущему году);  $I_t^s$  – инвестиции в основной капитал МП в фактически действовавших ценах (млрд. руб.);  $i_t^I$  – индекс объема инвестиций в основной капитал (в процентах к предыдущему году);  $L_t$  – средняя численность работников МП (тыс. чел.). Стоимостные данные по обороту и инвестициям приведены к ценам 2014 года по индексам ( $i_t^Y \cdot i_t^I$ ).

Таблица 1. Исходные и приведенные (стоимостные) данные

Год	$Y_t^s$	$i_t^Y$	$I_t^s$	$i_t^I$	$L_t$	$Y_t$	$I_t$	$Y_t/L_t$
2005	1 522.1	104.5	24.1	114.7	1 664.6	3 445.4	104.7	2.070
2006	1 849.4	107.9	38.4	114.7	1 843.2	3 717.6	120.1	2.017
2007	2 336.1	109.1	61.7	126.1	1 992.9	4 055.9	151.4	2.035
2008	3 067.5	105.2	124.3	107.9	2 405.0	4 266.8	163.4	1.774
2009	2 760.5	92.5	90.0	83.5	2 305.6	3 946.8	136.4	1.712
2010	3 070.8	105.5	111.7	108.1	2 340.0	4 163.8	147.5	1.779
2011	3 649.2	106.8	110.0	110.1	2 441.1	4 447.0	162.4	1.822
2012	4 228.8	104.1	134.8	109.5	2 502.6	4 629.3	177.8	1.850
2013	4 631.2	102.4	166.7	106.9	2 481.5	4 740.4	190.1	1.910
2014	4 835.2	102.0	188.0	98.9	2 489.7	4 835.2	188.0	1.942
Отношения данных 2014/2005:					1.496	1.403	1.796	0.938

<sup>8</sup> Без учета фермерских хозяйств и индивидуальных предпринимателей.

Затраты труда в 2004 году (в формуле (3.6) это величина  $L_0$ ) составили 1 635.9 тысяч человек.

Задача комплексной оценки параметров  $z = (w_1, \dots, w_p, K_0)$ , представленная в предыдущем разделе, решалась в индексной форме (3.7)-(3.10) относительно переменных (2.2). Это существенно облегчило вычислительные проблемы решения существенно нелинейной проблемы, но не решило их полностью. При переходе от функции КД (2.9) к ПЭЗ (2.10) неустойчивость относительно искомым параметров повышается в связи с увеличением степени свободы. Вместо трёх параметров функции (2.9)  $\omega = (a, \alpha, \beta)$  имеем 4 параметра  $\omega = (a, \nu', \rho, \mu)$ . При этом вычислительные эксперименты выявили особую сложность стабилизации параметра  $\rho$ , определяющего эластичность замещения  $\sigma = 1/(1 + \rho)$ . На данном этапе пока не найден способ гибкой стабилизации проблемного параметра  $\rho$ , поэтому была решена серия задач минимизации функционала  $\psi(z')$  при фиксированных значениях  $\rho$ .

В таблице 2 представлены значения оценок параметров функций КД и ПЭЗ при значении  $\rho = -0.3$ , определяющем эластичность замещения труда капиталом  $\sigma = 1.43$ .

**Таблица 2.** Результаты комплексной оценки параметров  $z' = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$

$c$	КД		ПЭЗ ( $\rho = -0.3$ )	
1	$K_0$	1301.4	$K_0$	1301.4
	$a$	1.0093	$a$	1.0093
	$\alpha$	0.565	$\nu'$	0.721
	$\beta$	0.223	$\mu$	0.788
	$\psi(z')$	0.01180	$\psi(z')$	0.01179
1.05	$K_0$	649.6	$K_0$	649.6
	$a$	0.9862	$a$	0.9868
	$\alpha$	0.320	$\nu'$	0.670
	$\beta$	0.136	$\mu$	0.459
	$\psi(z')$	0.01290	$\psi(z')$	0.01281

Динамика восстановленных эффективных производственных фондов МП ПФО для значений темпа изменения фондовооружённости труда  $c = 1$  и 1.05 показана в таблице 3. Ввиду совпадения значения оценок начальных фондов  $K_0$  для обеих функций (и несущественного улучшения функционала) значения эффективных фондов совпали для обеих функций.

**Таблица 3.** Реконструкция эффективных фондов

Год	$c = 1$		$c = 1.05$	
	$K_t$	$Y_t/K_t$	$K_t$	$Y_t/K_t$
2005	1 334.52	2.582	718.59	4.795
2006	1 381.22	2.692	799.17	4.652
2007	1 456.66	2.784	906.61	4.474
2008	1 539.94	2.771	1 020.15	4.182
2009	1 591.64	2.480	1 100.44	3.587
2010	1 651.60	2.521	1 187.42	3.507
2011	1 723.16	2.581	1 284.51	3.462
2012	1 806.19	2.563	1 391.66	3.326
2013	1 896.95	2.499	1 505.22	3.149
2014	1 980.62	2.441	1 610.43	3.002
2014/2005	1.484	0.946	2.241	0.626

Однако несущественное относительно эффективных фондов улучшение функционала МНК  $\psi(z')$  при переходе к функции ПЭЗ позволило получить более содержательные, нестационарные оценки факторных эластичностей  $\varepsilon_K$ ,  $\varepsilon_L$  и, соответственно, их суммы – эластичности производства  $\mu$ . Для функции КД эти эластичности постоянные и равны соответствующим степеням функции (2.9). Эти результаты представлены в таблице 4.

**Таблица 2.** Факторные эластичности и эластичность производства

с	Эластичности	КД	ПЭЗ	
			2005	2014
1	$\varepsilon_K$	0.565	0.583	0.568
	$\varepsilon_L$	0.223	0.224	0.218
	$\mu$	0.788	0.807	0.786
1.05	$\varepsilon_K$	0.320	0.317	0.321
	$\varepsilon_L$	0.136	0.151	0.135
	$\mu$	0.456	0.468	0.456

Приведенные результаты демонстрируют, по нашему мнению, актуальность и перспективность развития математического моделирования экономических процессов и систем. При этом актуально развитие и специальных методов регуляризации задач идентификации таких моделей, а также методов оптимизации соответствующих классов задач нелинейной условной минимизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Б. Воскобойников, “О корректировке динамики основных фондов в российской экономике”, *Экономический журнал ВШЭ*, 2004, № 1, 3–20.
2. В.А. Бессонов, И.Б. Воскобойников, “О динамике основных фондов и инвестиций в российской переходной экономике”, *Экономический журнал ВШЭ*, 2006, № 2, 193–228.
3. *Малое и среднее предпринимательство в России*, 2015: Стат. сб., ред. А.Л. Кевеш, Росстат, М., 2015, 96 с.
4. C.W. Cobb, P.H. Douglas, “A theory of production”, *The American Economic Review*, **18:1** (1928), 139–165.
5. Г.Б. Клейнер, *Производственные функции: теория, методы, применение*, Финансы и статистика, М., 1986, 239 с.
6. В.К. Горбунов, А.Г. Львов, “Построение трёхфакторной производственной функции с переменной эластичностью замещения”, *Труды Средневолжского математического общества*, **11:1** (2009), 91–100.
7. В.К. Горбунов, “О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как псевдо-чёрный ящик”, *Журнал экономической теории*, 2014, № 1, 199–2012.
8. В.К. Горбунов, А.Г. Львов, “Построение производственных функций по данным об инвестициях”, *Экономика и матем. методы*, 2012, № 2, 95–107.

9. А. Г. Львов, *Развитие методов построения производственных функций*, автореферат дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.13, УГТАУ, Уфа, 2012.
10. В. К. Горбунов, В. П. Крылов, "Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций", *Экономика региона*, 2015, № 3, 334–347.
11. В. А. Бессонов, "Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике", *Анализ динамики российской переходной экономики*, ред. В. А. Бессонов, С. В. Цухло, ИЭПП, М., 2002, 5–89.
12. Ян. Сюань, *Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса (на примере России и Китая)*, автореферат дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.05, ЦЭМИ РАН, М., 2007.
13. В. К. Горбунов, В. Г. Деревенский, "Производственные функции малого предпринимательства регионов России: о методе пространственной регрессии", *Вестник Московского университета. Сер. 21. Управление (государство и общество)*, 2015, № 1, 94–109.
14. Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975, 558 с.
15. J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)*, Springer, Berlin, 2006, 664 pp.
16. M. Doms, "Estimating capital efficiency schedules within production functions", *Economic Inquiry*, **34**:1 (1996), 78–92.
17. S. T. Hackman, *Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives*, Springer, Berlin, 2008, 520 pp.

*Дата поступления 30.11.2016*

## Mathematical model of estimation of production funds of small business

© V. K. Gorgunov<sup>9</sup>, A. G. Lvov<sup>10</sup>

**Abstract.** Production funds of small business (SB) have no formal definition and are not a reporting indicator. We offer the determination of cost of such funds within the method of creation of «capital» production functions (PF) via data about production investments (an indicator of the reporting of SB), expenses of other factors and levels of production which we offered earlier (V. K. Gorbunov and A.G. Lvov, 2012). In this method the equation of «effective funds» dynamics on the interval of object observation is included into econometric system of PF parameters' estimation. An initial value of effective funds is the estimated parameter as well as parameters of used PF. The problem of simultaneous estimation of these parameters is ill-conditioned one. Its regularization is provided by introduction of additional relation between initial and final values of effective funds. The example of an estimation of SB production funds in Volga Federal District is presented.

**Key Words:** production functions, dynamics of production funds, effective funds, small business, parameter estimation, ill-conditionality, regularization

<sup>9</sup> Professor of Department of Economic-mathematical Methods and Information Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vkgorbunov@mail.ru

<sup>10</sup> Associate professor of Department of Economic-mathematical Methods and Information Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; aglvov@mail.ru