УДК 519.223.3

Критерий согласия с модифицированной статистикой хи-квадрат

© М. В. Радионова [1], В. В. Чичагов [2]

Аннотация. В данной статье продолжено исследование возможностей применения параметрических функций, допускающих несмещенную оценку, к проверке гипотезы о виде распределения с помощью критерия хи-квадрат. Предложен новый класс асимптотических критериев вальдовского типа для проверки гипотезы о виде распределения, принадлежащего однопараметрическому экспоненциальному семейству. По уровню сложности предложенные критерии занимают промежуточное место между тестом Никулина-Рао-Робсона и тестом моментных условий. В качестве следствий к основному утверждению приведено два примера построения модифицированной тестовой статистики хи-квадрат. Следствие 2.1 содержит результат, устанавливающий связь предложенной в работе тестовой статистики с одномерной версией статистики Никулина-Рао-Робсона. В следствии 2.2 представлена тестовая статистика, предназначенная для проверки гипотезы о виде распределения с дополнительным ограничением специального вида на гипотетическое распределение.

Ключевые слова: экспоненциальное семейство, несмещенная оценка, критерий согласия, мощность

1. Введение

Одной из фундаментальных проблем математической и прикладной статистики является задача проверки гипотезы о виде распределения случайной величины ξ_0 по выборке $X_1, \ldots, X_n$, элементами которой являются независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и ξ_0. Наиболее часто для решения такой задачи применяется критерий согласия хи-квадрат. Этот критерий был предложен К. Пирсоном [1] в 1900 г. для проверки гипотезы о значении параметра полиномиального распределения, но может быть применен и к проверке простой гипотезы о виде распределения $H_0\colon\ F_{\xi_0}(x) = F_{\xi}(x),\ x \in \mathbf{R}$, где $F_{\xi_0}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_0, а $F_{\xi}(x)$ — полностью определенная функция распределения гипотетической случайной величины ξ. Для этого числовую прямую $\mathbf{R}$ разбивают на атомы $\left\{\Delta_j,\ j=\overline{1,J}\right\}$, и вычисляют статистику

$$\chi_n^2 = \sum_{j=1}^{J} \frac{(\nu_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}, \tag{1.1}$$

где ν_j — число элементов выборки, принадлежащих атому Δ_j, а π_j — вероятность попадания на атом Δ_j гипотетической случайной величины ξ. В работе [1] показано, что статистика (1.1) при $n \to \infty$ имеет асимптотическое распределение χ^2 с $J-1$ степенями свободы. В соответствии с критерием хи-квадрат Пирсона асимптотического уровня значимости α гипотеза H_0 принимается, если $\chi_n^2 < x_{1-\alpha}\left[\chi^2_{J-1}\right]$, где $x_p\left[\chi^2_\nu\right]$ — квантиль уровня p распределения χ^2 с ν степенями свободы.

В 1924 г. Р. Фишер [2] распространил применение критерия хи-квадрат на случай сложной гипотезы о виде распределения. Он предложил использовать статистику хи-квадрат

[1] Доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Пермь; m.radionova@rambler.ru

[2] Доцент кафедры высшей математики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; chichagov@psu.ru

для проверки гипотезы о принадлежности функции распределения $F_{\xi_0}(x)$ параметрическому семейству
$$\left\{F_\xi(x;\theta),\, \theta = (\theta_1, ..., \theta_s)^\top \in \Theta \subset \mathbf{R}^s\right\}.$$
Отметим, что в этом случае в действительности проверяется гипотеза $H_0' : p_j = \pi_j(\theta),\ j = \overline{1, J}$, где $p_j = \mathbf{P}(\xi_0 \in \Delta_j)$, $\pi_j(\theta) = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_j)$, а θ — неизвестный параметр распределения ξ.

Статистика критерия хи-квадрат, предложенная Фишером, имеет вид

$$\chi_n^2(\theta^*) = \sum_{j=1}^{J} \frac{(\nu_j - n\pi_j(\theta^*))^2}{n\pi_j(\theta^*)}, \tag{1.2}$$

где θ^* — оценка неизвестного параметра θ, вычисленная по методу минимума хи-квадрат $\theta^* = \arg\min\limits_{\theta\in\Theta} \chi_n^2(\theta)$ или асимптотически эквивалентная ей оценка, являющаяся корнем уравнения

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{\nu_j}{\pi_j(\theta)} \frac{\partial \pi_j(\theta)}{\partial \theta_\ell} = 0, \quad \ell = \overline{1, s}.$$

Фишер показал, что предельным распределением статистики (1.2) при $n \to \infty$ является распределение хи-квадрат с $(J - s - 1)$ степенями свободы. До 1954 года считалось, что предельное распределение статистики (1.2) не изменится, если оценку минимума хи-квадрат неизвестного параметра θ заменить оценкой максимального правдоподобия θ_{ML}, вычисленной по негруппированным данным $X_1, \ldots, X_n$. Однако, как показали Леман и Чернов [3], статистика $\chi_n^2(\theta_{ML})$ распределена в пределе при $n \to \infty$ как $\sum\limits_{j=1}^{J-s-1} Z_j^2 + \sum\limits_{j=1}^{s} \mu_j Z_{j+J-s-1}^2$, где $\{Z_j\}$ – независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, а числа $\{\mu_j,\ j = 1, ..., s\}$ лежат между 0 и 1, и, вообще говоря, зависят от неизвестного значения параметра θ.

В 1973 г. М.С. Никулиным [4] для семейства распределений сдвига и масштаба предложена модификация статистики $\chi_n^2(\theta_{ML})$, предельное распределение которой есть хи-квадрат с $(J-1)$ степенями свободы и не зависит от размерности оцениваемого параметра и способа разбиения на атомы. Позднее, в [5]–[7] были рассмотрены другие модификации статистики $\chi_n^2(\theta_{ML})$, среди которых следует выделить статистику

$$Y_n^2(\theta_{ML}) = \chi_n^2(\theta_{ML}) + \frac{1}{n}\mathbf{u}^\top \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_s)^\top$, $u_j = \sum\limits_{i=1}^{J} \frac{\nu_i}{\pi_i(\theta_{ML})} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_j}$, $\mathbf{C} = [c_{lk}(\theta_{ML})]_{s\times s}$ – матрица с элементами $c_{lk}(\theta_{ML}) = i_{lk} - \sum\limits_{i=1}^{J} \frac{1}{\pi_i(\theta_{ML})} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_l} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_k}$, а i_{lk} — (l, k)-й элемент информационной матрицы Фишера $\mathbf{i}(\theta) = \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial \ln f(\xi,\theta)}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \ln f(\xi,\theta)}{\partial \theta}\right)^\top\right]$, $f(x, \theta)$ – плотность распределения гипотетической случайной величины. Статистика (1.3) получила название статистики Никулина–Рао–Робсона. В соответствии с критерием Никулина–Рао–Робсона асимптотического уровня значимости α гипотеза H_0' принимается, если $Y_n^2(\theta_{ML}) < x_{1-\alpha}\left[\chi_{J-1}^2\right]$. Критерий Никулина–Рао–Робсона, как отмечается в [6], можно использовать для атомов как с фиксированными, так и со случайными границами.

Более общий подход к проверке гипотезы о виде распределения случайной величины ξ_0, чем проверка гипотезы H_0 или H_0', предложен в [8] и заключается он в проверке гипотезы

$$H_0'' : \ \mathbf{M}h_j(\xi_0) = g_j(\theta), \ j = \overline{1, L}. \tag{1.4}$$

Здесь $\{h_1(x), h_2(x), \ldots, h_L(x)\}$ — заданный набор функций, которые в дальнейшем будем называть «пробными»; $\left\{g_j(\theta) = \mathbf{M}h_j(\xi), j = \overline{1, L}\right\}$ — соответствующий им набор функций, отражающий определенные свойства гипотетического распределения ξ; θ — неизвестный параметр гипотетического распределения. В эконометрических приложениях, связанных с идентификацией распределения ξ_0, соотношения вида (1.4) получили название моментных условий (см., например, [9]).

Заметим, что гипотеза вида H_0' является частным случаем гипотезы (1.4) при $L = J$ и $h_j(x) = I(x \in \Delta_j)$, где $I(A)$ — индикатор события A. Использование в (1.4) в качестве «пробных» функций помимо индикаторных функций $I(x \in \Delta_j)$, $j = 1, \ldots, J-1$, еще одной не индикаторной функции позволило получить в [10] с помощью оценок максимального правдоподобия при $s = 1$ столь же простое представление тестовой статистики, как и (1.3). В [8] построение тестовой статистики осуществлено на основе несмещенных оценок с равномерно минимальной дисперсией (НОРМД) моментов некоторых функций от гипотетической случайной величины, распределение которой принадлежит однопараметрическому экспоненциальному семейству. В данной работе результаты, полученные в [8], распространяются на более широкий класс «пробных» функций.

2. Основные результаты

Будем предполагать, что гипотетическое распределение случайной величины ξ удовлетворяет следующим предположениям.

A1. Распределение вероятностей случайной величины ξ принадлежит естественному однопараметрическому экспоненциальному семейству [11], определяемому выражением

$$f(x;\theta) = \exp\{\theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x)\}, \ x \in \mathfrak{X} \subset \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Здесь $f(x;\theta)$ — плотность распределения случайной величины ξ относительно меры $\mu(x)$, являющейся либо мерой Лебега, если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, либо считающей мерой, когда ξ имеет решетчатое распределение; $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$ – неизвестный параметр распределения; $d(x)$, $T(x)$ — известные борелевские функции, $\kappa(\theta)$ — кумулянтное преобразование распределения $T(\xi)$; $\mathfrak{X}$ — носитель распределения ξ. При этом $a = \mathbf{M}T(\xi) = \kappa'(\theta)$, $b^2 = \mathbf{D}T(\xi) = k''(\theta) > 0$.

A2. Если $\mu(x)$ — мера Лебега, то существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что нормированная сумма $Z_n = \frac{S_n - na}{b\sqrt{n}}$, где $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} T(X_i)$, имеет непрерывную ограниченную плотность. Если $\mu(x)$ — считающая мера, то носитель $\mathfrak{X}$ не содержится ни в какой подрешетке целочисленной решетки $\mathbf{Z}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **A1**-**A2**; $\left\{h_j(x), j = \overline{1, L}\right\}$ *– заданный набор «пробных» функций таких, что* $g_j(\theta) = \mathbf{M}h_j(\xi), j = \overline{1, L}$, *и* $\mathbf{M}h_j^2(\xi) < \infty$; $\hat{g}_j$ *— НОРМД функции* $g_j(\theta)$ *по выборке по выборке* $X_1, \ldots, X_n$ *из генеральной совокупности* ξ, *а* $\bar{g}_j = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} h_j(X_i), \ j = \overline{1, L}$. *Тогда при* $n \to \infty$

1) последовательность случайных векторов $\mathbf{Y}_n = \sqrt{n}\,(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})$, *в которых* $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_L)^\top$, *а* $\hat{\mathbf{g}} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \ldots, \hat{g}_L)^\top$, *асимптотически нормальна с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей*

$$\mathbf{\Sigma}(\theta) = \mathbf{\Sigma}_h(\theta) - b^{-2}\mathbf{g}'(\theta)\left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{\Sigma}_h(\theta)$ *– ковариационная матрица вектора* $\mathbf{h}(\xi) = (h_1(\xi), \ldots, h_L(\xi))^\top$, $\mathbf{g}'(\theta) = (g_1'(\theta), \ldots, g_L'(\theta))^\top$ *;*
2) если ковариационная матрица $\mathbf{\Sigma}(\theta)$ *не вырождена, то асимптотическим распределением квадратичной формы*

$$\chi_n(\theta) = n\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right)^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}(\theta)\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right) \tag{2.3}$$

является распределение χ^2 *с* L *степенями свободы.*

Доказательство. В силу неравенства Коши-Буняковского и существования второго момента $\mathbf{M}h_j^2(\xi)$ верно неравенство

$$\mathbf{M}\left|(T(\xi) - a) \cdot h_j(\xi)\right| \le \sqrt{\mathbf{D}T(\xi) \cdot \mathbf{M}h_j^2(\xi)} < \infty, \quad j = \overline{1, L}.$$

Отсюда следует существование производной $g_j'(\theta)$, определяемой выражением

$$\begin{aligned} g_j'(\theta) &= \int\limits_{\mathfrak{X}} h_j(x)\ [T(x) - \kappa'(\theta)] \exp\{\theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x)\}\, d\mu(x) = \\ &= \mathbf{M}\left[T(\xi) \cdot h_j(\xi)\right] - \mathbf{M}T(\xi) \cdot \mathbf{M}h_j(\xi) = \mathbf{cov}\left(T(\xi), h_j(\xi)\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{cov}(\eta, \zeta)$ – ковариация между случайными величинами η и ζ, так как

$$\begin{aligned} &a = \mathbf{M}T(\xi) = \kappa'(\theta), \\ &g_j(\theta) = \mathbf{M}h_j(\xi) = \int\limits_{\mathfrak{X}} h_j(x) \exp\{\theta\, T(x) - \kappa(\theta) + d(x)\}\ d\mu(x), \\ &\mathbf{M}[T(\xi)\, h_j(\xi)] = \int\limits_{\mathfrak{X}} h_j(x) \cdot T(x) \exp\{\theta\, T(x) - \kappa(\theta) + d(x)\}\ d\mu(x). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{M}h_j^2(\xi) < \infty$, а $\hat{g}_j$ – НОРМД функции $g_j(\theta)$, то и $\mathbf{D}\hat{g}_j \le \mathbf{D}\bar{g}_j = \mathbf{D}h_j(\xi) < \infty$. Поэтому по теореме 6.2 из [12] и лемме 1 из [13] в предположениях **A1-A2** при $n \to \infty$ справедливы стохастические разложения

$$\sqrt{n}\left(\hat{g}_j - g_j(\theta)\right) = \frac{1}{b} g_j'(\theta) Z_n + \mathbf{o}_P(1),\ j = 1, \ldots, L.$$

Заметим, что теорема 6.2 из [12] позволяет найти асимптотическое разложение функции, определяющей НОРМД $\hat{g}_j$, а лемма 1 из [13] – соответствующее ему стохастическое разложение.

Поэтому для любых $i, j = 1, \ldots, L$ имеет место представление

$$n\left(\hat{g}_i - g_i(\theta)\right)\left(\hat{g}_j - g_j(\theta)\right) = \frac{1}{b^2} g_i'(\theta) g_j'(\theta) Z_n^2 + \mathbf{o}_P(1), \tag{2.5}$$

которое позволяет представить вектор $\mathbf{Y}_n$ следующим образом:

$$\mathbf{Y}_n = \sqrt{n}\left(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)\right) - \sqrt{n}\left(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)\right) = \sqrt{n}\left(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)\right) - \frac{1}{b}\mathbf{g}'(\theta) Z_n + \mathbf{o}_P(1).$$

Так как вектор

$$\mathbf{Y}_n^0 = \sqrt{n}\left(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)\right) - \frac{1}{b}\,\mathbf{g}'(\theta) Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}\left(X_i\right),$$

в котором
$$\mathbf{G}\left(X_i\right) = \mathbf{h}(X_i) - \mathbf{g}(\theta) - \frac{1}{b^2}\,\mathbf{g}'(\theta)\left(T(X_i) - a\right)$$
представлен в виде суммы независимых одинаково распределенных векторов, то по многомерной центральной предельной теореме при $n \to \infty$ последовательность случайных векторов $\{\mathbf{Y}_n\}$ сходится к случайному вектору $\mathbf{Y}$, имеющему нормальное распределение с вектором средних $\mathbf{M}\left[\mathbf{Y}\right] = \mathbf{M}\left[\mathbf{G}(\xi)\right] = \mathbf{0}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{\Sigma}(\theta) = \mathbf{M}\left[\mathbf{G}\left(\xi\right)\mathbf{G}^\top\left(\xi\right)\right]$.

С учетом (2.4) для $i,j = 1,\ldots,L$ имеем
$$\mathbf{M}\left[\left(h_i(\xi) - g_i(\theta)\right) g_j'(\theta)\frac{\left(T(\xi) - a\right)}{b^2}\right] = \frac{1}{b^2}g_j'(\theta)\mathbf{cov}\left(h_i(\xi), T(\xi)\right) = \frac{1}{b^2}g_j'(\theta)g_i'(\theta).$$
Отсюда получим
$$\mathbf{\Sigma}(\theta) = \mathbf{\Sigma}_h(\theta) - 2\mathbf{M}\left[\left(\mathbf{h}(\xi) - \mathbf{g}(\theta)\right)\frac{\left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top\left(T(\xi) - a\right)}{b^2}\right] + \frac{\mathbf{g}'(\theta)\left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top}{b^2} =$$
$$= \mathbf{\Sigma}_h(\theta) - \frac{\mathbf{g}'(\theta)\left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top}{b^2},$$
что завершает доказательство 1-го из утверждений теоремы.

Справедливость второго утверждения теоремы в условиях невырожденности матрицы $\mathbf{\Sigma}(\theta)$ очевидна.

Доказательство закончено.

Отметим, что ранее в [8] было доказано утверждение аналогичное утверждению теоремы, но лишь для частного случая, когда $h_j(x) = T^j(x), j = \overline{1,L}$.

Замечание 2.1. *В условиях теоремы 1 асимптотическим распределением статистики*
$$\chi_h = n\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right)^\top \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right), \tag{2.6}$$
где $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ *– некоторая состоятельная оценка матрицы* $\mathbf{\Sigma}(\theta)$, *является распределение* χ^2 *с* L *степенями свободы.*

Это утверждение позволяет предложить следующий вариант критерия хи-квадрат для проверки сложной гипотезы о виде распределения.

Критерий согласия χ_h асимптотического уровня значимости α. Нулевую гипотезу (1.4) следует принять, если выполнено неравенство
$$\chi_h = n\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right)^\top \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right) < x_{1-\alpha}\left[\chi_L^2\right], \tag{2.7}$$
и отвергнуть ее в противном случае.

Замечание 2.2. *Так как оценки максимального правдоподобия и НОРМД в условиях* **A1**-**A2** *асимптотически эквивалентны* [14] *с точностью до слагаемых порядка* $\mathbf{O}_P\left(n^{-1}\right)$, *то утверждение теоремы 1 сохранит силу, если НОРМД* $\hat{g}_j$ *функции* $g_j(\theta)$, $j = \overline{1,L}$ *заменить на оценку максимального правдоподобия.*

Замечание 2.3. *Если матрица* $\mathbf{\Sigma}_h(\theta)$ *не вырождена и* $b^2 \neq \left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta)$, *то матрица* $\mathbf{\Sigma}(\theta)$ *не вырождена, а квадратичная форма* $\chi_n(\theta)$ *допускает следующее представление*
$$\chi_n(\theta) = n\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right)^\top \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right) + \frac{n\left[\left(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\right)^\top \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta)\right]^2}{b^2 - \mathbf{g}'(\theta)^\top\mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta)}. \tag{2.8}$$

Справедливость (2.8) следует из соотношения

$$\mathbf{\Sigma}^{-1}(\theta) = \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta) + \frac{\mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta)\left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)}{b^2 - \left[\mathbf{g}'(\theta)\right]^\top \mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta)}, \tag{2.9}$$

которое получено с помощью формулы обращения матрицы при малоранговой модификации [15], примененной к (2.2).

Замечание 2.4. $\hat{a}, \hat{\pi}_j, \hat{a}_j, \hat{A}_j, \hat{\beta}_J, \hat{\zeta}_J, \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi)$ *– НОРМД функций*

$$a,\ \pi_j(\theta),\ a_j(\theta) = \mathbf{M}\left[T(\xi)I\left(\xi \in \Delta_j\right)\right],\ A_j(\theta) = \mathbf{M}\left[h(\xi)I\left(\xi \in \Delta_j\right)\right],\ j = 1, \ldots, J,$$
$$\beta_J(\theta) = \mathbf{M}\left[h^2(\xi)I\left(\xi \in \Delta_J\right)\right],\ \zeta_J(\theta) = \mathbf{M}\left[h(\xi)T(\xi)I\left(\xi \in \Delta_J\right)\right],\ \mathbf{M}T^2(\xi),$$

определяются выражениями

$$\hat{a} = \int\limits_{\mathfrak{X}} T(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),\ \hat{\pi}_j = \int\limits_{\Delta_j} \widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),\ \hat{a}_j = \int\limits_{\Delta_j} T(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),$$
$$\hat{A}_j = \int\limits_{\Delta_j} h(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),\ \hat{\beta}_J = \int\limits_{\Delta_J} h^2(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),$$
$$\hat{\zeta}_J = \int\limits_{\Delta_J} h(x)T(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),\ \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) = \int\limits_{\mathfrak{X}} T^2(x)\widehat{f}(x|S_n)d\mu(x),$$

где $\widehat{f}(x|S_n)$ *– НОРМД плотности распределения* (2.1). *В соответствии с теоремой 6.2* [12] *и леммой 1* [13] *эти несмещенные оценки являются состоятельными при* $n \to \infty$, *если* $\mathbf{D}h(\xi) < \infty$ *и* $\mathbf{D}\left[h^2(\xi)I\left(\xi \in \Delta_J\right)\right] < \infty$.

Конструируя «пробные» функции с учетом разбиения $\{\Delta_j,\ j = 1, \ldots, J\}$, можно получать достаточно компактные явные выражения тестовой статистики (2.6). Ниже в виде следствий приводится 2 примера таких статистик. Отметим, что результат первого из следствий был получен ранее с помощью прямых вычислений в [16]. Его версия для однопараметрического гамма распределения с неизвестным параметром масштаба представлена в [17] и в теореме 5.3 [7].

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия* **A1**-**A2**; $L = J-1$, $\pi_j(\theta) > 0$, $j = \overline{1, J}$, *а «пробные» функции равны* $h_j(x) = I\left(x \in \Delta_j\right)$, $j = \overline{1, J-1}$. *Тогда квадратичная форма* (2.3) *примет вид*

$$\chi_n(\theta) = \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)^2}{n\pi_j(\theta)} + \frac{1}{n}\left\{b^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{\left[\pi_j'(\theta)\right]^2}{\pi_j(\theta)}\right\}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)\pi_j'(\theta)}{\pi_j(\theta)}\right]^2, \tag{2.10}$$

а статистика

$$\chi_h = \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)^2}{n\hat{\pi}_j} + \frac{1}{n}\left\{\hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^{J} \frac{\hat{a}_j^2}{\hat{\pi}_j}\right\}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{J} \frac{\nu_j\hat{a}_j}{\hat{\pi}_j} - n\hat{a}\right]^2 \tag{2.11}$$

имеет при $n \to \infty$ *асимптотическое распределение* χ^2 *с* $J-1$ *степенями свободы.*

Доказательство. Заметим, что при сделанных предположениях

$$g_j(\theta) = \mathbf{M}I\left(\xi \in \Delta_j\right) = \pi_j(\theta), \quad \bar{g}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(X_i \in \Delta_j\right) = \frac{\nu_j}{n},$$

причем $g_j'(\theta) = \pi_j'(\theta)$. При этом элементы матрицы

$$\mathbf{\Sigma}_h(\theta) \equiv \mathbf{\Sigma}_\pi(\theta) = \left[\sigma_{ij}(\theta)\right]_{(J-1)\times(J-1)}$$

определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\theta) &= \mathbf{M}\left[I\left(\xi \in \Delta_i\right) \cdot I\left(\xi \in \Delta_j\right)\right] - \mathbf{M}I\left(\xi \in \Delta_i\right) \cdot \mathbf{M}I\left(\xi \in \Delta_j\right) = \\ &= \delta_{ij}\pi_i(\theta) - \pi_i(\theta)\pi_j(\theta), \quad i, j = \overline{1, J-1},\end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Хорошо известно [18], что матрица $\mathbf{\Sigma}_\pi(\theta)$ является невырожденной, а элементы обратной к ней матрицы $\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}(\theta) = \left[\sigma_{ij}^{-1}(\theta)\right]$ равны $\sigma_{ij}^{-1}(\theta) = \frac{1}{\pi_J(\theta)} + \frac{\delta_{ij}}{\pi_i(\theta)}$. Поэтому для векторов $\mathbf{x}^\top = (x_1, \ldots, x_{J-1})$, $\mathbf{y}^\top = (y_1, \ldots, y_{J-1})$, элементы которых удовлетворяют соотношениям $\sum\limits_{j=1}^{J-1} x_j = -x_J$ и $\sum\limits_{j=1}^{J-1} y_j = -y_J$, верно равенство

$$\mathbf{x}^\top \Sigma_\pi^{-1}(\theta)\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{J} \frac{x_j y_j}{\pi_j(\theta)}. \tag{2.12}$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости (2.10), вычислив (2.8) с применением (2.12), имея в виду, что $\sum\limits_{j=1}^{J} (\nu_j - n\hat{\pi}_j) = \sum\limits_{j=1}^{J} \pi_j'(\theta) = 0.$

Воспользовавшись (2.4), найдем выражение для производной

$$\pi_j'(\theta) = \mathbf{cov}\left(T(\xi), I(\xi \in \Delta_j)\right) = a_j(\theta) - a\pi_j(\theta), \ j = 1, \ldots, J, \tag{2.13}$$

применяя которое, получим

$$\begin{gathered} b^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{\left[\pi_j'(\theta)\right]^2}{\pi_j(\theta)} = b^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{\left[a_j(\theta) - a\pi_j(\theta)\right]^2}{\pi_j(\theta)} = \mathbf{M}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^{J} \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}, \\ \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)\pi_j'(\theta)}{\pi_j(\theta)} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)\left(a_j(\theta) - a\pi_j(\theta)\right)}{\pi_j(\theta)} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\nu_j - n\hat{\pi}_j\right)a_j(\theta)}{\pi_j(\theta)}. \end{gathered}$$

Заменяя в последних соотношениях неизвестные функции на их НОРМД, придем к (2.11). Сходимость статистики (2.11) к распределению хи-квадрат в силу замечаний 1 и 4 очевидна.

Доказательство закончено.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия* **A1**-**A2**; $L = J$; $\pi_j(\theta) > 0$, $j = \overline{1, J}$; $\beta_J(\theta) = \mathbf{M}\left[h^2(\xi)I\left(\xi \in \Delta_J\right)\right] < \infty$; *условная дисперсия* $\mathbf{D}\left[T(\xi)|\xi \in \Delta_j\right] > 0$ *хотя бы при одном* $j \in \{1, 2, \ldots, J-1\}$ *и* $\mathbf{D}\left[h(\xi)|\xi \in \Delta_J\right] > 0$; *«пробные» функции определяются выражением*

$$h_j(\xi) = \begin{cases} I\left(\xi \in \Delta_j\right), & j = \overline{1, J-1}, \\ h(\xi)I\left(\xi \in \Delta_J\right), & j = J. \end{cases}$$

Тогда квадратичная форма (2.3) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\chi_n(\theta) = \sum_{j=1}^{J} \tfrac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\pi_j(\theta)} + \tfrac{\left[V_J(\theta) - n\bar{g}_J + n\hat{A}_J\right]^2}{n\left(\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)\right)} + \\
&+ \tfrac{1}{n}\left\{\mathbf{M}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^{J} \tfrac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} - \tfrac{[\zeta_J(\theta) - U_J(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)}\right\}^{-1} \times \\
&\times \left[\sum_{j=1}^{J} \tfrac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)a_j(\theta)}{\pi_j(\theta)} + \tfrac{\left(V_J(\theta) - n\bar{g}_J + n\hat{A}_J\right)(U_J(\theta) - \zeta_J(\theta))}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)}\right]^2,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

где $V_J(\theta) = (\nu_J - n\hat{\pi}_J)\, A_J(\theta)/\pi_J(\theta)$, $U_J(\theta) = a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta)$, *а статистика*

$$
\begin{aligned}
&\chi_h = \sum_{j=1}^{J} \tfrac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\hat{\pi}_j} + \tfrac{\left[\nu_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J - n\bar{g}_J\right]^2}{n\left(\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J\right)} + \\
&+ \tfrac{1}{n}\left\{\hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^{J} \tfrac{\hat{a}_j^2}{\hat{\pi}_j} - \tfrac{\left[\hat{\zeta}_J - \hat{a}_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J\right]^2}{\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J}\right\}^{-1} \times \\
&\times \left[\sum_{j=1}^{J} \tfrac{\nu_j\hat{a}_j}{\hat{\pi}_j} - n\hat{a} - \tfrac{\left(\nu_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J - n\bar{g}_J\right)\left(\hat{\zeta}_J - \hat{a}_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J\right)}{\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J}\right]^2,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

имеет при $n \to \infty$ *асимптотическое распределение* χ^2 *с* J *степенями свободы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в данном случае

$$
\mathbf{\Sigma}_h(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_\pi & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) \end{bmatrix}
$$

где $\mathbf{\Sigma}_\pi = [\delta_{ij}\pi_i - \pi_i\pi_j]_{(J-1)\times(J-1)}$, $\mathbf{c}^\top = -A_J(\theta)\,(\pi_1(\theta), \ldots, \pi_{J-1}(\theta))$.

Так как $\mathbf{D}\,[h(\xi)|\xi \in \Delta_J] > 0$ и $\mathbf{D}\,[T(\xi)|\xi \in \Delta_j] > 0$ хотя бы при одном $j \in \{1, 2, \ldots, J-1\}$, то верны неравенства

$$
\beta_J(\theta) - \frac{A_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)} = \pi_J(\theta)\mathbf{D}\,[h(\xi)I\,(\xi \in \Delta_J)\,|\xi \in \Delta_J] > 0, \tag{2.16}
$$

$$
\sum_{j=1}^{J-1}\left(b_j(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}\right) = \sum_{j=1}^{J-1}\pi_j(\theta)\mathbf{D}\,[T(\xi)I\,(\xi \in \Delta_j)\,|\xi \in \Delta_j] > 0, \tag{2.17}
$$

где $a_j(\theta) = \mathbf{M}\,[T(\xi)I\,(\xi \in \Delta_j)]$, $b_j(\theta) = \mathbf{M}\,[T^2(\xi)I\,(\xi \in \Delta_j)]$.

Следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{M}^2\left[\left(T(\xi)I\,(\xi \in \Delta_J) - \tfrac{a_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}\right)\left(h(\xi)I\,(\xi \in \Delta_J) - \tfrac{A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}\right)|\xi \in \Delta_J\right] = \\
&= \left[\tfrac{\zeta_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \tfrac{a_J(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J^2(\theta)}\right]^2 \le \left[\tfrac{b_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \left(\tfrac{a_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}\right)^2\right]\left[\tfrac{\beta_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \left(\tfrac{A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}\right)^2\right],
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

где $\zeta_J(\theta) = \mathbf{M}\,[h(\xi)T(\xi)I\,(\xi \in \Delta_J)]$, представляет собой частный случай неравенства Коши–Буняковского для условного математического ожидания.

Убедимся в том, что матрица $\mathbf{\Sigma}_h(\theta)$ не вырождена. Известно [9] (раздел 2.6.2), что определитель $|\mathbf{\Sigma}_h(\theta)|$ блочной матрицы $\mathbf{\Sigma}_h(\theta)$ можно представить следующим образом:

$$
|\mathbf{\Sigma}_h(\theta)| = |\mathbf{\Sigma}_\pi| \cdot |\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) - \mathbf{c}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c}|.
$$

Отсюда на основании (2.12) и (2.16) следует невырожденность матрицы $\mathbf{\Sigma}_h(\theta)$, поскольку

$$|\mathbf{\Sigma}_\pi| = \prod_{j=1}^{J} \pi_j(\theta) > 0, \quad \sum_{j=1}^{J-1} c_j = -A_J(\theta)\,(1-\pi_J(\theta))$$

и

$$\begin{aligned}&\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) - \mathbf{c}^\top \mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c} = \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)\left[1 + \sum_{j=1}^{J-1}\pi_j(\theta) + \tfrac{(1-\pi_J(\theta))^2}{\pi_J(\theta)}\right] = \\ &= \beta_J(\theta) - \tfrac{A_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)} > 0.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Воспользовавшись формулой обращения блочной матрицы [9] (раздел 2.6.3)

$$\mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}A_{12}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

при $A_{11} = \mathbf{\Sigma}_\pi,\ A_{22} = \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)$ и (2.12), получим соотношение

$$\begin{aligned}&(x_1,\ldots,x_{J-1},u)^\top\,\mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\,(y_1,\ldots,y_{J-1},z) = \mathbf{x}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{y} + \\ &+\tfrac{\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c}-u\right)\left(\mathbf{y}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c}-z\right)}{\beta_J(\theta)-A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} = \sum_{j=1}^{J}\tfrac{x_j y_j}{\pi_j(\theta)} + \tfrac{(x_J A_J(\theta)/\pi_J(\theta)-u)(y_J A_J(\theta)/\pi_J(\theta)-z)}{\beta_J(\theta)-A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)},\end{aligned} \tag{2.20}$$

справедливое для векторов $\mathbf{x}^\top = (x_1,\ldots,x_{J-1})$, $\mathbf{y}^\top = (y_1,\ldots,y_{J-1})$ таких, что $\sum\limits_{j=1}^{J-1} x_j = -x_J$ и $\sum\limits_{j=1}^{J-1} y_j = -y_J$, и любых действительных чисел $u, z,$ поскольку

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c} = -A_J(\theta)\sum_{j=1}^{J-1} x_j + \frac{x_J A_J(\theta)\,(1-\pi_J(\theta))}{\pi_J(\theta)} = \frac{x_J A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)},$$

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{\Sigma}_\pi^{-1}\mathbf{c} = \frac{y_J A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}.$$

Воспользовавшись (2.4), найдем

$$A_J'(\theta) = \mathbf{cov}\,(T(\xi), h(\xi)I(\xi\in\Delta_J)) = \zeta_J(\theta) - aA_J(\theta). \tag{2.21}$$

Используя (2.13), (2.17)–(2.21) и имея в виду, что в данном случае

$$\mathbf{g}(\theta) = (\pi_1(\theta),\ldots,\pi_{J-1}(\theta), A_J(\theta))^\top,$$

убедимся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}&n\,(\bar{\mathbf{g}}-\hat{\mathbf{g}})^\top\mathbf{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\,(\bar{\mathbf{g}}-\hat{\mathbf{g}}) = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{J}\frac{(\nu_j - n\hat\pi_j)^2}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left[(\nu_J - n\hat\pi_J)\,A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - n\bar g_J + n\hat A_J\right]^2}{n\,(\beta_J - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta))},\end{aligned}$$

$$b^2 - [\mathbf{g}'(\theta)]^\top \boldsymbol{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta) = b^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{\left[\pi'_j(\theta)\right]^2}{\pi_j(\theta)} - \frac{[\pi'_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - A'_J(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} =$$

$$= b^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{[a_j(\theta) - a\pi_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} - \frac{[a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - \zeta_J(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}\right] - \pi_J(\theta)\frac{[\zeta_J(\theta)/\pi_J(\theta) - a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J^2(\theta)]^2}{\beta_J(\theta)/\pi_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J^2(\theta)} \geq$$

$$\geq \sum_{j=1}^{J} \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}\right] - \left[b_J(\theta) - \frac{a_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)}\right] = \sum_{j=1}^{J-1} \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}\right] > 0,$$

$$(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \boldsymbol{\Sigma}_h^{-1}(\theta)\mathbf{g}'(\theta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)\,\pi'_j(\theta)}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left(\frac{(\nu_J - n\hat{\pi}_J)A_J(\theta)}{n\pi_J(\theta)} - \bar{g}_J + \hat{A}_J\right)\left(\frac{\pi'_J(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - A'_J(\theta)\right)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)\,a_j(\theta)}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left(\frac{(\nu_J - n\hat{\pi}_J)A_J(\theta)}{n\pi_J(\theta)} - \bar{g}_J + \hat{A}_J\right)\left(\frac{a_J(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \zeta_J(\theta)\right)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)}.$$

Подставляя найденные выражения в (2.8), получим (2.14). Заменяя в (2.14) неизвестные функции на их несмещенные оценки, которые являются состоятельными при сделанных предположениях, придем к (2.15). Сходимость к распределению хи-квадрат в силу замечаний 1 и 4 очевидна.

Доказательство закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект №2096.

Дата поступления 04.07.2016

Список литературы

1. Pearson K., "On the criterion that a given system of derivations from the probable in the case of correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling", *Philosophical Magazine*, 1900, № 302, 157–175.

2. Fisher R. A., "On a property connecting the measure of discrepancy with the method of maximum likelihood", *Atti de Congresso Internazionale dei Mathematici*, 1928, № 302, 94–100.

3. Chernoff G., Lehmann E.L., "The use of maximum likelihood estimates in tests for goodness of fit", *Annals of Mathematical Statistics*, 1954, № 25, 579–586.

4. Никулин М.С., "Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба", *Теория вероятностей и ее применение*, 1973, № 3, 583–592.

5. Nikulin M.S., Mirvaliev M., "Goodness-of-fit chi-squared type criterions", *Industrial Laboratory*, 1992, 280–291.

6. Bagdonavicius V., Kruopis J., Nikulin M.S., *Non-parametric Tests for Complete Data*, ISTE Ltd John Wiley and Sons, 2011, 309 pp.

7. Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N., *Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications*, Elsevier Inc, Oxford, 2013, 229 pp.

8. Радионова М.В., Чичагов В.В., “Об одном классе критериев согласия типа хи-квадрат”, *Вестник Ижевского государственного технического университета*, 2014, № 4, 151–156.

9. Greene W.H., *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 1999, 1024 pp.

10. Чичагов В.В., “Модифицированный критерий согласия хи-квадрат с одним ограничением на гипотетическое распределение”, *Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр., Перм. гос. нац. исслед. ун-т, Пермь*, 2015, № 26, 68–85.

11. Brown L.D., “Fundamentals of Statistical Exponential Families with Applications in Statistical Decision Theory”, *Lecture Notes-Monograph Series, Institute of Mathematical Statistics*, 1986.

12. Чичагов В. В., “Асимптотические разложения высокого порядка для несмещенных оценок и их дисперсий в модели однопараметрического экспоненциального семейства”, *Информатика и ее применения*, 2015, № 3, 75–87.

13. Чичагов В. В., “Стохастические разложения несмещенных оценок в случае однопараметрического экспоненциального распределения”, *Информатика и ее применения*, 2008, № 2, 62–70.

14. Portnoy S., “Asymptotic efficiency of minimum variance unbiased estimators”, *Annals of Statistics*, 1977, № 5, 522–529.

15. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ*, Мир, Москва, 1989, 656 с.

16. Суслова О. Н., Чичагов В. В., “Критерий хи-квадрат для однопараметрических распределений из экспоненциального семейства, построенный на основе несмещенных оценок”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2006, № 3, 80–85.

17. Чичагов В. В., “Поведение статистики хи-квадрат с использованием несмещенных оценок в случае однопараметрического распределение из экспоненциального семейства”, *Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр., Перм. гос. нац. исслед. ун-т, Пермь*, 2006, № 19, 78–89.

18. Боровков А. А., *Математическая статистика*, Наука, Москва, 1984, 472 с.

Goodness-of-fit test with modified statistics chi-square

© M. V. Radionova[3], V. V. Chichagov[4]

Abstract. In the paper we continue the research on possibility of using parametric functions that allow unbiased estimates to test a null hypothesis about a kind of distribution by the chi-square test. Based on Wald's method a new asymptotic test is proposed for testing hypothesis according to which the distribution of random value belongs to a one-parameter exponential family. According to a level of complexity this test occupies an intermediate position between the Nikulin-Rao-Robson's test and the test of moment conditions. Two examples are mentioned as corollaries for the main statement of the paper. Corollary 2.1 contains the result connecting the proposed test statistic with one-dimensional version of the Nikulin-Rao-Robson's statistic. Corollary 2.2 contains test statistic for testing a null hypothesis about the kind of distribution with a special additional restriction on a hypothetical distribution.

Key Words: exponential family of functions, unbiased estimate, fitting criterion, power

[3] Associate professor of Higher Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics, Perm; m.radionova@rambler.ru

[4] Associate professor of Higher Mathematics Department, Perm State National Research University, Perm; chichagov@psu.ru