УДК 517.9

Критическая плотность и интегралы лиминального уравнения дислокаций

© **С. Н. Нагорных**[1], **Е. В. Нагорных**[2]

Аннотация. Рассмотрены особые точки и интегралы уравнения в частных производных скалярной плотности дислокаций для тонкой пластины с сильным изгибом. Показана необходимость метода характеристик для получения обыкновенных дифференциальных уравнений и их особых точек. Получены два критических значения скалярной плотности дислокаций для изолированной особой точки. Эти значения скалярной плотности достаточно иметь для обращения исходного уравнения в тождество. Бифуркация уравнения Ферхюльста играет важную роль при рассмотрении разных видов особых точек как в детерминированном виде, так и при возбуждении белым шумом. Приведены следствия для стационарных особых точек, для другого обыкновенного дифференциального уравнения, для критического параметра пластины, для критического параметра уравнения Ферхюльста, возбужденного шумом, для дислокационных эффектов, для упрочнения и разрушения пластиты. Сформулирована задача Зельдовича как задача нахождения интегралов уравнения в частных производных с особыми точками и топологическим инвариантом дислокационной структуры пластины.

Ключевые слова: особые точки, дифференциальное уравнения в частных производных первого порядка, обыкновенное дифференциальное уравнение, классификация интегралов, точка бифуркации уравнения Ферхюльста, белый шум

Сильный изгиб тонких пластин [1] имеет вид уравнения в частных производных (УЧП) для скалярной плотности дислокаций $\nu(x,t)$, которое в [2] названо лиминальным.

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \xi(\nu)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 = h(\nu), \nu \in [0,\infty), \tag{1.1}$$

где $\xi(\nu) = \left(\lambda - \frac{\gamma}{\nu}\right)/\nu^3$, $h(\nu) = A\nu - B\nu^2$, $\nu = \frac{1}{2d\zeta}$, $d = b\frac{\cos\chi}{1-\cos\alpha/2}$, $\beta\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial y}$, ζ – прогиб пластины, d – расстояние в дислокационной структуре, b – модуль вектора Бюргерса, χ, α – углы прогиба полос скольжения и пластины, в которой присутствует ползучесть и переползание дислокаций, λ, γ, A, B – постоянные. УЧП вида

$$f(x,t)\frac{\partial \nu}{\partial t} + \bar{\xi}(x,t)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.2}$$

методом характеристик приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$\frac{dt}{f(x,t)} = \frac{dx}{\bar{\xi}(x,t)}, \tag{1.3}$$

к главному интегралу $\bar{F}(x,t) = c$ и решению $\nu(x,t) = \bar{\Phi}\left(\bar{F}(x,t)\right)$ с произвольной функцией $\bar{\Phi}$. Выражение

$$f(x_0,t_0) = \bar{\xi}(x_0,t_0) = 0 \tag{1.4}$$

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[2] Доцент кафедры численного моделирования физико-механических процессов, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

определяет изолированные особые точки (ОТ) x_0, t_0. Пересечение характеристик на плоскости ν, x называется ОТ пересечения (критическая плотность $\nu_{\text{кр}}$ уравнения (1.1). Кроме того, имеется ОТ неединственности, граничные ОТ и их комбинации [3]. Запишем в неявном виде уравнение (1.1):

$$F\left(p, q, \nu, x, t\right) = 0, \tag{1.5}$$

где $p = \frac{\partial \nu}{\partial t}$, $q = \frac{\partial \nu}{\partial x}$, $\nu\left(x, t\right) > 0$ – гладкое решение с непрерывными производными по x, t. Для нахождения $\nu_{\text{кр}}$ необходимо записать характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1.5)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2\xi q} = \frac{d\nu}{p + 2\xi q^2} = -\frac{dp}{p\left(q^2 \xi'_\nu - h'_\nu\right)} = -\frac{dq}{q\left(q^2 \xi'_\nu - h'_\nu\right)}. \tag{1.6}$$

Из первого и третьего членов (1.6) получаем ОДУ

$$\frac{d\nu}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\left(B\nu - A\right)\nu^5}{\lambda\nu - \gamma}}. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) эквивалентно системе ОДУ с изолированной ОТ

$$\dot{\nu} = \pm\sqrt{\left(B\nu - A\right)\nu^5}, \dot{x} = \pm\sqrt{\lambda\nu - \gamma} \tag{1.8}$$

с критической плотностью

$$\nu_{1\text{кр}} = \frac{\gamma}{\lambda}, \tag{1.9}$$

что соответствует числителю $\xi\left(\nu\right) = 0$ и является ОТ пересечения $x = c_1$, $\nu = \nu_{\text{кр}}$ на плоскости $\left(\nu, x\right)$

$$\nu_{2\text{кр}} = \frac{A}{B}, \tag{1.10}$$

что соответствует $h\left(\nu\right) = 0$, либо

$$\nu_{1\text{кр}} = \frac{\gamma}{\lambda}, \nu_{2\text{кр}} = 0, \tag{1.11}$$

Теорема Хорстхемке-Саичева по Стратоновичу [5] дает асимптотическую сходимость $\xi(\nu) \to -\delta(\nu)$, когда интенсивность белого шума, равная $2\nu_{1\text{кр}}$, стремится к ∞. Тогда $\nu \in [0, \infty)$. Достаточно в (1.1) подставить $\nu_{1\text{кр}}$, а затем $\nu_{2\text{кр}}$, чтобы получить верное тождество уравнения (1.1). Действительно, $h\left(\nu\right) = 0$ только при $\nu = \nu_{2\text{кр}}$, которое является устойчивым стационарным решением уравнения Ферхюльста

$$\dot{\nu} = h\left(\nu\right), \nu \in [0, \infty) \tag{1.12}$$

в точке бифуркации $\nu = 0$, $\frac{A}{B} = 0$. Неустойчивым решением является $\nu = 0$ [4]. Точкой бифуркации уравнения Ферхюльста назовем ОТ комбинации неединственности и граничной ОТ. Если сначала подставить в (1.1) $\nu_{2\text{кр}}$, то уравнение (1.1) выполняется тождественно. Сформулируем Теорему 1.

Теорема 1.2. *Для получения* $\nu_{1,2\textit{кр}}$ *УЧП пластины* (1.1) *необходимо к методу характеристик, то есть к ОДУ, применить изолированность окрестности ОТ при* $\nu_{1\textit{кр}} \to \infty$ *и достаточно для* $\nu_{1\textit{кр}}$ *получить числитель* $\xi\left(\nu\right) = 0$, *для* $\nu_{2\textit{кр}}$ *получить* $h\left(\nu\right) = 0$ *и верное тождество уравнения* (1.1).

С л е д с т в и е 1.1. *Стационарное уравнение* (1.1)*дает стационарные ОТ, которые совпадают с изолированными ОТ. Однако действительное стационарное решение существует при* $A > B\nu$*, а действительные обыкновенные точки* (1.7) *существуют при* $B\nu > A$*. Обыкновенными точками называются точки, не удовлетворяющие условию* $\nu_{2кр} = 0$*, то есть точки, удовлетворяющие* $\nu > 0$*. В соответствии с теоремой о выпрямлении в окрестности обыкновенной точки имеем из второго уравнения* (1.8)

$$x = \sqrt{-\gamma}\left(1 - \frac{\lambda}{2\gamma}\nu\right)t + c_1, \tag{1.13}$$

то есть для начальных условий $t = 0$ *характеристику* $x = c_1$*.*

С л е д с т в и е 1.2. *Для первого и второго члена* (1.6) *имеем*

$$2\xi\left(\nu\right)\frac{\partial \nu}{\partial x}dt = dx \tag{1.14}$$

также характеристику $x = c_1$*, ОТ пересечения* $\nu_{1кр} = \frac{\gamma}{\lambda}$*, точку бифуркации и стационарное решение уравнения Ферхюльста* $\nu_{2кр} = \frac{A}{B}$*. Тогда ОТ с* $\nu_{1кр}$ *назовем граничной ОТ.*

С л е д с т в и е 1.3. *Количественное неравенство* $\nu_{1кр} \neq \nu_{2кр}$ *определяется критическим параметром пластины* β *при одинаковых параметрах нагружения* $\Phi_{1,2}$ *и дислокационной структуры* K*, то есть* $\frac{K\Phi_1}{\beta} \neq K\Phi_2$*.*

С л е д с т в и е 1.4. *Согласно теореме Хорстхемке–Саичева по Стратановичу [5]* $\frac{A}{B} + \sigma\xi_t$*,* $\frac{2A}{B\sigma^2} \to 0$ *под действием белого шума* σ^2 *происходит асимптотический переход от несимметричной плотности вероятности (ПВ) к дельта-функции* $\delta(\nu)$*, где* ξ_t *– случайный гауссовский процесс. Тогда точка бифуркации уравнения Ферхюльста называется точкой пересечения стационарного решения уравнения Ферхюльста и уравнения Фоккера–Планка. Аналочная ОТ разрыва введена в исследование уравнения Лапласа [6].*

С л е д с т в и е 1.5. *Асимптотический переход под действием шума от несимметричной ПВ к* $\delta\left(\nu_{ik}\right)$ *для* $\int \nu_{ik} df_i = b_k$*, где* f_i *– площадь,* b_k *– сумма векторов Бюргерса [1], свидетельствует о переходе от тензора плотности дислокаций* ν_{ik} *к тензору дислокационной поляризации. Другой вариант – это переход к аморфизации пластины, когда* $b_k \to 0$ *в окрестности* $\nu_{ik}^{кр} = 0$*. Переход к* $\delta\left(\nu\right)$ *можно интерпретировать также как переход от неоднородно распределенных внутренних напряжений с несимметричной ПВ на упругое деформирование в окрестности* $\nu_{кр} = 0$*. Параметр дислокационной структуры* K *имеет вид*

$$K = \frac{\ln\left(L/r_0\right)}{2\pi c_0 d^2}, \tag{1.15}$$

где $\ln\left(L/r_0\right)$ *– относительное натяжение линии дислокации с ядром* $r_0 \sim 2 \div 3b$*,* L *– расстояние между дислокациями,* c_0 *– относительная плотность точечных дефектов кристалла,* d *– расстояние между стенками переползающих дислокаций. Интерпретация* (1.9), (1.1) *при* $d \sim b$ *означает распад ядра дислокации на конечное число дислокаций в паре стенок, соответствующее* $\nu_{1кр}$*, при* d *пропорциональном размеру блока означает критическую плотность блока, при* d *пропорциональном размеру зерна означает критическую плотность зерна* $\nu_{1кр}$*, при* d *– размере дислокационной структуры означает* $\nu_{1кр}$ *дислокационной структуры.*

Следствие 1.6. *Пусть* $h(\nu) = A\nu_{1,2кр} - B\nu_{1,2кр}^2 - C\sqrt{\nu}$ *является «возбуждением»* $h(\nu_{1,2кр})$. *Тогда закон параболического упрочнения пластины будет иметь вид [7]*

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = A\nu_{1,2кр} - B\nu_{1,2кр}^2 + C\sqrt{\nu}. \tag{1.16}$$

Следствие 1.7. *Приравняем* $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ *напряжению образования трещины длиной* $\bar{L}$ *про Гриффиту и получим в пластине трещины размером* $\sim \bar{L}^{-1/2}$ *[7] с расположением в полосах скольжения и переползания дислокаций, определяемых топологическим инвариантом* $\frac{1}{\cos\varphi}$ *[2].*

В соответствии с Теоремой 1 интегралы уравнения (1.1) можно классифицировать на основе полного интеграла [8]

$$t + c_3x + \int \frac{2c_3^2\xi(\nu)\,d\nu}{1 + \sqrt{1 + 4c_3^2\xi(\nu)\,h(\nu)}} = c_2. \tag{1.17}$$

Теорема 1.3. *Для получения интеграла* (1.17), *комбинации ОТ пересечения и изолированной ОТ уравнения* (1.1) *необходимо иметь частное решение* $\nu = c_3x + c_2 + c_4t$ *и достаточно сначала реализовать условие* $h(\nu) = 0$ *и получить интеграл* $t + c_3x + \int 2c_3^2\xi(\nu)\,d\nu = c_2$, *а затем условие числителя* $\xi(\nu) = 0$ *и получить интеграл* $t + c_3x = c_2$.

Следствие 1.1. *В задаче Коши при* $t = 0$ *интеграл* $t + c_3x = c_2$ *соответствует изолированной ОТ и ОТ пересечения* $x = c_1$.

Следствие 1.2. *Разделим числитель и знаменатель* (1.7) *на* B. *Имеем*

$$\frac{d\nu}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\nu^5\left(\nu - \frac{A}{B}\right)}{\frac{\lambda}{B}\nu - \frac{\gamma}{B}}}. \tag{1.18}$$

Характеристика классификации $\nu = c_3x + c_2$ *имеет в окрестности* $\nu_{1кр}$ *постоянную* c_3, *содержащую*

$$\frac{\gamma}{B} = \frac{\ln(L/r_0)\,\kappa\Phi}{8b^2d^4\pi c_0 l_x}, \tag{1.19}$$

где $\kappa = \frac{l_x}{\tilde{l}}$ *– топологический инвариант дислокационной структуры пластины,* l_x *– путь зарождения скользящих дислокаций,* $\tilde{l}$ *– путь скользящих дислокаций, замыкающих скольжение – переползание дислокаций в одну и другую сторону («восьмерка»). Нахождение характеристики, содержащей топологический инвариант в окрестности ОТ* $\nu_{1кр}$ *является решением задачи Зельдовича [9].*

Дата поступления 05.09.2016

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., *Теория упругости.*, М.: Наука., 1987, 246 с.

2. Алексеенко С. Н, Нагорных С. Н., “Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины.”, *Журн. СВМО.*, **14**:1 (2012).

3. Петровский И. Г., *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.*, М.: УРСС., 2003, 272 с.

4. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индуцированные шумом переходы*, М.:Мир., 1987, 397 с.

5. Нагорных С. Н., Саблуков Д. С,, "Плотность вероятности как решение уравнения Фоккера-Планка в индуцированных шумом переходах. Журнал Средневолжского математического общества.", *Журн. СВМО.*, **17**:1 (2015).

6. Тихонов А. Н., Самарский А. А,, *Уравнения математической физики.*, М.: Наука., 1966, 724 с.

7. Фридель Ж., *Дислокации*, М.: Мир., 1967, 643 с.

8. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д,, *Справочник дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка.*, М.: Физико-математическая литература., 2003, 416 с.

9. Зельдович Я. Б., *Избранные труды. Химическая физика. Гидродинамика.*, М.: Наука., 1984, 374 с.

Critical density and integrals of liminal dislocation equation.

© **S. N. Nagornykh[3], E. V. Nagornykh[4]**

Abstract. The paper deals with partial differential equation where unknown function is dislocation scalar density for a thin plate with large bending. Singular points and integrals of this equation are considered. It is shown that usage of characteristics method is necessary to obtain ordinary differential equations and their singular points. Two critical values of the dislocation scalar density for isolated singular point are found. They are sufficient for the conversion of initial equation into identity. Verhulst equation's bifurcation is important for analysis of different kinds of singular points in determined form as well as under excitation by the white noise. The consequence is given for stationary singular points, for another ordinary differential equation, for critical plate parameters, for critical parameter of Verhulst equation excited by the noise, for dislocation effects, for hardening and fracture of the plate. Zeldovich problem is formulated as a problem of obtaining integrals for partial differential equations with singular points and topological invariant of the plate dislocation structure.
Key Words: Singular points, first order partial differential equation, ordinary differential equation, classification of integrals, bifurcation point of Verhulst equation, white noise.

[3] Associate professor of Applied Mathematics Department, Nizhniy Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[4] Associate professor of Numerical Simulation of Physical and Mechanical Processes Department, Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod