УДК 512.917+513.9

Применение нидинг-рядов для полусопряженности отображений Лоренца с нулевой энтропией

© **М. И. Малкин**[1], **К. А. Сафонов**[2]

Аннотация. Для одномерных разрывных отображений лоренцевского типа с нулевой топологической энтропией применяется техника нидинг-инвариантов и нидинг-рядов. Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений и применялась ранее для отображений с положительной топологической энтропией. В данной работе показано, что в предельном переходе к нулевой энтропии с помощью нидинг-рядов удается задать инвариантную меру для лоренцевских отображений указанного класса и, тем самым, сконструировать полусопряженность (а в транзитивном случае — сопряженность) с модельным лоренцевским отображением единичного наклона.

Ключевые слова: топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа, нидинг-инварианты

1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (отображения лоренцевского типа), а также их надстройки являются моделями, демонстрирующими основные особенности потоков со сложным поведением предельных траекторий, подобных поведению траекторий в системах со странными аттракторами типа аттрактора Лоренца (см. [1]). В данной работе рассматривается вопрос о построении инвариантной меры и связанной с ней конструкцией полусопряженности отображений лоренцевского типа нулевой энтропии с кусочно-линейными моделями постоянного наклона. Для отображений с положительной топологической энтропией подобная конструкция была приведена в работе [6]. Для этого была существенно использована техника нидинг-последовательностей и нидинг-рядов.

Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном в [1] для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений. Кроме символических нидинг-последовательностей и соответствующих формальных нидинг-рядов Милнор и Терстон рассматривали значения нидинг-рядов внутри комплексного круга сходимости. При этом существенно использовался тот факт, что радиус сходимости нидинг-рядов равен единице, так что внутри единичного круга можно применять мощные средства теории аналитических функций. В случае положительности топологической энтропии $h_{top}(f)$ отображения f наименьший положительный корень функционального нидинг-ряда строго меньше единицы, и таким образом, корректно определены операции с аналитическими нидинг-рядами и их обратными — динамическими дзета-фунциями Артина-Мазура — вплоть до границы сходимости (т.е. внутри единичного круга). Поэтому нидинг-техника обычно применялась для кусочно-монотонных непрерывных отображений с положительной энтропией (как в задачах классификации, так и при изучении топологических инвариантов). В работах М.И. Малкина [2], [5], [6] она была обобщена на разрывные отображения лоренцевского типа с положительной топологической энтропией. В частности, была построена полусопряженность с кусочно-линейным отображением постоянного наклона, равного $h_{top}(f)$.

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, malkin@unn.ru

[2] Студент Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Мы переносим эту конструкцию на случай лоренцевских отображений без периодических точек. Такие отображения имеют нулевую топологическую энтропию и иррациональное число вращения и оказываются полусопряженными иррациональному повороту окружности.

В данной работе показано, что предельный переход на границе круга сходимости нидинг-рядов возможен, так что и в случае нулевой топологической энтропии нидин-техника позволяет построить инвариантную меру и записать соответствующие формулы для полусопряженности с модельными отображениями постоянного наклона.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-03687-а, 14-01-00344) и RSF grant 14-41-00044.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим семейство отображений $f : I \to I$ отрезка $I = [0; 1]$ в себя — отображений лоренцевского типа, удовлетворяющих условиям:

1. f-непрерывная монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $[0; c_f)$ и $(c_f; 1]$,
2. $\lim_{x\to c_f+0} f(x) = 0$,
3. $\lim_{x\to c_f-0} f(x) = 1$.

Отметим, что второе и третье условия являются, фактически, удобными условиями нормировки (интересная динамика отображения, удовлетворяющая только первому условию, имеет место лишь на отрезке $f(c_f+), f(c_f-)$).

Введем обозначение для множества точных прообразов точки разрыва

$$D_0 = \{c_f\},\ D_n = \{x \in I | f^n(x) = c_f, f^{n-1}(x) \neq {}_f\},\ D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Согласно [3], топологическую энтропию для разрывного отображения f можно определить как

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\, l_n}{n},\ \text{где } l_n = cardD_n. \tag{2.1}$$

Данный предел существует для любого отображения и принимает значения из отрезка $[0, \log 2]$.

Далее всюду будем считать отображение f фиксированным. Для произвольного подмножества $J \subset I$ введем формальный степенной ряд

$$L(J,t) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(J)\, t^i,\ \text{где } l_i(J) = card\,(J \cap D_n).$$

Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда имеем

$$r(f) = r(L(I,t)) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{cardD_n}}. \tag{2.2}$$

Таким образом, из (2.1) и (2.2) получаем $h_{top}(f) = -\log r(f)$ при $r \leq 1$ и вопрос о вычислении энтропии сводится к вычислению $r(f)$.

Введем еще одну функцию, определенную на полукольце $\mathcal{R}$ открытых интервалов, используя символическое описание лоренцевских отображений.

Определение 2.1. *Нидинг-последовательностью точки* $x \in I \backslash D$ *называется последовательность* $\omega(x) = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \ldots$, *где* $\omega_i = sign\,(f^i(x) - c_f)$. *Формальный степенной ряд* $\widetilde{\omega}(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i$ *переменного* t *будем называть нидинг-рядом точки* x.

Отображение $\omega(x)$ устанавливает полусопряженность между ограничением f на множество $I \backslash D$ и односторонней схемой Бернулли из двух символов $\{+1, -1\}$ (с тихоновской топологией и лексикографическим порядком).

Для каждой точки $x \in D$ определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \to x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \to x-0} \omega(y), \quad y \in I \backslash D.$$

Определение 2.2. *Нидинг-инвариантом отображения* $f \in \mathcal{F}$ *называется пара последовательностей* $(K_f^+, K_f^-) = (K_f^+(c_f), K_f^-(c_f))$.

Каждому элементу $(x,y) \in \mathcal{R}$ сопоставим формальный степенной ряд

$$K((x,y),t) = \widetilde{K}^-(y,t) - \widetilde{K}^+(x,t).$$

Введенные ряды связаны формальным соотношением (см. [2])

$$K((x,y),t) = (\widetilde{K}_f^+(t) - \widetilde{K}_f^-(t)) L((x,y),t). \tag{2.3}$$

Лоренцевское отображение f можно рассматривать в качестве отображения окружности, если отождествить концы интервала I. При этом отождествленная точка становится точкой разрыва, а c_f — точкой непрерывности. Обозначим соответствующее отображение окружности $\bar{f}$. Для таких отображений можно определить поднятие, т.е. отображение $F : R \to R$, для которого $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ F$. Далее, аналогично непрерывным отображениям окружности вводится число вращения

$$\rho(f,x) = \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

и множество вращения

$$\rho(f) = \{\rho(f,x) | x \in I\},$$

которое является замкнутым интервалом, возможно тривиальным.

Мы будем рассматривать класс лоренцевских отображений, для которых множество вращения тривиально и является иррациональным числом. Данное условие равносильно отсутствию у отображения периодических орбит, а следовательно, оно имеет нулевую топологическую энтропию.

3. Построение кусочно-линейной модели

Для начала мы рассмотрим случай $f(0) = f(1)$. При этом условии отображение $\bar{f}$ является гомеоморфизмом окружности. Известно, что иррациональный гомеоморфизм окружности строго эргодичен, при этом производящая функция единственной эргодической меры полусопрягает гомеоморфизм с поворотом окружности на угол $\rho(f)$. Используя степенные ряды из предыдущего параграфа, мы получим формулу для единственной инвариантной нормированной меры. Далее мы перенесем нашу конструкцию на случай $f(0) \neq f(1)$.

Из условия нулевой энтропии имеем $r(f) = r(L(I,t)) = 1$. Так как $0 \leq l_n(J) \leq l_n(I)$, то степенные ряды $L(J,t)$ определяют аналитические функции при $|t| < 1$. Рассмотрим выражение

$$\Lambda(J,t) = \frac{L(J,t)}{L(I,t)}. \tag{3.4}$$

Так как коэффициенты ряда $L(I,t)$ неотрицательны и при этом не все равны нулю, эта аналитическая функция не обращается в нуль на полуинтервале $[0,1)$. Следовательно для каждого $J \subset I$ функция $\Lambda(J,t)$ определена при $0 \leq t < 1$ и справедливо неравенство

$$0 \leq \Lambda(J,t) \leq 1 \text{ при } 0 \leq t < 1.$$

Из последнего условия и непрерывности по переменной t следует, что существует предел

$$\Lambda(J) = \lim_{t \to 1} \Lambda(J,t).$$

Для открытых интервалов $J \in \mathcal{R}$ функцию $\Lambda(J,t)$ можно определить другим способом. Для этого напомним, что $r(f) = 1$ совпадает с наименьшим положительным корнем аналитической фукнции $K_f^+ - K_f^-$. Тогда ряд $K(I,t) = (K_f^+ - K_f^-)L(I,t)$ определяет аналитическую функцию в круге $|\ t| < 1$ и отличную от 0 на полуинтервале $[0,1)$. Используя соотношение (2.3), имеем

$$\Lambda(J,t) = \frac{K(J,t)}{K(I,t)}. \tag{3.5}$$

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Функция $\phi(x) = \Lambda([0,x))$ является неубывающей и непрерывной слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необоходимо показать, что условие $\Lambda([0,x_1)) \leq \Lambda([0,x_2))$ выполняется для всех $x_1 < x_2 \in I$. Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $[0,x_1) \subset [0,x_2)$. Далее, для коэффициентов формальных рядов имеем

$$0 \leq l_n([0,x_1)) \leq l_n([0,x_2)),$$

$$\Lambda([0,x_1),t) \leq \Lambda([0,x_1),t).$$

Из последнего неравенства при предельном переходе в (3.4) следует неубывание функции $\phi(x)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для доказательство второго свойства сначала покажем аддитивность функции $\Lambda(J)$

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Пусть $a < b < c \in I$. Тогда $\Lambda([a,c)) = \Lambda([a,b)) + \Lambda([b,c))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично предыдущему доказательству воспользуемся соотношением для коэффициентов степенных рядов

$$l_n([a,c)) = l_n([a,b)) + l_n([b,c)),$$

из которого при предельном переходе в 3.4 непосредственно следует наше утверждение.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Непрерывность слева для $\phi(x)$ означает, что

$$\lim_{x_1 \to x_2} L([x_1,x_2)) = 0,\ \forall x_1 < x_2 \in I.$$

По функции $\phi(x)$ построим меру Лебега—Стилтьеса, которую обозначим μ_ϕ. Данная мера является борелевской и нормированной. При этом мера любого замкнутого или открытого интервала, а также любого полуинтервала $J \subset I$ вычисляется по формуле

$$\mu_\phi(J) = \Lambda(J).$$

Наша задача — показать, что мера μ_ϕ также является инвариантной.

Предложение 3.3. *Если полуинтервал $J = [x, y)$ целиком содержится в одном из интервалов непрерывности отображения f, то $\Lambda(f(J)) = \Lambda(J)$.*

Доказательство. В нашем случае ограничение $f|_J$ является гомеоморфизмом, поэтому $l_n(f(J)) = l_{n+1}(J)$ и $L(f(J), t) = tL(J, t)$. Переходя к пределу в (3.4), получаем требуемое равенство.
Доказательство закончено.

Для доказательства инвариантности меры μ_ϕ рассмотрим для начала случай $f(0) = f(1)$. В этом случае прообраз любого полуинтервала $J = [x, y)$ можно разбить на два непересекающихся полуинтервала U_1, U_2 таких, что $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$ и отображения $f|_{U_i}$ являются гомеоморфизмами. В этом случае имеем

$$\Lambda(f^{-1}(J)) = \Lambda(U_1 \cup U_2) = \Lambda(U_1) + \Lambda(U_2) = \Lambda(f(U_1)) + \Lambda(f(U_2)) = \Lambda(J).$$

Таким образом, показана инвариантность меры μ_ϕ. В остальных двух случаях рассуждения остаются аналогичными, если показать, что

$$\mu_\phi[f(0), f(1-0)) = 0.$$

При условии $f(0) > f(1)$ это очевидно, так как

$$f^{-1}([f(0), f(1)]) = \emptyset.$$

В последнем случае найдутся $a, b \in I \backslash \partial I$, для которых $f(a) = 1, f(b) = 0$. Тогда мы имеем

$$\mu_\phi(I) = \mu_\phi[0, a) + \mu_\phi[a, c) + \mu_\phi[c, b) + \mu_\phi[b, 1) = \mu_\phi[0, f(0))+$$
$$+2\mu_\phi[f(0), f(1-0)) + \mu_\phi[f(1-0), 1) = \mu_\phi(I) + \mu_\phi[f(0), f(1-0))$$

Из последнего равенства следует, что $\mu_\phi[f(0), f(1-0)) = 0$.

Все рассуждения, приведенные выше, подходят для любого лоренцевского отображения с нулевой топологической энтропией. Далее для нас будет важна иррациональность числа вращения. В этом случае отображение не имеет периодических точек, а значит и одноточечных подмножеств положительной меры (не имеет атомов).

Из последнего равенства следует:

$$\mu_\phi[x, y) = \mu_\phi(x, y).$$

Исходя из (3.5), функцию $\phi(x)$ можно определить другим способом, а именно:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{K([0, x), t)}{K([0, 1), t)}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Функция $\phi : I \to I$ для таких отображений является непрерывной, неубывающей и сюръективной. Покажем, что данная функция устанавливает полусопряженность между исходным отображением f и кусочно-линейным отображением.

Обозначим $\omega = \mu_\phi[0, f(0))$. Для каждого $0 \le x < c$ выполняется

$$\phi(f(x)) = \mu_\phi[0, f(x)) = \mu_\phi[0, f(0)) + \mu_\phi[f(0), f(x)) = \omega + \mu_\phi[0, x) = \phi(x) + \omega$$

Для остальных $c \le x < 1$ равенство принимает вид

$$\begin{aligned}\phi(f(x)) = \mu_\phi[0, f(x)) = \mu_\phi[0, f(1-0)) - \mu_\phi[f(x), f(1-0)) = \mu_\phi[0, f(0))+ \\ +\mu_\phi[f(0), f(1-0)) + \mu_\phi[x, 1) = \omega + 1 - \mu_\phi[0, x) = 1 - \phi(x) + \omega.\end{aligned}$$

Несложно заметить, что $\phi \circ f = f_\omega \circ \phi$, где

$$f_\omega(x) = \begin{cases} x + \omega, & 0 \le x < 1 - \omega, \\ 1 - x + \omega, & 1 - \omega \le x < 1. \end{cases}$$

Последнее отображение можно рассматривать как поворот окружности (единичной длины) на угол ω, а его множество вращения состоит из одного числа $\rho(f_\omega) = \omega$. Так как множество вращения является инвариантом полусопряженности, то справедливо рвенство

$$\omega = \rho(f) = \mu_\phi[0, f(0)).$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *В классе лоренцевских отображений без периодических точек единственная нормированная инвариантная мера может быть выражена на интервалах* $J \in I$ *с помощью нидинг рядов в виде* $\mu_\phi(J) = \Lambda(J) \lim_{t \to 1} \Lambda(J, t)$, *где* $\Lambda(J, t)$ *определяется по формуле (5). Соответствующая этой мере полусопряженность с модельным кусочно-линейным отображением единичного наклона с числом вращения* $\rho(f)$ *определяется формулой*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{K([0, x), t)}{K([0, 1), t)}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Дата поступления 30.11.2016

Список литературы

1. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu., “Lecture on chaotic dynamical systems”, *AMS/IP, Studies in Advanced Mathematics, (2002), v.28.*.
2. M. Malkin., “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, 1989, 131–139.
3. L.-S. Young., “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 75-88.
4. J.Milnor and W.Thurston., *Dynamical Systems, Proc., 1986-87 (J.C.Alexander,Ed.). Lec. Notes Math., v.1342*, Springer-Verlag, 1988.
5. M. Malkin, “Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **10** (1991), 265-275.

6. М.И. Малкин, “О топологической сопряженности разрывных отображений отрезка”, *Украинский Математический Журнал*, **32**:5 (1980), 610-616.

Application of kneading series to semiconjugacy of Lorenz maps of zero entropy

© **M. Malkin[3], K. Safonov[4]**

Abstract. For one-dimensional discontinuous maps of Lorenz type with zero topological entropy, we apply the technique of kneading invariants and kneading series. The kneading technique was introduced first by J. Milnor and W. Thurston for continuous piecewise-monotone one-dimensional maps and was applied to maps with positive topological entropy. In present paper we show that by approaching the zero entropy one may (using kneading series) define invariant measure for Lorenz maps under consideration. Thus one may construct semiconjugacy (being actually a conjugacy in the transitive case) with a model map of unit slope.

Key Words: topological entropy, Lorenz type maps, kneading invariants

[3] Associate professor of Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis,Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

[4] Student, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod