

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

УДК 539.3:533.6:517.9

# Об управлении динамикой трубопровода

© П. А. Вельмисов<sup>1</sup>, А. В. Гладун<sup>2</sup>

**Аннотация.** Изучается управляемость механической системы, представляющей собой полый упругий стержень с протекающей внутри него жидкостью или газом (трубопровод). Построены управления с обратной связью, обеспечивающие асимптотическую устойчивость колебаний трубопровода. Приведены результаты численного моделирования поведения механической системы при заданных параметрах под действием построенных управлений.

**Ключевые слова:** упругий трубопровод, динамика, управляемость, управление с обратной связью, функция Ляпунова, уравнения с частными производными, метод Галеркина

## 1. Введение

Составной частью многих конструкций, приборов, аппаратов, установок и т.д. являются трубопроводы, по которым протекает поток жидкости или газа. Поток, воздействуя на трубопровод, может возбуждать его колебания. Амплитуда, скорость или частота его колебаний могут увеличиваться с течением времени до значений, нарушающих надежность эксплуатации конструкций, вплоть до разрушения конструкций или их элементов. Таким образом, при эксплуатации механических систем с трубопроводами необходимо контролировать их динамику. С одной стороны, при проектировании таких конструкций можно заранее рассмотреть задачу определения параметров механической системы, гарантирующих нормальную работу конструкций и не приводящих к их разрушению или возникновению аварийной ситуации. Множество работ посвящено исследованию задачи динамической устойчивости трубопровода [1]-[21]. С другой стороны, можно рассмотреть задачу управления параметрами трубопровода, чему и посвящена данная статья. Управление параметрами предполагает активное воздействие на трубопровод с целью устранения возникающих в нём колебаний.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого полого стержня длиной  $l$  и протекающей внутри него жидкости. На плоскости  $xOy$  недеформированному стержню соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $(0, l)$ . Скорость жидкости равна  $U$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ . Для описания динамики трубопровода используем уравнение [4]

<sup>1</sup> Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

<sup>2</sup> Доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск; aleksygladun@gmail.com

$$(m_0 + m_*)\ddot{w} + \left[ EJw'' \left( 1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + m_*U^2w'' \left[ 1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right] + \\ + Nw'' \left( 1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + 2m_*U\dot{w}' \left( 1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + \alpha\dot{w}''' - \beta\ddot{w}'' + f(x, t, w, \dot{w}) = 0 \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $m_0, m_*, J$  вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0\pi(R_*^2 - R_0^2), \quad m_* = \rho_*\pi R_0^2, \quad J = \frac{\pi}{4} (R_*^4 - R_0^4).$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате  $x$  и времени  $t$  соответственно. В уравнении (2.1)  $w(x, t)$  – деформация (прогиб) в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $t > 0$ ;  $E$  – модуль упругости;  $U$ ,  $m_*$ ,  $\rho_*$  – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа);  $l$  – длина трубы между опорами;  $R_*$ ,  $R_0$  – внешний и внутренний радиусы трубопровода;  $m_0, \rho_0$  – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла;  $N$  – сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) сила;  $\alpha$  – коэффициент внутреннего демпфирования; коэффициент  $\beta$  учитывает инерцию вращения сечений; функция  $f(x, t, w, \dot{w})$  определяет внешнее управляемое воздействие на трубопровод. Для построения решений уравнения (2.1) методом Галеркина будем задавать функцию в виде

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M v_k(t)g_k(x),$$

где  $\{g_k(x)\}_1^\infty$  – полная на  $[0, l]$  система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода. Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w''(l, t) = 0,$$

в соответствии с которым выберем  $g_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$  и ограничимся случаем  $M = 2$ . Как показано в работах [9],[13], при исследовании динамической устойчивости трубопровода, результаты применения метода Галеркина для случая двух ( $M = 2$ ) и большего числа приближений ( $M = 20$ ) отличаются несущественно. Для случая  $M = 2$  функция  $w(x, t)$  примет вид

$$w(x, t) = v_1 \sin \left( \frac{\pi x}{l} \right) + v_2(t) \sin \left( \frac{2\pi x}{l} \right).$$

На основе процедуры метода Галеркина получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$

$$\begin{aligned}
& Cv_1^3(t) + 8 Cv_2^2(t) + \frac{2}{3} Kv_1(t)v_2(t)\dot{v}_1(t) + \frac{1}{3} Kv_1^2(t)\dot{v}_2(t) - \frac{36}{7} Kv_2^2(t)\dot{v}_2(t) + \\
& + Av_1(t) + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3} \dot{v}_1(t) + B\ddot{v}_1(t) - \frac{8}{3} m_*U\dot{v}_2(t) + \frac{l}{2} u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2) = 0, \\
& \left(16C - \frac{9\pi^6D}{l^5}\right) v_2^3(t) + \left(8C - \frac{9\pi^6D}{2l^5}\right) v_1^2(t)v_2(t) + \frac{88}{21} Kv_1(t)v_2(t)\dot{v}_2(t) + \\
& + \frac{44}{21} Kv_2^2(t)\dot{v}_1(t) + Kv_1^2(t)\dot{v}_1(t) + \left(4A + \frac{6\pi^4D}{l^3}\right) v_2(t) + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} \dot{v}_2(t) + \\
& + \left(B + \frac{3\pi^2\beta}{2l}\right) \ddot{v}_2(t) + \frac{8}{3} m_*U\dot{v}_1(t) + \frac{l}{2} u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2), u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2)$  – управляющие воздействия, полученные в результате применения процедуры метода Галеркина к функции  $f(x, t, w, \dot{w})$ . Для упрощения записи системы (2.2) введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi^4 D}{2l^3} - \frac{\pi^2(m_*U^2 + N)}{2l}; & B &= \frac{\pi^2\beta}{2l} + \frac{l(m_0 + m_*)}{2}; \\
C &= -\frac{3\pi^6 D}{16l^5} + \frac{\pi^4(3m_*U^2 - N)}{16l^3}; & K &= \frac{4\pi^2m_*U}{5l^2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим две задачи управления деформацией трубопровода.

**Задача 1.** Найти кусочно-непрерывные (далее допустимые) управления  $u_1(t), u_2(t), t \in [t_0, t_1]$ , такие, что соответствующее им движение системы (2.2) удовлетворяет условиям

$$w(x, t_0) = w_0(x), \quad w(x, t_1) = w_1(x).$$

**Задача 2.** Найти такие управляющие воздействия  $u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2), u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2)$ , которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения системы (2.2).

### 3. Исследование управляемости

Рассмотрим задачу 1. Для изучения управляемости системы (2.2) воспользуемся достаточным условием управляемости динамической системы по линейному приближению [22], [23]. Для применения условия управляемости необходимо привести систему уравнений (2.2) к нормальному виду. Введем новые переменные

$$y_1 = v_1(t), \quad y_2 = v_2(t), \quad y_3 = \dot{v}_1(t), \quad y_4 = \dot{v}_2(t),$$

и перепишем систему (2.2) в виде

$$\dot{y}_1 = y_3,$$

$$\dot{y}_2 = y_4,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= \frac{(-1)}{B} \left[ Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 + \right. \\ &\quad \left. + Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3}y_3 - \frac{8}{3}m_*Uy_4 + u_1 \right], \\ \dot{y}_4 &= \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[ \left( 16C - \frac{9\pi^6D}{l^5} \right) y_2^3 + \left( 8C - \frac{9\pi^6D}{2l^5} \right) y_1^2y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 + Ky_1^2y_3 + \left( 4A + \frac{6\pi^4D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_*Uy_3 + u_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $u_1, u_2$  – допустимые управлении. Запишем систему линейного приближения в точке  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $u = (u_1, u_2)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ \dot{y}_3 &= \frac{(-1)}{B} \left[ Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_*Uy_4 + u_1 \right] \\ \dot{y}_4 &= \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[ \left( 4A + \frac{6\pi^4D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_*Uy_3 + u_2 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Запишем систему (3.2) в матричном виде

$$\dot{y} = Ay + Bu$$

Чтобы система (3.1) была управляема в окрестности положения равновесия  $y = 0$ , достаточно, чтобы  $\text{rank}\{B, AB\} = 4$ .

Так как при  $l \neq 0$

$$\det\{B, AB\} = \frac{16l^4}{(\pi^2\beta + l^2m_0 + l^2m)(4\pi^2\beta + l^2m_0 + l^2m)} \neq 0,$$

то линейная система (3.2) управляема, а система (3.1) управляема в окрестности положения равновесия  $y = 0$  (2.2). Следовательно, управлений  $u_1(t), u_2(t)$  можно использовать для управления динамикой трубопровода за конечный промежуток времени.

#### 4. Построение управлений

Рассмотрим задачу 1, которая эквивалентна задаче о построении стабилизирующего управления для нулевого решения системы (3.1). Нулевое решение  $y = 0$  означает отсутствие деформации трубопровода в течение всего времени его эксплуатации. Найдем такие управляющие воздействия  $u_1(y), u_2(y)$  которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения в силу уравнений (3.1).

Поскольку система (3.1) с управлениями  $u_1(y), u_2(y)$  автономная, будем решать поставленную задачу путем построения функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Барбашина-Красовского [24] об асимптотической устойчивости.

Возьмем в качестве функции Ляпунова следующую функцию

$$V(y) = Ay_1^2 + \left(4A + \frac{4\pi^4 D}{l^3}\right)y_2^2 + By_3^2 + \left(B + \frac{3\pi^2 \beta}{2l}\right)y_4^2, \quad (4.1)$$

которая является бесконечно большой положительно определенной. Производная от функции (4.1) в силу системы (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (-2)y_3 \left[ Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 - \frac{\pi^4 \alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_* U y_4 + u_1(y) \right] - \\ & - 2y_4 \left[ \left( 16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5} \right) y_2^3 + \left( 8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5} \right) y_1^2y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \right. \\ & \left. + \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 + Ky_1^2y_3 + \frac{8\pi^4 \alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_* U y_3 + u_2(y) \right]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы производная  $\dot{V}$  была отрицательно определенной, зададим следующие управляющие функции

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 + \frac{8}{3} m_* U y_4 - \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 - 8Cy_1y_2^2 - Cy_1^3 + \frac{15\pi^4 \alpha}{2l^3} y_3, \\ u_2(y) &= (-1) \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 - \frac{8}{3} m_* U y_3 - Ky_1^2y_3 - \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 - \left( 8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5} \right) y_2^2y_2 - \\ & - \left( 16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5} \right) y_2^3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{V}(y) = -\frac{16\pi^4 \alpha}{l^3} (y_3^2 + y_4^2), \dot{V}(y) \leq 0,$$

причем  $\dot{V}(y) = 0$  на многообразии  $G : y_3^2 + y_4^2 = 0$ ,  $\dot{V}(y) < 0$  вне многообразия  $G$ .

По теореме Барбашина-Красовского [24] невозмущенное движение  $y = 0$  будет асимптотически устойчиво в целом, если многообразие  $G$  не содержит целых траекторий системы (3.1), кроме  $y = 0$ . Проверим это непосредственной подстановкой управляющих функций  $u_1(y)$ ,  $u_2(y)$  и равенств  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0$ , описывающих многообразие  $G$ , в систему (3.1). Имеем

$$\dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = \frac{(-A)}{B} y_1, \quad \dot{y}_4 = \frac{(-4)(2Al^3 + 3\pi^4 D)}{(2Bl + 3\pi^2 \beta)l^2} y_2. \quad (4.2)$$

Видим, что уравнения системы (4.2) не обращаются в тождества, следовательно, многообразие  $G$  не содержит целых траекторий системы 3.1. Точки траектории не могут бесконечно оставаться на многообразии  $G$ , поскольку  $\dot{y}_3 \neq 0$ ,  $\dot{y}_4 \neq 0$ , кроме случая, когда  $y = 0$ .

Таким образом, управления  $u_1(y)$ ,  $u_2(y)$  обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения  $y = 0$  системы (3.1).

Приведем результаты численного моделирования динамики трубопровода. В работах [9], [13] построены области динамической устойчивости и неустойчивости трубопровода при начальных условиях

$$w(x, 0) = 0.02 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dot{w}(x, 0) = 0,$$

которые, согласно методу Галеркина, для системы (3.1) означают

$$y_1(0) = 0.02, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0.$$

Рассмотрим точку  $U = 20, N = 1500$  из области неустойчивости колебаний, в которой происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени [9],[13]. Использование построенных управлений  $u_1(y)$ ,  $u_2(y)$  для механической системы (3.1) при указанных значениях скорости потока и сжимающей силы позволяет достаточно быстро погасить возникшие колебания (рис.1-4). На рис. 1, 2 представлено поведение координат  $y_1, y_3$  системы 3.1 под действием построенных управлений, при этом  $y_2(t) \equiv 0, y_4(t) \equiv 0$ , на рис. 3, 4 изображены графики функции  $w(x, t)$  при  $x = l/4$  и  $x = l/2$ . На рис. 5, 6 показаны управления  $u_1(t) = u_1(y(t)), u_2(t) = u_2(y(t))$ .

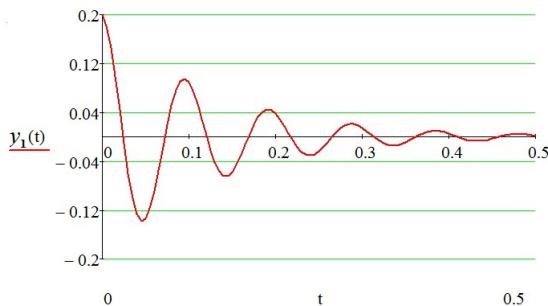


Рис. 1: Поведение  $y_1(t)$ .

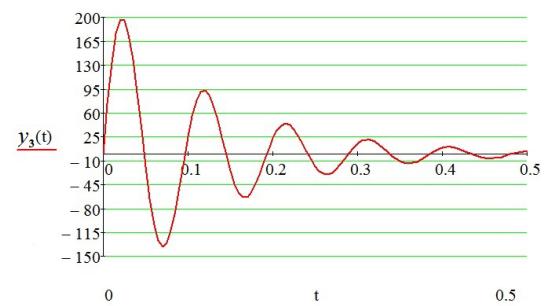


Рис. 2: Поведение  $y_3(t)$ .

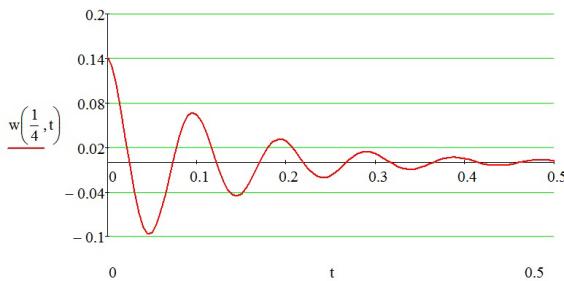


Рис. 3: Колебание точки  $x = l/4$ .

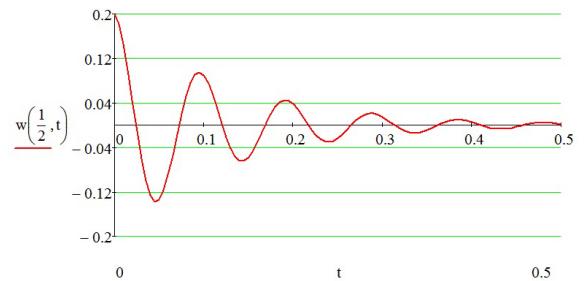


Рис. 4: Колебание точки  $x = l/2$ .

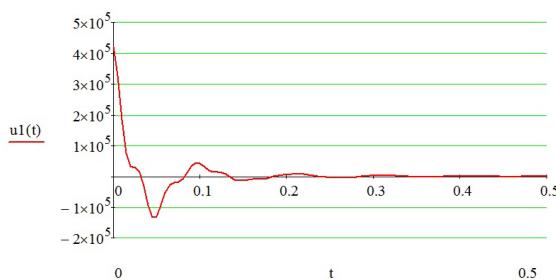


Рис. 5: Управление  $u_1(t)$ .

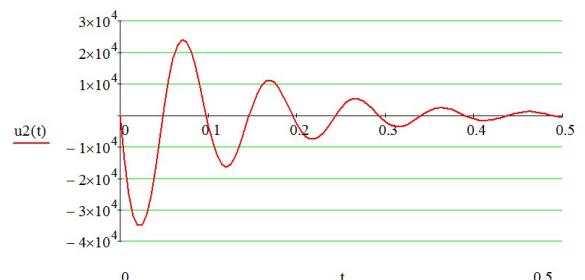


Рис. 6: Управление  $u_2(t)$ .

При построении управлений, решающих задачу 2, были выбраны следующие параметры механической системы:  $E = 210 * 10^9$  – модуль упругости стали;  $\rho_* = 1000$  – плотность воды;  $\rho_0 = 7000$  – плотность стали;  $l = 1$ ;  $R_* = 0,05$ ;  $R_0 = 0,046$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,5$ .

Таким образом, в статье исследована на управляемость в окрестности положения равновесия система, описывающая динамику трубопровода. При помощи функции Ляпунова построены управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость колебаний трубопровода. Тем самым, показана возможность управления динамикой трубопровода с помощью внешних управляющих воздействий. Предложенная в статье методика построения стабилизирующих управлений может быть использована для других модельных уравнений, описывающих динамику трубопровода.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599, № 15-41-02455р\_поволжье\_a.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paidoussis M.P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, **3**:310 (2008), С. 462-492.
2. Paidoussis M. P., “Issid N.T. Dymanic stability of piped conveying fluid”, *J. Sound and Vibr.*, **33** (1974), С. 267-294.
3. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., “Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики.”, *Rev. Mat. Estat., São Paulo, Brasil*, **19** (2011), С. 159-178.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., *Исследование динамической устойчивости трубопровода. Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.), ч. 2. Под редакцией Н.Ф. Морозова, Б.Г. Миронова, А.В. Манжирова, Ю.Н. Радаева.*, Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ин-т, 2015, 270-275 с.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета.*, Ульяновск: УлГТУ, 2014, № 4, С. 29-36.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии.*, Ульяновск: УлГТУ, 2013, 322 с.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “О динамической устойчивости трубопровода”, *Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Тр. Международ. Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007* (г. Ульяновск, 17–18 мая 2007 г.), **4**, Ульяновск: УлГТУ, 2007, 133-140.
8. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.*, М.:Физматгиз, 1961, 339 с.

9. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., Киреев С. В., “Исследование динамической устойчивости трубопровода.”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), С. 106-114.
10. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., Милушева С. Д., “Исследование устойчивости трубопровода.”, *Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национална школа.*, Болгария, Варна, 1995, С. 299-304.
11. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета.*, Ульяновск: УлГТУ, 2004, № 4, С. 26-29.
12. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии.*, Ульяновск: УлГТУ, 2011, 200 с.
13. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода”, *Автоматизация процессов управления.*, **1**:39 (2015), С. 63-73.
14. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “О динамической устойчивости трубопровода”, *Проблемы математического и естественнонаучного образования*, ред. А.И. Кириллов, С.А. Розанова. *Сборник статей Международной конференции.*, Российский университет дружбы народов, М., 2015, С. 205-210.
15. Казакевич М. И., *Аэrodинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов.*, М: Недра, 1977, 200 с.
16. Мовчан А./, А., “Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Прикладная математика и механика.*, **4** (1965), С. 760-962.
17. Сафина Г. Ф., “Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости.”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), С. 59-67.
18. Светлицкий В. А., *Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней потоком жидкости или воздуха.*, М: Машиностроение, 1982, 280 с.
19. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: пер. с англ.*, М: Мир, 1985, 254 с.
20. Феодосьев В. И., *О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости*, Инж. сб., **10**, Изд-во АН СССР, 1951.
21. Челомей С. В., “О динамической устойчивости упругих систем”, *Докл. АН СССР. Серия «Механика»*, **252**:2 (1980), 307-310.
22. Гладун А. В., “Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению”, *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины.*, **2**, 1998, 21-31.
23. Гладун А. В., “Управление вращательным движением твердого тела с помощью спарки гиродинов”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета.*, Ульяновск: УлГТУ, 2015, № 4, 49-52.

24. Барбашин Е. А., *Функции Ляпунова*, М: Наука, 1970, 240 с.

## On control of dynamic of a pipeline

© P. A. Vel'misov<sup>3</sup>, A. V. Gladun<sup>4</sup>

**Abstract.** The problem of control of a mechanical system, which is a hollow elastic rod with a fluid or gas, flowing inside it (pipeline), is investigated. The feedback controls to provide the asymptotic stability of the pipeline vibrations are constructed. The results of numerical simulation of the behavior of the mechanical system under the action of constructed controls with given parameters are presented.

**Key Words:** elastic pipeline, dynamics, controllability, feedback control, Lyapunov function, partial differential equations, Galerkin method

---

<sup>3</sup> Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

<sup>4</sup> Associate Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences, Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B. P. Bugaev, Ulyanovsk; aleksygladun@gmail.com