УДК 517.928, 531.01

Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы

© Н. В. Ковалев [1]

Аннотация. Рассматриваются стационарные квазиконсервативные системы с одной степенью свободы с гамильтоновой невозмущенной системой. Исследуется прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем, обсуждается их аналитичность по малому параметру. Предложен метод построения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем в переменных действие-угол. Сформулирован и доказан критерий существования замкнутых орбит в терминах неавтономных интегралов. Критерий существования замкнутых орбит применен для оценки количества предельных циклов одного класса уравнений Льенара.

Ключевые слова: квазиконсервативная система, неавтономный интеграл, периодические решения, предельные циклы, переменные действие-угол, разложение по малому параметру

1. Прямое разложение и аналитичность неавтономных интегралов по малому параметру

Рассматривается квазиконсервативная система с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + ... \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + ... \end{cases}, \tag{1.1}$$

где $H = H(x,y)$ – функция Гамильтона невозмущённой системы, x – координата, y – импульс, ϵ – малый параметр, а $f_k = f_k(x,y)$ и $g_k = g_k(x,y)$ – произвольные гладкие функции.

Неавтономным интегралом системы (1.1) называется функция $I = I(x,y,t)$, сохраняющая постоянное значение вдоль любого решения $x(t)$, $y(t)$ этой системы. Неавтономные интегралы системы (1.1) возникают однопараметрическими семействами. Действительно, если $I = I(x,y,t)$ – неавтономный интеграл, то $I = I(x,y,t+h)$ для произвольного фиксированного h – также неавтономный интеграл.

В настоящей работе будет построено семейство неавтономных интегралов $I = I(x,y,t)$ системы (1.1) в виде прямого разложения [1] по малому параметру ϵ:

$$I = I_0 + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + ... \,. \tag{1.2}$$

Так как система (1.1) при $\epsilon = 0$ допускает автономный интеграл $H = const$. Можно положить $I_0 = H$.

Из определения неавтономного интеграла следует

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dH}{dt} + \epsilon\frac{dI_1}{dt} + \epsilon^2\frac{dI_2}{dt} + ... = 0, \tag{1.3}$$

где

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y};$$

[1] Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет), г. Москва; nick.kvlv@gmail.com

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial I_k}{\partial y}\dot{y}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Подставляем $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из системы (1.1) в (1.3):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots\right] + \frac{\partial H}{\partial y}\left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots\right] +$$

$$+\epsilon\frac{\partial I_1}{\partial t} + \epsilon\frac{\partial I_1}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots\right] + \epsilon\frac{\partial I_1}{\partial y}\left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots\right] +$$

$$+\epsilon^2\frac{\partial I_2}{\partial t} + \epsilon^2\frac{\partial I_2}{\partial x}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots\right] + \epsilon^2\frac{\partial I_2}{\partial y}\left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots\right] + \dots = 0.$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ϵ. Имеем уравнения

$$\epsilon^k: \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \{I_k, H\} = F_k, \qquad k = 1, 2, \dots , \tag{1.4}$$

где

$$\{I_k, H\} = \frac{\partial I_k}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial I_k}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}, \quad F_k = -\frac{\partial H}{\partial x} f_k - \frac{\partial H}{\partial y} g_k - \sum_{n=1}^{k-1}\left[\frac{\partial I_n}{\partial x} f_{k-n} - \frac{\partial I_n}{\partial y} g_{k-n}\right].$$

Конструкция в фигурных скобках называется скобкой Пуассона. (1.4) – линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-ого порядка. Коэффициенты разложения (1.2) неавтономного интеграла есть частные решения уравнений (1.4).

Для интегрирования уравнений (1.4) необходимо найти три независимых интеграла системы характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dI_k}{F_k}. \tag{1.5}$$

Один из этих интегралов – гамильтониан $H = H(x, y)$. Если (x_0, y_0) – регулярная точка невырожденной системы, то система (1.5) допускает два явно зависящих от времени интеграла $K = K(x, y, t)$, $L = L(x, y, t)$. Независимость понимается в том смысле, что матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial t} & \dfrac{\partial K}{\partial x} & \dfrac{\partial K}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial t} & \dfrac{\partial L}{\partial x} & \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в окрестности точки (x_0, y_0, t_0), где t_0 – произвольный фиксированный начальный момент времени. Здесь же отметим, что построение интегралов L и K связано не только с квадратурами, но и с обращением функций. В таком ввиде метод неэффективен.

Очевидно, что если произвольно выбирать решение уравнений (1.4), то ряд (1.2) будет расходиться. В этом случае будем говорить о формальном неавтономном интеграле системы (1.1). Однако, если получить неавтономный интеграл системы (1.1) как решение некоторой задачи Коши для уравнения (1.3), то он будет аналитическим по ϵ. Коэффициенты разложения (1.2) аналитического интеграла можно найти, решая соответствующие задачи Коши для уравнений (1.4). Единственное решение задачи Коши вида

$$\begin{aligned} &\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} + f(x, y, \epsilon)\frac{\partial I}{\partial x} + g(x, y, \epsilon)\frac{\partial I}{\partial y} = 0, \\ &I|_{t=0} = \phi(x, y, \epsilon) \end{aligned} \tag{1.6}$$

аналитично по ϵ, если аналитичны ряды $f(x,y,\epsilon)=\epsilon f_1(x,y)+\ldots$, $g(x,y,\epsilon)=\epsilon g_1(x,y)+\ldots$ и $\phi(x,y,\epsilon)=\phi_0(x,y)+\epsilon\phi_1(x,y)+\ldots$. Точнее, если ряды f, g и ϕ равномерно аналитичны по ϵ в окрестности точки (x_0,y_0), то существует окрестность точки $(x_0,y_0,0)$, в которой решение задачи (1.6) равномерно ϵ-аналитично [2]. Этот результат развивает классическую теорему Пуанкаре об аналитичности решения дифференциального уравнения по малому параметру [3].

2. Построение неавтономных интегралов в переменных действие-угол

В системе (1.1) сделаем каноническую замену переменных

$$\begin{cases} x=X(r,\varphi) \\ y=Y(r,\varphi) \end{cases}, \tag{2.1}$$

где r – действие, φ – угол. В новых переменных система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot r=\frac{\partial X}{\partial \varphi}[\epsilon g_1+\epsilon^2 g_2+...]-\frac{\partial Y}{\partial \varphi}[\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+...] \\ \dot\varphi=\omega(r)+\frac{\partial Y}{\partial r}[\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+...]-\frac{\partial X}{\partial r}[\epsilon g_1+\epsilon^2 g_2+...] \end{cases}, \tag{2.2}$$

где $H=H(r)$ – функция Гамильтона невозмущённой системы, $\omega(r)=\frac{\partial H}{\partial r}$, а $f_k=f_k(r,\varphi)$ и $g_k=g_k(r,\varphi)$ – произвольные гладкие функции.

Как и в пункте 1, будем искать неавтономный интеграл системы (2.2) в виде прямого разложения по степеням параметра ϵ:

$$I=H+\epsilon I_1+\epsilon^2 I_2+\ldots\,. \tag{2.3}$$

В переменных действие-угол уравнение (1.4) примет вид

$$\epsilon^k:\quad \frac{\partial I_k}{\partial t}+\frac{\partial I_k}{\partial \varphi}\omega(r)=F_k,\qquad k=1,2,\ldots, \tag{2.4}$$

где

$$F_k=-\omega(r)\left[\frac{\partial X}{\partial\varphi}g_k-\frac{\partial Y}{\partial\varphi}f_k\right]-\sum_{n=1}^{k-1}\left(\frac{\partial I_n}{\partial r}\left[\frac{\partial X}{\partial\varphi}g_{k-n}-\frac{\partial Y}{\partial\varphi}f_{k-n}\right]-\frac{\partial I_n}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial Y}{\partial r}f_{k-n}-\frac{\partial X}{\partial r}g_{k-n}\right]\right).$$

Решениями уравнений (2.4) являются коэффициенты разложения (2.3). Характеристическая система уравнений (2.4)

$$\frac{dt}{1}=\frac{dr}{0}=\frac{d\varphi}{\omega(r)}=\frac{dI_k}{F_k} \tag{2.5}$$

допускает три независимых интеграла:

$$r=r_0,$$

$$\varphi-\omega(r)t=\varphi_0,$$

$$I_k-\int F_k(r_0,\varphi_0+\omega(r)t,t)dt=c_k,$$

где r_0, φ_0, c_k – константы. Тогда решения уравнений (2.4):

$$I_k = \Phi\biggl(r, \varphi - \omega(r)t, \int F_k(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t)dt\biggr).$$

Обратите внимание, что решениями однородных уравнений

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial \varphi}\omega(r) = 0, \qquad k = 1, 2, ...,$$

являются произвольные гладкие функции $I_k = S_k(t\omega(r) - \varphi, r)$. Таким образом, переход к переменным действие-угол даёт эффективный метод для построения семейства неавтономных интегралов системы (1.1).

3. Критерий существования замкнутых орбит

Если система (1.1) допускает периодическое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$, то для любого t выполняется следующее соотношение:

$$I(x(t), y(t), t) = I(x(t+T), y(t+T), t+T) = I(x(t), y(t), t+T),$$

где I – неавтономный интеграл системы (1.1), а T – период решения.

Если решение $r(t)$, $\varphi(t)$ системы (2.2) соответствует периодическому решению $x(t)$, $y(t)$ системы (1.1), и при однократном обходе орбиты угол изменяется на 2π, то для любого t выполняется следующее соотношение:

$$I(r(t), \varphi(t), t) = I(r(t+T), \varphi(t+T), t+T) = I(r(t), \varphi(t) + 2\pi, t+T),$$

где I – неавтономный интеграл системы (2.2), а T – период решения.

Теорема 3.1. *Пусть $I(x(t), y(t), t)$, $J(x(t), y(t), t)$ – независимые неавтономные интегралы системы* (2.2). *Тогда если выполняется*

$$\begin{cases} I(R, \varphi_0, 0) = I(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \\ J(R, \varphi_0, 0) = J(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \end{cases}, \tag{3.1}$$

то $r = R$, $\varphi = \varphi_0$ – начальные условия решения $r(t)$, $\varphi(t)$ системы (2.2), *которое соответствует периодическому решению $x(t)$, $y(t)$ системы* (1.1).

Доказательство. По теореме о неявной функции, система

$$\begin{cases} I(r(t), \varphi(t), t) = C_1 = const \\ J(r(t), \varphi(t), t) = C_2 = const \end{cases},$$

имеет единственное решение $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ в окрестности точки $(R, \varphi_0, 0)$.

Преобразование

$$\begin{cases} \varphi \mapsto \varphi + 2\pi \\ t \mapsto t + T \end{cases} \tag{3.2}$$

является симметрией для уравнений системы (2.2), так как они автономны и 2π-периодичны по φ. В силу равенств (3.1) преобразование (3.2) переводит траекторию решения $r(t)$, $\varphi(t)$, $r(0) = R$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в себя. Тогда очевидно

$$\begin{cases} r(t) = r(t+T) \\ \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi \end{cases}, \tag{3.3}$$

а соответствующее решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1.1) T-периодично.
Доказательство закончено.

Будем искать R и T в виде разложения по малому параметру ϵ:

$$R = R_0 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots, \qquad T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots . \tag{3.4}$$

Подставляем R и T из (3.4) в (3.1). Группируя (3.1) по степеням ϵ получаем системы для определения неизвестных коэффициентов разложений (3.4).

Заметим, что для определения разложений (3.4) до порядка ϵ^k включительно, необходимо знать разложения интегралов I и J до порядка ϵ^{k+1} включительно.

Кроме начальных условий замкнутого решения, теорема 3.1. позволяет также оценить количество замкнутых орбит. Покажем это на примере одного класса уравнений Льенара.

4. Некоторый класс уравнения Льенара

Рассмотрим уравнение [4]

$$\ddot{x} + \epsilon P(x)\dot{x} + x = 0, \tag{4.1}$$

где

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,$$

a_n – коэффициенты полинома $P(x)$.

Найдём семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разложения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно.

Перейдём от уравнения (4.1) к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon y P(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Перейдём к переменным действие-угол, сделая замену

$$\begin{cases} x = \sqrt{2r}\sin(\varphi) \\ y = \sqrt{2r}\cos(\varphi) \end{cases}. \tag{4.3}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon 2r\cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r}\sin(\varphi)) \\ \dot{\varphi} = 1 + \epsilon\sin(\varphi)\cos(\varphi) P(\sqrt{2r}\sin(\varphi)) \end{cases} \tag{4.4}$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы $H = r$.

Пользуясь формулами (2.4), (2.5) и удерживая только члены до порядка малости ϵ^2 включительно, получаем уравнения для определения первых двух неизвестных коэффициентов разложения (2.3):

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = 2r\cos^2(\varphi)P(\sqrt{2r}\sin(\varphi)),$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_1}{\partial r}2r\cos^2(\varphi)P(\sqrt{2r}\sin(\varphi)) - \frac{\partial I_1}{\partial \varphi}\sin(\varphi)\cos(\varphi)P(\sqrt{2r}\sin(\varphi)).$$

Решая эти уравнения по порядку, получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + S_1(t-\varphi, r),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{N}\Bigg[a_n^2(2r)^{n+1}\left((n+2)Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)\cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)}\right)+$$
$$+a_n(2r)^{\frac{n}{2}}\left(2r\frac{\partial S_1}{\partial r}Q_1^{(n)}(\varphi) - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2}\right)\Bigg]+S_2(t-\varphi, r),$$

где

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \int \cos^2(\varphi)\sin^n(\varphi)d\varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \int Q_1^{(n)}(\varphi)\cos^2(\varphi)\sin^n(\varphi)d\varphi.$$

Функции $Q_1^{(n)}(\varphi)$ и $Q_2^{(n)}(\varphi)$ представим в явном виде:

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \cos(\varphi)\sum_{m=0}^{n+1} b_m^{(n)}\sin^m(\varphi) + b^{(n)}\varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{n+1}\Big[\xi_m^{(n)}\sin^{n+m+1}(\varphi)\cos^2(\varphi) + \psi_m^{(n)}\sin^{n+m+1}(\varphi)+$$
$$+d_m^{(n)}\sin^{m+1}(\varphi) + c_m^{(n)}\varphi\sin^m(\varphi)\cos(\varphi)\Big]+c^{(n)}\varphi^2,$$

где коэффициенты определяются рекурентными соотношениями

$$\xi_m^{(n)} = \frac{b_m^{(n)}}{n+m+3}; \quad \psi_m^{(n)} = \frac{2b_m^{(n)}}{(n+m+3)(n+m+1)};$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{n+2}; \quad b_n^{(n)} = 0; \quad b_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n}b_{n+1}^{(n)};$$

$$c_{n+1}^{(n)} = \frac{b^{(n)}}{n+2}; \quad c_n^{(n)} = 0; \quad c_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n}c_{n+1}^{(n)};$$

$$d_{n+1}^{(n)} = -\frac{b^{(n)}}{(n+2)^2}; \quad d_n^{(n)} = 0; \quad d_{n-1}^{(n)} = -\frac{n+2}{n^2}d_{n+1}^{(n)};$$

$$\left.\begin{aligned} b^{(n)}_{m-1} &= \frac{m+1}{m} b^{(n)}_{m+1}, \quad b^{(n)}_{m} = 0 \\ c^{(n)}_{m-1} &= \frac{m+1}{m} c^{(n)}_{m+1}, \quad c^{(n)}_{m} = 0 \\ d^{(n)}_{m-1} &= \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} d^{(n)}_{m+1}, \quad d^{(n)}_{m} = 0 \end{aligned}\right\}, \quad m = n-2, n-4, ...;$$

$$b^{(n)} = -\frac{1}{2} b^{(n)}_1; \quad c^{(n)} = -\frac{1}{4} c^{(n)}_1.$$

Заметим, что если n чётное, то $b^{(n)}_0 = 0$, $c^{(n)}_0 = 0$, $d^{(n)}_0 = 0$, $\xi^{(n)}_0 = 0$, $\psi^{(n)}_0 = 0$, $b^{(n)} \neq 0$, $c^{(n)} \neq 0$, $b^{(n)} \neq 0$, $c^{(n)} \neq 0$, в другом случае $b^{(n)}_0 \neq 0$, $c^{(n)}_0 \neq 0$, $d^{(n)}_0 \neq 0$, $\xi^{(n)}_0 \neq 0$, $\psi^{(n)}_0 \neq 0$, $b^{(n)} = 0$, $c^{(n)} = 0$, $d^{(n)} = 0$.

Теперь, когда мы определили семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разожения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно, проверим, существуют ли у уравнения (4.1) периодические решения, и если существуют, то сколько их. Для этого определим два независимых интеграла I и J.

$$I = H + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + ... , \tag{4.5}$$

где

$$S_1 = S_2 = 0, \qquad I_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q^{(n)}_1(\varphi),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q^{(n)}_2(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)\cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right).$$

$$J = H + \epsilon J_1 + \epsilon^2 J_2 + ... , \tag{4.6}$$

где

$$S_1 = t - \varphi, \qquad S_2 = 0, \qquad J_1 = \sum_{n=0}^{N} a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q^{(n)}_1(\varphi) + t - \varphi,$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^{N} \Bigg[a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q^{(n)}_2(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)\cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + \\ + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \Bigg].$$

Учитывая

$$Q^{(n)}_1(2\pi) - Q^{(n)}_1(0) = 2\pi b^{(n)}, \quad Q^{(n)}_2(2\pi) - Q^{(n)}_2(0) = 2\pi(2\pi c^{(n)} + c^{(n)}_0),$$

запишем систему (3.1) для уравнения (4.1):

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + \epsilon \sum\limits_{n=0}^{N} a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2)(2\pi c^{(n)} + c^{(n)}_0) = 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T - 2\pi + \epsilon \sum\limits_{n=0}^{N} a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2)(2\pi c^{(n)} + c^{(n)}_0) = 0 \end{cases}.$$

Подставим вместо R и T их разложения (3.4) и рассмотрим раздельно члены при различных степенях параметра ϵ.

$$\epsilon^0 : \quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} = 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T_0 - 2\pi = 0 \end{cases} . \tag{4.7}$$

$$\epsilon^1 : \quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{n+1} (n+2)(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \\ \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + T_1 + \sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{n+1} (n+2)(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \end{cases} . \tag{4.8}$$

Из системы (4.7) видно, что количество возможных корней R_0 первого уравнения принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N+2}{2}\right]\right]$. Так как один из этих возможных корней всегда нулевой, количество возможных предельных циклов уравнения (4.1) принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N}{2}\right]\right]$. Если в полиноме $P(x)$ ненулевыми являются только коэффициенты при нечётных степенях x, то уравнение (4.1) имеет континуальное семейство периодических решений, а предельных циклов не существует. Решения систем (4.7) и (4.8):

$$\begin{cases} R_0 = R_0 \\ T_0 = 2\pi \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{n+1} (n+2)(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)})}{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) b^{(n)}} \\ T_1 = 0 \end{cases} .$$

Таким образом мы определили для уравнения (4.1) семейство неавтономных интегралов в виде разложения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно, R и T в виде разложений (3.4) до порядка ϵ включительно и оценили количество предельных циклов.

Дата поступления 13.07.2016

Список литературы

1. А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, М., 1976, 456 с.

2. L. Bobisud, "On The Single First-Order Partial Differential Equation With A Small Parameter", *SIAM Review*, **8**, 1966, 479—493.

3. А. Пуанкаре, *Избранные труды в трёх томах.* Т. 1: *Новые методы небесной механики*, Наука, М., 1971, 772 с.

4. A. Lienard, “Etudes des oscillations entretenues”, *Revue generale de l’Electricite*, **23**, 1928, 901—912, 946—954.

Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems with one degree of freedom

© **N. V. Kovalev**[2]

Abstract. Quasi-conservative stationary systems with one degree of freedom are considered. Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems is studied and analyticity of such integrals by small parameter is discussed. Method for constructing a set of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems in action-angle variables is proposed. Criterion of closed orbits’ existence is obtained in terms of non-autonomous integrals. This criterion is used to estimate the number of limit cycles for one class of Lienard’s equation.

Key Words: quasiconservative system, nonautonomous integral, periodic solutions, limit cycles, action-angle variables, small-parameter expansion

[2] Postgraduate student of the Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; nick.kvlv@gmail.com