

УДК 519.17

Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений

© Д. В. Грибанов¹, Д. С. Малышев²

Аннотация. В статье рассматриваются естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного программирования. Для любого фиксированного C в статье доказывается полиномиальная разрешимость обеих задач о доминирующем множестве в классе графов, у которых все миноры матриц смежности вершин или ребер не превосходят C по абсолютному значению. В статье также доказывается подобный результат для задачи о независимом множестве и класса графов, который задается ограничением абсолютных значений всех миноров матриц, полученных пополнением транспонированных матриц инцидентности векторами из одних единиц.

Ключевые слова: булево линейное программирование, задача о независимом множестве, задача о доминирующем множестве, матричный минор, полиномиальный алгоритм

1. Введение

Прямая задача линейного программирования (ПЗЛП для краткости) — задача поиска решения, максимизирующего заданную линейную функцию с целыми коэффициентами на заданном полиэдре с целочисленной матрицей ограничений и целочисленным вектором правой части. Иными словами, для заданных $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$, ПЗЛП состоит в том, чтобы решить следующую *прямую линейную программу* (кратко, п.л.п.):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} \leq & \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq & \mathbf{0}_n, \end{aligned}$$

где $\mathbf{0}_n$ — вектор с n компонентами, каждая из которых является нулем, \mathbf{x} — вектор из n переменных, значения которых нужно определить. *Прямая целочисленная линейная программа* (п.ц.л.п.) — п.л.п., в которой наложено требование целочисленности на значения всех переменных. В *прямой булевой линейной программе* (п.б.л.п.) каждый элемент входных данных \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} принадлежит множеству $\{0, 1\}$ и для каждой переменной наложено требование принадлежности этому множеству. Заданная п.ц.л.п. (п.б.л.п.) является экземпляром массовой *прямой задачи целочисленного (булева) линейного программирования* (кратко, ПЗЦЛП и ПЗБЛП).

Двойственная линейная программа (кратко, д.л.п.) для п.л.п., записанной выше, это программа:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq & \mathbf{c}, \\ \mathbf{y} \geq & \mathbf{0}_m. \end{aligned}$$

¹ Ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, dimitry.gribanov@gmail.com

² Профессор кафедры прикладной математики и информатики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород; dsmalyshev@rambler.ru

Различие между *двойственными целочисленными (булевыми) линейными программами* (кратко, д.ц.л.п. и д.б.л.п.) и д.л.п. такое же, как и в случае прямых программ, т.е. накладывается ограничение целочисленности (булевости) на все входные данные и переменные. Массовая *двойственная задача целочисленного (булева) линейного программирования* (кратко, ДЗЦЛП и ДЗБЛП) состоит в том, чтобы решить заданную д.ц.л.п. (д.б.л.п.).

Существует несколько полиномиальных алгоритмов для решения ПЗЛП и ДЗЛП — алгоритмы Л. Хачияна [9], Н. Кармаркара [8], Ю. Нестерова (см. [11] и [12]). К сожалению, ПЗБЛП и ДЗБЛП являются NP-трудными, т.к. некоторые NP-трудные задачи могут быть сформулированы через п.б.л.п. и д.б.л.п. Тем самым, существование полиномиальных алгоритмов для решения ПЗБЛП и ДЗБЛП маловероятно. Поэтому вызывает интерес поиск случаев полиномиальной разрешимости ПЗБЛП и ДЗБЛП.

Напомним, что целочисленная матрица называется *вполне унимодулярной*, если каждый ее минор равен либо $+1$, либо -1 , либо 0 . Хорошо известно, что все оптимальные решения любой п.л.п. или д.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений являются целочисленными. Следовательно, для любой п.л.п. и соответствующей ей п.ц.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений множества оптимальных решений совпадают. Поэтому любой полиномиальный алгоритм для решения ПЗЛП и ДЗЛП (например, алгоритмы из [8],[9],[11],[12]) также решает ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с вполне унимодулярными матрицами ограничений. Следующим естественным шагом является рассмотрение *бимодулярного случая*, т.е. матриц ограничений, модуль каждого минора которых принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$. Также было бы интересным исследовать сложность ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с матрицами ограничений, имеющими ограниченные по абсолютному значению миноры. Имеется предположение (до сих пор не доказанное), что для любого фиксированного s ПЗЦЛП и ДЗЦЛП решаются за полиномиальное время в классе линейных программ, любой минор матриц ограничений которых не превосходит s по абсолютному значению [14]. Существуют (см. [14]) варианты этой гипотезы, в которых рассматриваются расширенные матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ и $(\mathbf{A} \ \mathbf{b})$.

К сожалению, в настоящее время накоплено совсем немного результатов о сложности ПЗЦЛП и ДЗЦЛП для классов линейных программ с ограниченными минорами. Так, сложностные статусы ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с бимодулярными матрицами ограничений до сих пор не известны. Шаг навстречу выяснению сложности в бимодулярном случае был сделан в работе [15]. Именно, было доказано, что если ранг бимодулярной $m \times n$ матрицы \mathbf{A} равен n и каждая $n \times n$ подматрица \mathbf{A} невырождена, то соответствующая п.ц.л.п. может быть решена за полиномиальное время. В работе [3] было доказано, что ПЗЦЛП решается за полиномиальное время для матриц ограничений, в которых все детерминанты квадратных подматриц максимального размера лежат между 1 и любой наперед заданной константой. В [1] было доказано, что если \mathbf{A} — булева матрица, имеющая не более чем 2 единицы в каждой строке, \mathbf{b} и \mathbf{c} — булевы вектора, и абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ не превосходят C' , то соответствующая п.б.л.п. может быть решена за полиномиальное время для любого фиксированного C' . Этот результат имеет графовую природу, т.к. линейная программа для задачи о независимом множестве (задачи поиска в графе множества попарно несмежных вершин наибольшей мощности) для заданного графа G имеет транспонированную матрицу инцидентности $\mathbf{I}^T(G)$ графа G в качестве матрицы ограничений.

Мы рассматриваем естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного

программирования и доказываем полиномиальную разрешимость этих задач для классов графов, имеющих ограниченные по абсолютному значению миноры (расширенных) матриц ограничений.

2. Некоторые классические задачи на графах и их БЛП-постановки

Независимое множество в графе — любое подмножество его попарно несмежных вершин. Размер независимого множества с наибольшим количеством вершин графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, ЗНМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$ или нет. Это классическая NP-полная задача на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗНМ может быть сформулирована в виде следующей п.б.л.п.:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{j}_n^T \mathbf{x} \\ \mathbf{I}^T(G) \mathbf{x} \leq & \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{x} \in & \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

где \mathbf{j}_k — вектор с k компонентами, каждая из которых является единицей. Действительно, переменная x_v — индикатор того, что соответствующая вершина v принадлежит оптимальному решению ЗНМ. Неравенство $x_v + x_u \leq 1$ гарантирует, что смежные вершины u и v одновременно не принадлежат никакому допустимому решению программы, т.е. что любое допустимое решение является независимым множеством.

Пусть $\mathcal{ISP}(c)$ — множество всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_n^T \\ \mathbf{I}^T(G) \end{pmatrix}$ не превосходят c . В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗНМ может быть решена для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ за полиномиальное время. Этот результат был впервые получен в работе [1], но наше доказательство более простое и компактное.

Вершинным доминирующим множеством графа G называется подмножество $D \subseteq V(G)$ такое, что любой элемент множества $V(G) \setminus D$ имеет соседа в D . Размер доминирующего множества с наименьшим числом вершин графа G называется *вершинным числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о вершинном доминирующем множестве* (кратко, ЗВДМ) состоит для заданных графа G и числа k в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leq k$ или нет. *Задача о реберном доминирующем множестве* (кратко, ЗРДМ) определяется аналогичным образом. ЗВДМ и ЗРДМ являются классическими NP-полными задачами на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗВДМ и ЗРДМ могут быть сформулированы в виде следующих д.б.л.п.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{j}_n^T \mathbf{y} & \min \quad & \mathbf{j}_m^T \mathbf{y} \\ (\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n) \mathbf{y} \geq & \mathbf{j}_n, & (\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m) \mathbf{y} \geq & \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{y} \in & \{0, 1\}^n & \mathbf{y} \in & \{0, 1\}^m, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_v(G)$ и $\mathbf{A}_e(G)$ — матрицы смежности вершин и ребер графа G , соответственно, а \mathbf{I}_k — единичная матрица размера k . Убедимся в том, что первая программа действительно

задает ЗВДМ для графа G . Переменная y_v является индикатором того, что соответствующая вершина v принадлежит некоторому оптимальному решению ЗВДМ для графа G . Неравенство $x_v + \sum_{u \in N(v)} x_u \geq 1$, где $N(v)$ — окрестность вершины v , гарантирует, что множество $\{v\} \cup N(v)$ содержит элемент любого допустимого решения, т.е. что любое допустимое решение является доминирующим множеством.

Пусть $\mathcal{VDSP}(c)$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ — множества всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матриц $\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m$ не превосходят c , соответственно. В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗВДМ может быть решена для графов из $\mathcal{VDSP}(c)$ за полиномиальное время. Также мы показываем, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ за полиномиальное время.

3. Некоторые обозначения и определения

Граф H называется *подграфом* графа G , если H получается из G удалением вершин и ребер (удаление вершины предполагает удаление всех инцидентных ей ребер). Граф H называется *порожденным подграфом* графа G , если H может быть получен из G удалением вершин.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс \mathcal{X} может быть задан множеством \mathcal{Y} своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных (относительно удаления вершин) не принадлежащих \mathcal{X} . При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* класс графов — наследственный класс, замкнутый еще и относительно удаления ребер. Любой сильно наследственный класс графов \mathcal{X} может быть задан множеством \mathcal{Y} своих запрещенных подграфов. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}_e(\mathcal{Y})$.

Для любого c классы $\mathcal{ISP}(c)$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ являются сильно наследственными. Для любого c класс $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на не более чем два независимых множества.

Граф смежности ребер графа G называется *реберным* к G .

Мы будем использовать следующие обозначения для матриц:

1. \mathbf{J}_n — матрица порядка n , состоящая из одних единиц,
2. \mathbf{O}_n — матрица порядка n , состоящая из одних нулей,
3. \mathbf{I}_n — единичная матрица порядка n ,
4. \mathbf{j}_n — вектор с n компонентами, состоящий из одних единиц,
5. \mathbf{o}_n — вектор с n компонентами, состоящий из одних нулей,
6. \mathbf{A}^T — матрица, транспонированная к \mathbf{A} ,
7. $\mathbf{I}(G)$ — матрица инцидентности графа G ,
8. $\mathbf{A}_v(G)$ — матрица смежности вершин графа G ,
9. $\mathbf{A}_e(G)$ — матрица смежности ребер графа G .

Мы также будем использовать следующие обозначения:

1. $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в первой доле и q вершинами во второй доле,
2. $K'_{1,p}$ — граф, полученный из графа $K_{1,p}$ подразбиением каждого его ребра,
3. K_n — полный граф с n вершинами,
4. O_n — пустой граф с n вершинами,
5. A_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j \mid i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n\}$,
6. B_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j \mid i \neq j\} \cup \{u_i u_j \mid i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n\}$,
7. Pal_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_{2n+1}, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{v_{2i} u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$,
8. kG — дизъюнктное объединение k копий графа G ,
9. для графа G и подмножества $V' \subseteq V(G)$, $G[V']$ — подграф G , порожденный подмножеством V' , $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех вершин подмножества V' ,
10. $N(x)$ — окрестность вершины x , $N[x] \triangleq N(x) \cup \{x\}$.

4. Задача о независимом множестве

4.1. Некоторое включение

Л е м м а 4.1. Для любого $c \geq 2$ справедливо включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq Free_s(\{Pal_c\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{M}(k, a)$ — матрица, полученная из матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$ изменением 1 на a в элементе, соответствующем вершине u_1 в первой строке. Рассмотрим подматрицу матрицы $\mathbf{M}(k, a)$, порожденную столбцами, соответствующими вершинам v_1, v_2, v_3, u_1 , а также первой строкой и строками, соответствующими ребрам $v_1 v_2, v_2 v_3, v_2 u_1$. Эта матрица \mathbf{M}' имеет вид $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где первый ее столбец

соответствует вершине u_1 , $(i+1)$ -ый столбец соответствует вершине v_i для любого $1 \leq i \leq 3$, вторая, третья и четвертая строки соответствуют ребрам $u_1 v_2, v_1 v_2, v_2 v_3$, соответственно. Следующая диаграмма показывает последовательность элементарных операций со строками и столбцами матрицы \mathbf{M}' :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{M}(k, a)$ элементарными преобразованиями приводится к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{M}(k-1, a+1) \end{pmatrix}$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |\det(\mathbf{M}(k-1, a+1))|$, т.е. $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |\det(\mathbf{M}(1, a+k-1))|$. Очевидно, что $\det(\mathbf{M}(1, a)) = -1-a$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |a+k|$. Т.к. $\mathbf{M}(k, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$, то $|\det \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}| = k+1$.

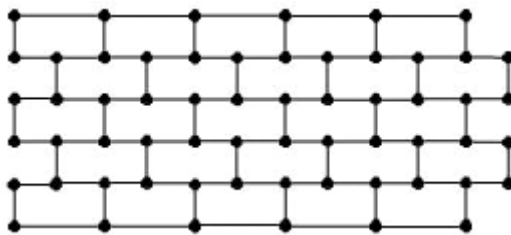
Матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$ является расширенной матрицей ограничений ЗНМ для графа Pal_k . Следовательно, $\mathcal{ISP}(c)$ не содержит графа Pal_c . Напомним, что класс $\mathcal{ISP}(c)$ является сильно наследственным. Следовательно, включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq Free_s(\{Pal_c\})$ имеет место.

Доказательство закончено.

4.2. Теорема Рида

Покрытие нечетных циклов графа G — подмножество $X \subseteq V(G)$ такое, что граф $G \setminus X$ является двудольным.

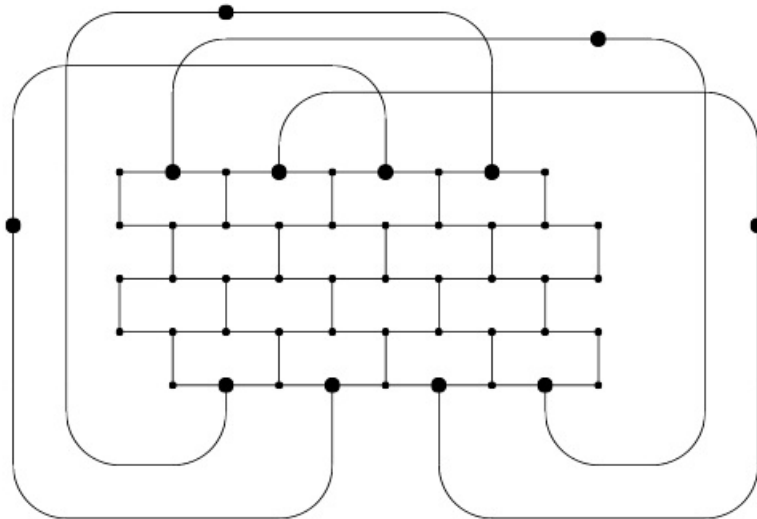
Элементарной стеной высоты h называется граф, состоящий из h уровней, каждый из которых состоит из h «кирпичей», где под «кирпичом» понимается простой цикл длины шесть, если уровень не является верхним и нижним, иначе это простой цикл длины пять. Элементарная стена высоты 5 изображена на следующем рисунке.



Р и с у н о к 4.1

Элементарная стена высоты 5

Стена Эшера высоты h может быть получена из элементарной стены высоты h следующим образом. Пусть (v_1, \dots, v_{h+1}) и (u_1, \dots, u_{h+1}) — верхний и нижний пути элементарной стены высоты h , соответственно. Мы заменяем каждое ребро (v_i, v_{i+1}) на простой путь (v_i, w'_i, v_{i+1}) и каждое ребро (u_i, u_{i+1}) на простой путь (u_i, w''_i, u_{i+1}) . Далее, для каждого i мы добавляем ребро (w'_i, w''_{h+1-i}) и подразбиваем его. Стена Эшера высоты 4 изображена на следующем рисунке.



Р и с у н о к 4.2

Стена Эшера высоты 4

Б. Рид доказал следующий результат в работе [13].

Т е о р е м а 4.1. *Для любых k и h существует такое число $t(k, h)$, что если G — граф, не содержащий k непересекающихся по вершинам нечетных циклов и не содержащий стены Эшера высоты h в качестве подграфа, то G содержит покрытие нечетных циклов, имеющее не более $t(k, h)$ элементов.*

4.3. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 4.2. *Для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из $\mathcal{ISP}(c)$ и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Если G содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов, то матрица $\mathbf{I}(G)$ содержит подматрицу, имеющую c^* блоков, определитель каждого из которых равен 2 по абсолютной величине. Следовательно, данная матрица содержит минор, абсолютное значение которого равно 2^{c^*} , что больше, чем c . Поэтому G не содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов.

Очевидно, граф Pal_c является порожденным подграфом стены Эшера высоты c . По Лемме 4.1 и Теореме 4.1 граф G имеет покрытие нечетных циклов X мощности не более $t(c^*, c)$. Это покрытие может быть найдено за полиномиальное время, поскольку можно за полиномиальное время проверить, является ли заданный граф двудольным или нет. Ясно, что $\alpha(G) = \max_{X' \subseteq X, X' \text{ — независимое множество}} (|X'| + \alpha(G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))))$ и что для любого подмножества X' множества X подграф $G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))$ является двудольным. ЗНМ

может быть решена для двудольных графов за полиномиальное время [16]. Следовательно, для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ полиномиально сводится к ЗНМ для двудольных графов. Поэтому для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Задача о вершинном доминирующем множестве

5.1. Вспомогательные результаты

Л е м м а 5.1. Пусть c — некоторое натуральное число и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{K_{1,c+2}, A_{c+2}, B_{c+1}, c^*K_{1,3}, c^*A_3\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица ограничений $\mathbf{A}_v(K_{1,c+2}) + \mathbf{I}_{c+3}$ ЗВДМ для графа $K_{1,c+2}$ совпадает с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{j}_{c+2}^T \\ \mathbf{j}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ с точностью до перестановок строк и столбцов.

Ее определитель равен $-c-1$, т.к. она может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} -c-1 & \mathbf{o}_{c+2}^T \\ \mathbf{o}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+1} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица ограничений ЗВДМ для графа $c^*K_{1,3}$ является блочной матрицей, имеющей c^* блоков, каждый из которых имеет определитель, равный -2 . Следовательно, определитель всей матрицы равен $(-2)^{c^*}$, что по абсолютному значению больше, чем c . Следовательно, $K_{1,c+2} \notin \mathcal{VDSP}(c)$ и $c^*K_{1,3} \notin \mathcal{VDSP}(c)$. Т.к. $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным, то имеет место включение $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{K_{1,c+2}, c^*K_{1,3}\})$.

Нетрудно видеть, что ЗВДМ для графов A_{c+2} и B_{c+1} имеет матрицы ограничений $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \\ \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, соответственно. Первая матрица может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{O}_{c+2} \\ \mathbf{O}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица $\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2}$ является циркулянтном, чей определитель равен $\prod_{j=0}^{c+1} p(w_j)$, где

$p(x) \triangleq x + x^2 + \dots + x^{c+1}$ и $w_j \triangleq e^{2\pi i \cdot \frac{j}{c+2}}$ [7]. Ясно, что $p(w_0) = c+1$ и $p(x) = x + x^2 + \dots + x^{c+1} = \frac{x^{c+2}-1}{x-1} - 1$ для любого вещественного числа $x \neq 1$. Следовательно, $p(w_j) = -1$ для любого $j \in \overline{1, c+1}$. Поэтому $|\det(\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2})| = c+1$. Таким образом, графы A_{c+2} и c^*A_3 не принадлежат классу $\mathcal{VDSP}(c)$, т.е. $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{A_{c+2}, c^*A_3\})$.

Подматрица матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, порожденная первыми $c+2$ строками и последними $c+2$ столбцами, является матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ 0 & \mathbf{j}_{c+1}^T \end{pmatrix}$. Абсолютное значение ее определителя равно $c+1$. Поэтому $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{B_{c+1}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Через $R(a, b)$ мы обозначаем соответствующее число Рамсея, т.е. наименьшее число n такое, что любой граф с n вершинами содержит либо K_a , либо O_b в качестве порожденного подграфа.

Л е м м а 5.2. Пусть $G \in \mathcal{VDSP}(c)$ и D — произвольное его минимальное доминирующее множество. Тогда $G[D] \in \text{Free}(\{K_{R(c+1, c+2)}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G[D]$ содержит полный подграф с $k \geq R(c+1, c+2)$ вершинами. Пусть вершины v_1, \dots, v_k порождают этот полный подграф. Поскольку D — минимальное доминирующее множество графа G , то для любого $i \in \overline{1, k}$ существует вершина $u_i \in N(v_i) \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^k N(v_j)$. По теореме Рамсея порожденный

подграф $G[\{u_1, \dots, u_k\}]$ графа G содержит либо K_{c+1} , либо O_{c+2} в качестве порожденного подграфа. Следовательно, G содержит либо A_{c+2} , либо B_{c+1} в качестве порожденного подграфа. Мы получаем противоречие с предыдущей леммой. Следовательно, наше первоначальное предположение было неверным.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 5.3. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{VDSP}(c)$, r — произвольная вершина G , $V_k(r)$ — множество всех вершин графа G , расположенных на расстоянии k от вершины r . Существует функция $f_c(\cdot) : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что для любого k выполнено неравенство $\alpha(G[V_k(r)]) \leq f_c(k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По Лемме 5.1 можно положить $f_c(0) = 1$ и $f_c(1) = c+1$. Пусть $k \geq 2$. Предположим, что $f_c(0), f_c(1), \dots, f_c(k-1)$ уже определены. Определим $f_c(k)$. Пусть S_k — независимое множество графа $G[V_k(r)]$ с наибольшим количеством вершин. Пусть D_{k-1} — подмножество множества $\bigcup_{x \in S_k} N(x) \cap V_{k-1}(r)$, доминирующее S_k и имеющее минимальное количество вершин. По Лемме 5.1 ни одна из вершин множества D_{k-1} не может быть смежна с $c+2$ вершинами множества S_k . Следовательно, $|D_{k-1}| \geq \frac{|S_k|}{c+1}$ по принципу Дирихле. Т.к. класс $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным и $G \in \mathcal{VDSP}(c)$, то порожденный подграф $G[D_{k-1} \cup S_k]$ графа G принадлежит классу $\mathcal{VDSP}(c)$. По нашему предположению $G[D_{k-1}] \in \text{Free}(\{O_{f_c(k-1)+1}\})$. По Лемме 5.2 $G[D_{k-1}] \in \text{Free}(\{K_{R(c+1, c+2)}\})$. Следовательно, по теореме Рамсея $|D_{k-1}| \leq R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1)$. Поэтому $|S_k| \leq (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1)$. Тем самым, мы можем положить $f_c(k) = (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1) + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

$(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка графа G — произвольное множество $\{G_1, G_2, \dots, G_s\}$ графов такое, что:

1. для любого i граф G_i является порожденным подграфом графа G , изоморфным либо $K_{1,3}$, либо A_3 ,
2. для любых различных i и j множества вершин графов G_i и G_j не пересекаются и не существует двух смежных вершин $u \in G_i$ и $v \in G_j$.

$(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка называется *оптимальной*, если она содержит максимально возможное количество элементов. По Лемме 5.1 любая $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка любого графа из $\mathcal{VDSP}(c)$ имеет не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен $K_{1,3}$, и не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен A_3 . Следовательно, некоторая оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка любого графа из $\mathcal{VDSP}(c)$ может быть найдена за полиномиальное время, т.к. она может быть найдена перечислением всех подмножеств его вершин, имеющих не более $(4+6)\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов.

Пусть G — произвольный связный граф из $\mathcal{VDSP}(c)$ и $P \triangleq \{G_1, \dots, G_s\}$ — некоторая оптимальная его $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка. Пусть $N_d(P) \triangleq \{x \in V(G) \mid \exists i \in \overline{1, s} \exists y \in V(G_i) \text{ такая, что расстояние между } x \text{ и } y \text{ не превосходит } d\}$. Пусть $\mathfrak{D}_G \triangleq \{D^* \mid D^* \text{ — подмножество множества } N_2(P), \text{ доминирующее } N_1(P)\}$. Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ мы удалим каждую вершину G , доминируемую множеством D^* (D^* доминирует каждую вершину D^*). Полученный граф обозначим через $G(D^*)$.

Л е м м а 5.4. Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ граф $G(D^*)$ принадлежит классу $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$. Если D — доминирующее множество графа G с наименьшим количеством вершин, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geq \gamma(G(D \cap N_2(P))) + |D \cap N_2(P)|$.

Доказательство. Ясно, что $V(G(D^*)) \cap N_1(P) = \emptyset$ по определению графа $G(D^*)$. Отсюда и из оптимальности упаковки P следует, что граф $G(D^*)$ не может содержать ни $K_{1,3}$, ни A_3 в качестве порожденного подграфа. Другими словами, $G(D^*) \in \text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$.

Пусть $\tilde{D} \triangleq D \cap N_2(P)$ и $D' \triangleq D \setminus \tilde{D}$. Ясно, что $\tilde{D} \in \mathfrak{D}_G$. Покажем, что существует доминирующее множество графа $G(\tilde{D})$, имеющее не более $|D'|$ элементов. Это очевидно, если $D' \subseteq V(G(\tilde{D}))$. Предположим, что существует вершина $x \in D' \setminus V(G(\tilde{D}))$. Заметим, что $x \notin N_2(P)$. По построению графа $G(\tilde{D})$ существует вершина $y \in \tilde{D}$ такая, что $xy \in E(G)$. Ясно, что $y \in N_2(P) \setminus N_1(P)$. Т.к. D — доминирующее множество графа G с минимальным количеством вершин, то существует вершина $z \in N(x) \setminus \bigcup_{v \in D, v \neq x} N[v]$.

Следовательно, z не доминируется множеством \tilde{D} . Поэтому вершина z принадлежит графу $G(\tilde{D})$. Множество $N(x) \cap V(G(\tilde{D}))$ порождает полный граф. Действительно, если оно содержит две несмежные вершины v и u , то $N(y) \cap \{v, u\} = \emptyset$ и вершины x, y, v, u порождают подграф $K_{1,3}$. Это невозможно, т.к. упаковка P является оптимальной. Поэтому множество $(D' \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ доминирует $V(G(\tilde{D}))$. Таким образом, существует доминирующее множество D'' графа $G(\tilde{D})$, содержащее не более $|D'|$ вершин. Множество $\tilde{D} \cup D''$ является доминирующим множеством графа G . Более того, $|\tilde{D} \cup D''| = |\tilde{D}| + |D''| \leq |\tilde{D}| + |D'| = |D| = \gamma(G)$. Т.к. $\gamma(G(\tilde{D})) \leq |D''|$, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geq \gamma(G(\tilde{D})) + |\tilde{D}|$.

Доказательство закончено.

5.2. Основной результат этого раздела

Теорема 5.1. *Для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из $\mathcal{VDSP}(c)$ решается за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{VDSP}(c)$. Некоторая его оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка P может быть вычислена за полиномиальное время. Пусть D_{opt} — доминирующее множество графа G , имеющее минимальное количество вершин. По Леммам 5.2 и 5.3 существует функция $g(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что мощность множества $D_{opt} \cap N_2(P)$ не превосходит значения функции $g(\cdot)$ в точке c . Пусть $\mathfrak{D}_G^* \triangleq \{D \in \mathfrak{D}_G \mid |D| \leq g(c)\}$. Следовательно, множество \mathfrak{D}_G^* может быть вычислено за полиномиальное время. Пусть $D \in \mathfrak{D}_G^*$. Объединение множества D и любого доминирующего множества графа $G(D)$ с минимальным количеством вершин является доминирующим множеством графа G . Следовательно, выполнено неравенство $\gamma(G) \leq |D| + \gamma(G(D))$. Отсюда и второй части Леммы 5.4 выполнено соотношение $\gamma(G) = \min_{D \in \mathfrak{D}_G^*} (\gamma(G(D)) + |D|)$. Т.к. $\mathfrak{D}_G^* \subseteq \mathfrak{D}_G$, то по первой части Леммы 5.4 граф $G(D)$ принадлежит классу $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ для любого $D \in \mathfrak{D}_G^*$. ЗВДМ может быть решена за полиномиальное время для графов из класса $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ [5]. Поэтому для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из класса $\mathcal{VDSP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Доказательство закончено.

6. Задача о реберном доминирующем множестве

6.1. Кликовая ширина графов и ее значение

Кликовая ширина — важный параметр графов. Это объясняется тем фактом, что многие задачи на графах могут быть решены за полиномиальное время в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной (см., например, [6]). Более точно, для любого фиксированного числа C многие NP-полные задачи на графах становятся полиномиально разрешимыми во множестве всех графов, каждый из которых имеет кликовую ширину не более чем C . В частности, это верно для задач о независимом множестве и о вершинном доминирующем множестве [6].

Класс \mathcal{S} — множество всех лесов, имеющих не более чем 3 листа в каждой из компонент связности. Следующий результат является достаточным условием ограниченности кликовой ширины в сильно наследственных классах графов. Он доказан в работе [4].

Л е м м а 6.1. *Если \mathcal{X} — сильно наследственный класс графов и $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{X}$, то существует константа $C(\mathcal{X})$ такая, что кликовая ширина любого графа из \mathcal{X} не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

Для любых c и p , $pK'_{1,3} \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ являются сильно наследственными классами. Следовательно, по предыдущей и следующей леммам кликовая ширина всех графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ ограничена для любого c .

Л е м м а 6.2. *Пусть c — произвольное натуральное число и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{EDSP}(c) \subseteq \text{Free}_s(\{c^*K'_{1,3}\})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица ограничений $\mathbf{A}_e(K'_{1,3}) + \mathbf{I}_6$ ЗРДМ для графа $K'_{1,3}$ совпадает (с точностью до перестановок строк и столбцов) с матрицей $\mathbf{M} \triangleq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Нетрудно видеть, что } \det(\mathbf{M}) = -2. \text{ Следовательно, никакой граф}$$

из $\mathcal{EDSP}(c)$ не может содержать c^* непересекающихся по вершинам копий графа $K'_{1,3}$, иначе \mathbf{M} содержит минор $(-2)^{c^*}$, причем $2^{c^*} > c$. Поэтому $\mathcal{EDSP}(c) \subseteq \text{Free}_s(\{c^*K'_{1,3}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

6.2. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 6.1. *Для любого фиксированного c ЗРДМ для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что ЗРДМ полиномиально разрешима в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной [10]. Отсюда и из лемм 6.1 и 6.2 следует, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

7. Благодарности

Эта публикация подготовлена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты 16-31-60008-мол-а-дк, 15-01-06249-а, 16-31-00109-мол-а; гранта Президента РФ МК-4819.2016.1; лаборатории ЛАТАС НИУ ВШЭ.

Дата поступления 09.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, “Independent sets in the graphs with bounded minors of the extended incidence matrix”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **5:1** (2011), 14–18.
2. S. Arnborg, A. Proskurowski, “Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k -trees”, *Discrete Applied Mathematics*, **23:1** (1989), 11–24.
3. S. Artmann, F. Eisenbrand, C. Glanzer, T. Oertel, S. Vempala, R. Weismantel, “A note on non-degenerate integer programs with small sub-determinants”, *arxiv:1603.09595v1*.
4. R. Boliac, V. Lozin, “On the clique-width of graphs in hereditary classes”, *Lecture Notes in Computer Science*, **2518** (2002), 44–54.
5. A. Brandstädt, F. F. Dragan, “On linear and circular structure of (claw, net)-free graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, **129:2–3** (2003), 285–303.
6. B. Courcelle, J. Makowsky, U. Rotics, “Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width”, *Theory of Computing Systems*, **33:2** (2000), 125–150.
7. R. M. Gray, “Toeplitz and circulant matrices: a review”, *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, **2:3** (2006), 155–239.
8. N. Karmarkar, “A new polynomial time algorithm for linear programming”, *Combinatorica*, **4:4** (1984), 373–395.
9. L. G. Khachiyan, “Polynomial algorithms in linear programming”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20:1** (1980), 53–72.
10. D. Kobler, U. Rotics, “Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width”, *Discrete Applied Mathematics*, **126:2–3** (2003), 197–221.
11. Y. E. Nesterov, A. S. Nemirovsky, *Interior point polynomial methods in convex programming*, SIAM, 1994.
12. P. M. Pardalos, C. G. Han, Y. Ye, “Interior point algorithms for solving nonlinear optimization problems”, *COAL Newsletter*, **19** (1991), 45–54.
13. B. Reed, “Mangoes and Blueberries”, *Combinatorica*, **19:2** (1999), 267–296.
14. V. N. Shevchenko, *Qualitative topics in integer linear*, AMS, 1997.
15. S. I. Veselov, A. J. Chirkov, “Integer program with bimodular matrix”, *Discrete Optimization*, **6:2** (2009), 220–222.

-
16. S.H. Whitesides, “A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with applications to perfect graphs.”, *Annals of Discrete Mathematics*, **88** (1984), 281–297.

The complexity of some graph problems with bounded minors of their constraint matrices

© D. V. Griбанov³, D. S. Malyshev⁴

Abstract. The article considers natural formulations of the independent set problem, vertex and edge dominating set problems as integer linear programming problems. For every fixed C , authors prove polynomial-time solvability of both dominating set problems in a class of graphs, for which all minors of the vertex and edge adjacency matrices are at most C in the absolute value. The paper also includes a similar result for the independent set problem and for a class of graphs, which is defined by bounding of absolute values of all matrix minors obtained by augmenting of transposed incidence matrices by all-ones vectors.

Key Words: boolean linear programming, independent set problem, dominating set problem, matrix minor, polynomial-time algorithm

³ Assistant lecturer of Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; dimitry.gribanov@gmail.com

⁴ Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; dsmalyshev@rambler.ru